Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 069 – Ottobre 2004- Anno Sesto

1. **Group Fiction** 1

2. **Problemi** 11

2.1 Organizziamo lo spennamento... 11
2.2 Preparatevi per Halloween! 12

3. **Bungee Jumpers** 12

4. **Soluzioni e Note** 12

4.1 [066] 13
4.1.1 PMP 13
4.2 [068] 14
4.2.1 Ufficio Complicazione Giochi Semplici 14
4.2.2 Cenerentoliadi 18

5. **Quick & Dirty** 20

6. **Pagina 46** 20

7. **Paraphernalia Mathematica** 22

7.1 A che punto è la notte – [002] - Compieta 22

1. Group Fiction

C'è qualcosa che non cambia mai, sia arrivando in treno alla stazione di Buenos Aires sia atterrando sulla pista dell'aeroporto di Pechino. È la stessa cosa familiare che ci viene incontro attraccando al porto di New York, o anche, più comodamente e semplicemente, guardando un servizio al telegiornale in diretta da New Delhi. Oppure e ancora, quando sbadigliamo di fronte alla prima pagina del giornale del mattino, o quando cerchiamo un indirizzo complicato in una cartina toponomastica. Sempre, o quasi sempre, mentre lavoriamo; sempre, assolutamente sempre, quando studiamo, a casa o in un'aula scolastica. E, naturalmente, anche in questo preciso momento.

Le lettere dell'alfabeto. Parlano in continuazione, e sì, ci parlano anche da Pechino: in luoghi così remoti sono accompagnate da allegri ideogrammi, o da altri segni più familiari alla gente del posto, ma è davvero difficile che il nostro consueto alfabeto non abbia diritto di cittadinanza anche in quei paesi situati dall'altra parte del mondo. La scritta "Tokyo" è ormai frequente quanto, se non più, la coppia di ideogrammi giapponesi corrispondenti; i sette caratteri che formano la parola "Beijing" sono già familiari tanto ai cinesi quanto ai cileni, e lo saranno ancor di più fra quattro anni, quando le Olimpiadi si insedieranno proprio a Pechino. Certo, è quasi inevitabile che quegli stessi caratteri che arredano la tastiera del vostro computer tendano a formare parole prevalentemente inglesi, in quei paesi; ma è pur sempre vero che l'inglese è scritto con gli stessi segni con i quali componiamo le nostre missive: i caratteri dell'alfabeto latino.

"Latino" è parola che viene da "Latium", Lazio, e fa sorridere l'idea che il significato originario della parola sia "ampio, vasto". La pianura laziale è ben piccola cosa, rispetto ai pianori sterminati del pianeta nei quali l'alfabeto latino ha oggi diritto di cittadinanza: ma l'Italia è avara di pianure, e lo è in maniera particolare al suo centro: il settentrione è caratterizzato dalla Pianura Padana, e il mezzogiorno riesce, col Tavoliere delle Puglie, ad occupare la seconda posizione nella classifica delle pianure più estese della penisola; la pianura laziale non può competere con loro, ma è ed era vasta abbastanza da dare la sensazione di ampiezza d'orizzonte a quegli uomini abituati al continuo altalenarsi degli Appennini, al punto da insediare nel nome di quel luogo il richiamo agli ampi spazi. Seppure nata da regione piccola su scala planetaria, la lingua che i primi abitanti del Lazio parlavano e scrivevano ha avuto una carriera strepitosa, come mostrano le scritte in alfabeto latino che ritroviamo in ogni parte del mondo: eppure, agli inizi, per lei fu battaglia dura per la sopravvivenza. Appena a nord del Tevere, gli Etruschi parlavano una lingua (e scrivevano una scrittura) ben diversa. Appena a sud del Volturno, il greco era lingua colta e diffusa. Il latino veniva però scritto e parlato a Roma, che pure subì, nei suoi primi anni di vita, una forte influenza e anche una diretta dominazione etrusca; e sull'onda delle legioni romane il latino ha spiccato il volo verso ogni angolo del mondo.

L'onnipresenza dei caratteri latini è forse la più evidente eredità che Roma ha lasciato al mondo; ma è sufficiente scavare pochissimo, scalfire appena la superficie delle parole, per scoprire che sono davvero innumerevoli le tracce verbali che fanno esplicitamente riferimento all'Urbe. Quando scriviamo una formula sulla lavagna d'ardesia nera, forse non ricordiamo che il nome "lavagna" discende dalla cittadina ligure (Lavagna, provincia di Genova) che forniva la materia prima di quelle che proprio dal nome della città abbiamo imparato a chiamare "lavagne". E forse non è immediato riconoscere nello stato del Venezuela quella "piccola Venezia" che i primi occidentali riconobbero nelle lagune di Maracaibo. Di certo, è quasi impossibile tenere a mente tutti i nomi che discendono da nome "Roma". Restando nell'ambito meramente geografico, saltano agli occhi la Romagna, consorella dell'Emilia (che, per altro, prende il nome da un console romano) e la Romania; nell'arte si trova lo stile romanico, e gli esempi possono continuare per pagine intere. Ma, visto che inizialmente si considerava la natura della lingua latina, è più divertente notare come la contrapposizione tra Roma e Lazio abbia radici più antiche di quanto generalmente credano le tifoserie che periodicamente si fronteggiano all'Olimpico: i filologi raccontano di come si sia, nel Medioevo, creata ad un certo bel punto la distinzione tra il "latine loqui", ovvero il dotto e ortodosso "parlar latino" della cultura, e il "romanice loqui", cioè la parlata comune del popolo, del volgo dell'Impero Romano (che, non per caso, in Italia è nota come "volgare").

Quel "romanice" riconduce nuovamente a Roma, e nuovamente lo fa in contrapposizione al latino, quasi si fosse di nuovo ai primordi della storia dell'Urbe, con gli Orazi della tradizione romana contrapposti ai Curiazi, campioni di Alba Longa. Era guerra fratricida anche allora, a voler dare retta alle leggende, perché Romolo e Remo, fondatori di Roma, ad Alba Longa erano pur sempre nati. Il "romanice loqui" ha storia non meno illustre dell'aulico latino, visto che è il progenitore di tutte le lingue romanze. L'aggettivo "romanzo", seppur discendente diretto del nome della città eterna, arriva in Italia attraverso il francese medievale: come si può raccontare al popolo una bella e vecchia e storia, se il popolo indaffarato nei campi non ha ormai più la possibilità di capire il latino? Semplice: si prende una bella storia intrigante della tradizione, in latino, e la si riscrive nella lingua del popolo: per dirla alla francese, è insomma sufficiente "mettre en romanz", ed è così che comincia a far capolino anche il significato più comune della parola "romanzo".

Anche se i veri fruitori delle storie ricondotte in volgare non erano i contadini; di essi non ci si curava punto, almeno finché continuavano a lavorare nei campi senza protestare. I destinatari delle storie erano i nobili stessi, ormai anch'essi poveri di cultura classica, che non riuscivano più ad intendere la lingua colta. Per questo, ciò che veniva tradotto in volgare erano soprattutto storie accessibili, divertenti, narrazioni destinate alle piccole corti dei feudatari; storie d'amore e di battaglie, scelte apposta per divertire e rallegrare. Il nome passa poi dalle traduzioni latino-volgare anche ai nuovi componimenti scritti direttamente in lingua romanza, e la cesura tra il latino e il volgare si allarga; non più solo per la morfologia della lingua, ma anche peri i contenuti diversi che le due lingue veicolano. Le parole si moltiplicano, e il volgare predilige narrazioni inventate e dalla trama fitta, mentre la narrazione tipica del latino è sempre stata l'epica. La separazione resta e viene ribadita anche all'inizio del secolo, quando il Romanticismo si oppone, non a caso, al Neoclassicismo, rinnovando uno scontro le cui radici etimologiche si perdono nei meandri dell'Alto Medioevo.

Roma, romano, romanico, romantico, romanzo. La parola "romanzo" è ancor oggi viva e vegeta, anche se ha ulteriormente cambiato carattere e connotazione. Per un certo periodo, in lingua inglese "romanzo" era addirittura sinonimo di "gotico, surreale", mentre adesso, almeno in italiano, la sua iniziale connotazione d'attributo ha quasi del tutto lasciato spazio a quella di sostantivo: il romanzo è il libro che racconta una storia, lo strumento principe e di gran lunga maggioritario di tutta la narrativa. Perennemente dichiarato in crisi, continua a sopravvivere e a prosperare (anche sotto forme diverse; si pensi alla cinematografia: quanti sono, percentualmente, i film che non hanno struttura di romanzo?). Al punto che è tutt'altro che infrequente trovarselo come campione rappresentante dell'immaginario nei confronti del reale: "Ma questo che stai dicendo è vero o è falso? È cronaca o fantasia? È realtà o è romanzo?"

Il romanzo contrapposto alla realtà è la dicotomia più recente e più attuale; è in fondo curioso che si ponga nei termini esclusivi canonici delle contraddizioni assolute, al pari di bianco/nero, colpevole/innocente o giorno/notte. A ben vedere, il romanzo dovrebbe restare una forma narrativa autonoma, che può essere o no legata alla realtà, ma comunque tale da non essere vista necessariamente in contrapposizione esplicita con essa. Anche perché di fatto contrapposizione non c'è: basti ricordare la sola invenzione del "romanzo storico", con tutte le regole che lo governano, e che regolamentano le dosi precise di invenzione e realtà storica, a mostrare come il romanzo si possa innestare in un tessuto realistico e reale arricchendone (e non contraddicendone) il contenuto. Però il romanzo agisce direttamente sulle emozioni, le emozioni creano i miti, e il mito è, quasi per definizione, irreale. Accade allora che quando uno storico (peggio che mai se oltre che storico è anche scienziato) si lascia prendere la mano e dipinge con tratti troppo romanzeschi un personaggio realmente esistito, contribuisce alla mitizzazione del personaggio. E se il personaggio in questione è anch'esso uno scienziato, questa sorta di canonizzazione laica rischia di irritare altri storici, o altri scienziati.

"Gli scienziati non dovrebbero essere così innamorati di sé stessi".

Questa frase lapidaria è la brutale conclusione di un interessante articolo di Tony Rothman, cosmologo. Il pezzo, facilmente reperibile in rete, si intitola *"Genius and Biographers: The Fictionalization of Evariste Galois"*[1] nel quale l'autore sottopone a spietata critica il celebre capitolo *"Genius and Stupidity"* dell'ancor più celebre opera di E.T. Bell, "*Men of Mathematics"*[2]. L'articolo parte rammentando Freeman Dyson e

[1] http://godel.ph.utexas.edu/~tonyr/galois.html

[2] Esiste l'edizione italiana: "I Grandi Matematici", Sansoni.

la sua citazione entusiasta dell'articolo di E.T. Bell, osannato da Dyson come uno degli articoli migliori per accendere in un ragazzo l'entusiasmo nei confronti della scienza e della matematica in particolare. Da questo spunto, Rothman passa poi in rigorosa disamina quali e quante siano in realtà le libertà che Bell si è preso nella stesura del suo pezzo biografico su Galois, giungendo al punto di definire tutta l'impresa, come sancisce nel titolo della sua critica, niente più d'una "fictionalization". Ci sembra quasi d'aver chiuso un anello: "to fictionalize", verbo inglese, appare come una splendida traduzione del citato "mettre en romanz" francese, anche se le origini delle espressioni sono ragionevolmente diverse. L'italiano "romanzare" è traduzione accettata e riconosciuta, anche se in essa si perde (o forse si amplifica?) quell'assonanza perversa con la parola "fittizio" ("fictitious") che esplicita sia in inglese che in italiano il concetto di "non reale, immaginario", quando non esplicitamente "falso". La "fictionalization" della vita di Galois è insomma il renderla quale romanzo, storia appassionante ed emotiva, inoculando però il rischio della falsità storica. Non è certo la sua "falsificazione"[3], ma è inevitabile pensare ad inganni consumati o nascosti, leggendo un titolo del genere.

Il cosmologo (che supponiamo pertanto essere fisico) Rothman, che ha l'hobby della storia della scienza e ha scritto un intero libro sulle leggende scientifiche, se la prende insomma con Eric Temple Bell, fisico di inizio Novecento, che ha scritto la più celebre delle storie "dei matematici". Nel corso dell'articolo, Rothman fustiga ancor più violentemente il libro[4] su Galois scritto da Leopold Infeld, altro fisico, celebre soprattutto per essere stato uno dei più vicini collaboratori di Einstein. Sembra quasi una lotta in famiglia, combattuta tra fisici sul terreno della storia della matematica. Il punto essenziale è però che è virtualmente impossibile raccontare la vita di Evariste Galois senza trascendere nel più puro romanzo. Anche se è vero, come è indubitabilmente vero, che la vita di ogni essere umano è un autentico romanzo, non si può non riconoscere che alcune vite sono tali da sembrare ardite opere di fantasia uscite dalla penna di scrittori particolarmente visionari. Se Freeman Dyson da giovanetto si è esaltato grazie agli scritti di Bell su Galois, non è perché Bell abbia esagerato troppo l'aspetto romantico del matematico francese; come sostiene Rothman, è in fondo probabile che esagerazione vi sia davvero stata, ma il senso di romantica avventura non è frutto dell'iperbolica narrazione di Bell: è piuttosto da ricercarsi nella naturale predisposizione alla leggenda che ogni ragazzo conserva nell'udire una storia particolarmente affascinante. Prima di ripassare per sommi capi la breve vita di Evariste, è opportuno considerare come sia, nella stragrande maggioranza dei casi, la vita dei ricercatori, degli scienziati. La quasi totalità vive negli ambienti accademici, nelle università, e alterna ricerca e didattica secondo le regole che gli atenei si danno. Sorvolando su specificità nazionali (come l'improba italica difficoltà di mettere insieme il pranzo e la cena per i primi anni di carriera accademica), resta il fatto che la ricerca è intellettualmente dura, e, proprio perché "ricerca", non ha nessuna garanzia aprioristica di successo. Uno dei migliori aneddoti in merito riguarda la matematica statunitense Julia Robinson: al momento di decidere sulla sua assunzione, i dirigenti dell'Istituto le chiesero di lavorare una settimana registrando accuratamente le attività svolte, in modo che loro si potessero fare un'idea del suo valore di candidata. Il rapporto che la Robinson presentò a fine settimana è rimasto famoso. Recitava: "Lunedì: Provato a dimostrare teorema; Martedì: Provato a dimostrare teorema; Mercoledì: Provato a dimostrare teorema; Giovedì: Provato a dimostrare teorema; Venerdì: Teorema falso". E non è detto che le cose siano sempre così rosee… in fondo, la Robinson è matematica celebre, è riuscita a

[3] Anche perché Karl Popper si arrabbierebbe moltissimo, a veder trattata così la sua parola preferita.

[4] Leopold Infeld: *"Whom the Gods Love: The Story of Evariste Galois"*.

risolvere il Decimo Problema di Hilbert[5], ed è stata protagonista di una celebre diatriba per la priorità[6]. Non si tratta esattamente di un oscuro ricercatore della vastissima comunità scientifica, e il suo aneddoto, anche solo per il fatto d'essere diventato tale, non è più un buon esempio di monotonia scientifica.

Provate invece ad immaginare di essere esattamente quel che la Robinson non é, ovvero un oscuro ricercatore della comunità scientifica internazionale. Immaginate un lavoro normale, una vita normale, una ricerca normale. Che so, qualcosa di molto tecnico e specifico, magari bloccato da molto tempo per colpa di una serie che non vuol saperne di convergere, mentre se si decidesse a farlo potreste procedere di un piccolo passo avanti; magari contribuendo, in maniera forse non decisiva ma comunque positiva, ai progressi di un gruppetto di ricercatori internazionali. Immaginate di entrare tre volte alla settimana in un'aula con pochi studenti, perlopiù stanchi, talvolta annoiati, qualche volta da voi sorpresi mentre parlano con maggiore (e magari legittimo) entusiasmo della crisi di Vieri e dell'Inter o dell'ultima scemenza passata dal Grande Fratello alla tv. Immaginate anche di avere cinquant'anni, la certezza di non scoprire più nessun Grande Teorema, che era quello che volevate fare il giorno che vi siete iscritti all'Università. Immaginate di riconoscere nel sorriso d'una studentessa del terzo anno la stessa piega del labbro superiore che aveva la vostra fidanzata dei tempi del liceo (che per altro aveva un carattere insopportabile) e che siate colti da un veloce istante di nostalgia. Immaginate una vita normale, insomma. Anche la felicità di vedere facce contente che vi sorridono, o la soddisfazione nel vedere un improvviso lampo negli occhi di quello studente del secondo banco che ha capito dove va a parare quella derivata. E l'indubbio piacere di tornare a casa dai figli e dalla moglie, che due volte su tre arriva a casa più stanca di voi; o magari le piccole tensioni con il direttore d'Istituto che col cavolo che si rende conto di come siate costretti a lavorare, dannazione, per non parlare di quella dannata pizza di ieri sera che ancora non avete digerito, e adesso lo stomaco comincia a far male sul serio (ulcera maledetta). Vita normale, neanche brutta, probabilmente migliore di quella di un buon 90% dell'umanità, insomma. Ulcera compresa, anche se adesso bisogna proprio aprire la finestra, almeno un po', per lenire il mal di stomaco con un po' d'aria fresca sul viso.

Adesso, invece, cambiate vita.

Il male allo stomaco c'è ancora, ma è dato dalla palla d'una pistola che vi ha squarciato le budella. Il fresco sul viso è dato non dall'aria, ma dall'erba sulla quale siete caduti, erba bagnata di rugiada, potrebbe quasi essere poetica se non fosse che siete in agonia, che sapete, sapete bene che il male di stomaco passerà, ma solo dopo che avrete tirato le cuoia. Roba di minuti, comunque. Anni: immaginate di non averne più cinquanta, ma solo venti; la fidanzatina non la riconoscete nei meandri d'una memoria stanca e distratta, ma nelle immagini fresche, vivide e feroci quanto il sangue che continuate a versare per terra: amore d'un mese, ma un mese è tempo infinito a vent'anni, specie quando l'innamoramento è il primo, l'unico mai avuto, l'unico che avrete mai, perché state già per morire. E anche perché nonostante tutto

[5] "Quali sono le condizioni di risolvibilità delle equazioni diofantee?"

[6] Diatriba un po' diversa del solito, a dire il vero. Julia Robinson ha passato gran parte della sua vita a tentare di risolvere il decimo problema di Hilbert, riuscendoci quasi completamente. Quasi. Quando non era ormai più una giovanetta di belle speranze, entrò improvvisamente in scena un giovane matematico russo, Yuri Matiyasevich, che riuscì a mettere a posto l'ultima tessera del puzzle e a concludere la dimostrazione. È a questo punto che si scatenò la lotta per la priorità: Matiyasevich diceva che non aveva fatto granché, alla fin fine, e che quindi il merito della risoluzione dovesse andare comunque alla Robinson. Julia invece, che più d'ogni altra cosa al mondo voleva che la dimostrazione fosse completata, chiunque fosse a farlo, lottò accanitamente perché il merito della scoperta andasse a Matiyasevich, che ormai sentiva essere il suo "figlio" matematico.

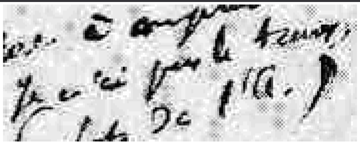
quell'amore è già finito per conto suo, scomparso, prima ancora della vita stessa che sta scomparendo adesso, e Stephanie non la vedrete più. E i volti intorno non sono quelli degli studenti o dei colleghi indaffarati, ma quelli dei vostri compagni, ribelli, rivoluzionari, come voi imprigionati, processati, come voi decisi a lottare col pugnale e con le pistole. Le stesse pistole che hanno anche le spie che vi sorvegliano, lo stesso pugnale da voi brandito con arroganza al banchetto, e promesso al cuore del re. Liberté-Egalité-Fraternité-Stephanie, erba e sangue in bocca e niente più tempo. "Non ho tempo, non ho tempo", scritto in fretta e in margine, come tutti i matematici che si rispettino. Perché non avete il tempo stantio bloccato da una serie che diverge all'infinito, ma un tempo irrisorio per il mare di conoscenze che solo voi possedete, solo voi al mondo, scritte di fretta poche ore fa, insieme alle lettere agli amici, alle spiegazioni, alle istruzioni su cosa fare nel caso vi foste davvero trovati qui, erba piena di rugiada in bocca e viscere ormai sporche di fango sul terreno, strada aperta per loro da una pallottola repubblicana.

Repubblicana? Forse. Forse repubblicana come voi, forse armata da complotto realista, chi lo sa. Stephanie è bionda e bella, conta qualcosa che sia leggiadra o laida, borghese o prostituta, se non v'è più dato di vedere i suoi occhi? Incontrata così, appena fuori dalla prigione, appena dopo il secondo processo, vent'anni e due processi, vent'anni e scuole incomprensibilmente chiuse, sbarrate, vietate per sempre. Memorie nuove e rivoluzionarie mai lette, perdute come quella di Abel, e forse perdute sempre dalle stesse mani, quelle di quel Cauchy che insegue il rigore e sé stesso, sé stesso e il rigore, ma soprattutto sé stesso… Lontano, adesso. Lontano quasi quanto lo è Stephanie, quanto lo è vostro padre ucciso per delle poesie, si può morire per dei versi? Lontano quanto la rabbia pericolosa e dannosa che riusciva forse ad allineare i gruppi e le loro teorie, e con loro le soluzioni di equazioni mai prima risolte, ma che era rabbia che pure esplodeva e dirompeva in furia illogica e sorda. Scritte, quelle pagine, di corsa e senza tempo, senza tempo, senza tempo, al punto che non ricordate neanche più se sono solo il riassunto d'una vita (ma quanto breve!) di studi, o nuove scoperte appena fatte, appena viste, vecchie quasi quanto quella ferita dalla quale esce la vita, partorite in una notte di travaglio subito prima che la genitrice muoia di parto, poche ore dopo, in un alba di Maggio a Parigi.

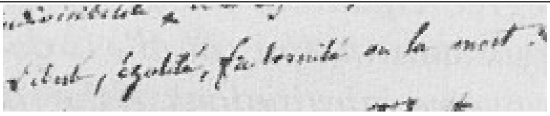
Fictionalization. Ma a che serve, con una storia del genere?

Evariste Galois muore il 31 Maggio 1832 all'ospedale Cochin di Parigi, dopo essere stato abbandonato morente nel luogo dove si era scontrato in duello. Poiché era nato a Bourg la Reine, non distante dalla capitale francese, il 25 Ottobre 1811, morì senza aver compiuto ventun anni. Figlio di bonapartista (il padre fu sindaco della città natale di Galois durante i Cento Giorni di Napoleone), Galois nasce e cresce in uno dei periodi più agitati e complessi della storia di Francia. Viene iscritto ad uno dei più famosi licei di Francia, il College Louis-Le-Grand, che aveva già ospitato Victor Hugo e Robespierre. Di carattere ribelle e tutt'altro che facile, Evariste mostra fin da giovanissimo di essere terreno fertile per le passioni violente e decise che caratterizzavano la Francia dei suoi tempi. Ribellioni e proteste all'interno del Liceo lo vedono prima spettatore interessato, poi partecipe in prima persona. Crescendo, diventa un noto simpatizzante repubblicano, attirandosi di conseguenza la sorveglianza speciale delle forze di polizia di Carlo X e di Luigi Filippo. I suoi risultati scolastici sono di difficile giudizio: i docenti alternano giudizi fortemente negativi (come ad esempio in retorica) ad appunti stupefatti per le profonde conoscenze matematiche dell'allievo. Dal punto di vista dei risultati, comunque, la carriera scolastica di Galois subisce più frustrazioni che successi, e culmina con il fallimento all'esame di ammissione della École Polytechnique. Forse anche perché i suoi progressi scolastici sono di difficile collocazione, Evariste si dedica soprattutto allo studio diretto delle opere dei grandi. Legendre, Abel, Jacobi: funzioni ellittiche, integrali abeliani. Scrive una memoria "Sulle condizioni per la solvibilità per radicali delle equazioni", che venne inizialmente persa e non servì a farlo riconoscere come matematico di classe. Mentre frequenta il Louis-le-Grand, nella sua città natale prende forza una calunnia che ha come destinatario suo padre, additato come l'autore di feroci versi satirici diretti verso persone di Bourg La Reine. Galois padre, persona integerrima che non sopporta tali sospetti, si uccide impiccandosi per la vergogna. Evariste frequenta sempre più spesso i circoli repubblicani, e nonostante la giovane età si distingue come uno dei più attivi. Durante un banchetto, mentre viene elevato un brindisi al nuovo re Luigi Filippo, anziché alzare il bicchiere grida "A Luigi Filippo!" alzando un pugnale. Viene processato, e assolto (in maniera abbastanza stupefacente, vista la debolissima difesa che addusse durante il processo). Una nuovo processo, per altre cause, lo porta in prigione insieme ad altri repubblicani. Nel mese che intercorre tra la liberazione e il duello fatale, Galois conosce e si innamora di una certa Stephanie, e a giudicare dagli scritti che di lui rimangono, se ne innamora con la passione integralista dei ventenni. Giunge infine ad una lite con altri repubblicani, che secondo la logica del tempo non può risolversi altrimenti che con un duello. Presentendo la morte, Galois passa la notte precedente il duello scrivendo lettere agli amici, ai parenti, e soprattutto redigendo il suo testamento scientifico. All'alba del giorno dopo, muore per una pallottola allo stomaco. Le sue carte rivelano che Galois aveva risolto uno dei problemi più ardui della matematica del tempo, quello della solvibilità delle equazioni per radicali, e per farlo aveva usato un approccio radicalmente nuovo: la Teoria dei Gruppi, di cui è riconosciuto padre fondatore.

Fictionalization. Non sembra essercene granché bisogno, se su questi brevi cenni biografici sono sostanzialmente d'accordo tutti. È un coacervo di eventi straordinari e di emotività, che istantaneamente appassiona e richiede ulteriori dettagli, ulteriori risposte per coprire le inevitabili domande che una biografia breve e tempestosa come questa lascia aperte. È terreno fertilissimo per la nascita del mito.


Je n'ai pas le temps...

A E.T. Bell viene rimproverato di aver eccessivamente romanzato la parte relativa al "genio incompreso" di Evariste Galois: il suo articolo fustiga severamente le istituzioni (il Louis-le-Grand, l'École Polytechnique) e i professori che, ciecamente, non riuscirono a riconoscere il genio travolgente di Evariste Galois, costringendolo ad una vita costellata di disillusioni scolastiche e, indirettamente, indirizzandolo verso altri interessi che lo avrebbero portato alla tragedia finale. Soprattutto, ad Eric Temple Bell viene mossa l'accusa di aver creato, senza alcuna reale base storica, la "leggenda dell'ultima notte", ventilando l'idea che l'intera produzione scientifica di Galois sia stata prodotta in una corsa affannosa contro il tempo ("Non ho tempo, non ho tempo", è frase celebre scritta a margine di alcune delle lettere che Galois scrive nella notte tra il 30 e il 31 Maggio 1832) integralmente in quella notte famigerata. Tutta la teoria dei Gruppi generata nell'ultima notte di vita d'un misconosciuto genio ventenne. Sembra davvero incredibile. Ma Bell è indubbiamente affascinato dall'idea del "genio incompreso": anche gli altri "peccati" che gli vengono contestati sono leggibili attraverso la stessa chiave di lettura. Stephanie è e resta misteriosa, colpevole soprattutto di aver distratto Evariste, e forse di averlo condotto al duello. L'altro duellante è individuato in Perscheux d'Herbinville, e merita ancora meno attenzione di Stephanie, nel racconto di Bell; sia l'una che l'altro sono parte di coloro che "non capiscono" il genio di Galois.



Liberté, Egalité, Fraternité ou la mort

Leopold Infeld è più creativo, e affascinato soprattutto dalla teoria del complotto. Visto che E.T. Bell ha già rimarcato la connotazione drammatica dello scienziato incompreso, Infeld esplora la possibilità che l'attività politica di Galois, le cause sconosciute che hanno portato al duello, il ruolo stesso di Stephanie meritino in realtà assai più attenzione di quanta gli abbia dedicato il capitolo di "Men of Mathematics". Si indaga allora sulla struttura della polizia segreta dell'epoca, si trovano documenti che dimostrano l'esistenza di molti "agenti segreti" infiltrati nei circoli repubblicani frequentati da Galois, si ipotizza che il ruolo politico di Evariste fosse tutt'altro che trascurabile. E Infeld arriva addirittura ad ipotizzare un complesso complotto ordito dai realisti per eliminare un troppo pericoloso avversario politico, quello scavezzacollo rabbioso che non esita a minacciare pubblicamente il re di Francia. Ecco allora la ragione della sua improvvisa liberazione, nonostante ci fossero gli estremi per mantenerlo in prigione: doveva essere ucciso, e senza che si creasse chiasso attorno al suo omicidio, cosa impossibile in una prigione. Ecco perché compare Stephanie: era un agente monarchico, o quanto meno una prezzolata, una prostituta che doveva adescarlo per dare poi adito all'ipotesi di un duello per cause passionali: in realtà, sono gli agenti segreti di Luigi Filippo che costruiscono l'inganno, lasciano che Stephanie seduca Evariste, infiltrano Perscheux d'Herbinville nei circoli repubblicani, inducono facilmente Galois ad uno scontro che si sa già perso in partenza. Non più la leggenda del genio incompreso, ma il thriller politico e spionistico.

Stephanie

Rothman sembra scandalizzato da queste ipotesi romanzesche, e si mette a caccia di nuovi elementi: ne trova a bizzeffe, e sostiene che siano sempre stati disponibili, solo colpevolmente "trascurati" dai biografi precedenti. Riconosce la genialità di Galois, ma tende a dimostrare che la celebre "ultima notte" non è stata eccezionale, perché in quelle lettere Evariste riepilogava risultati ottenuti, non li creava di getto. Rispolvera i giudizi dei professori del Louis-le-Grand, e assolve gli insegnanti; Galois non era un tipo facile da trattare, ma in fondo molti giudizi mostravano comprensione nei suoi confronti, e alcuni rivelavano di aver riconosciuto una specialissima predisposizione dell'allievo Galois per la matematica. Persino troppa, a volte, visto che imputavano all'eccesso di attenzione verso di essa la scarsa produttività nelle altre materie. Galois non era poi così perseguitato, se un giudice francese, a pochi anni di distanza dallo sferragliare della ghigliottina in Place de la Revolution, accetta di liberarlo nonostante una esplicita minaccia di regicidio; se, a ben vedere, era noto come brillante matematico e aveva persino vinto già qualche premio minore. E Stephanie non era la losca adescatrice così malamente dipinta, anzi… esistono delle lettere che Stephanie ha scritto a Galois: in quelle lettere, si scopre e si intende che mademoiselle Stephanie D. vuole interrompere una storia, una relazione; una storia pulita, però, non un adescamento perverso e complesso. Rothman scopre che quelle lettere sono state sottoposte ad indagini e analisi degne della polizia scientifica del ventunesimo secolo (lente d'ingrandimento e "opportuna illuminazione"), fino al punto di consentire a C.A. Infantozzi di scoprire il nome completo della misteriosa fiamma di Galois: Stephanie Dumotel. Indagini ulteriori la identificano infine in Stephanie Felicie Poterin du Motel, figlia di un autorevole medico di Sieur Faultrier, amena località dove Galois trascorse gli ultimi mesi della sua breve vita. E poi, sfogliando le carte di Raspail[7], i giornali di Lione, e molti altri documenti, Rothman arriva a concludere che non fu Perscheux d'Herbinville a sparare la mattina del 31 Maggio. Non fu un repubblicano infuriato, non fu un agente segreto monarchico, ma un buon amico di Galois, Ernest Duchatelet. Amico e compagno d'idee politiche, ma fatalmente innamorato anche lui di Stephanie. E Rothman, nemico della "fictionalization", arriva a concludere che i due amici, perdutamente innamorati della stessa ragazza, decisero di risolvere la cosa affrontandosi in duello. Ma un duello insolito: non come quello di Puskin, poeta e duellante, morto sotto i colpi spietati dell'amante della moglie; non un'epica battaglia con lame stridenti come quelli di Cyrano. Duchatelet e Galois sono amici, e decidono di caricare una sola delle due pistole scelte per lo scontro fatale, e di lasciare al caso la decisione su chi si ritroverà in mano un'arma scarica. Così, almeno uno dei due duellanti avrà la certezza di avere la vita salva e il corpo scevro di ferite, e uno solo cadrà.

È impossibile uccidere il mito.

A leggenda non può che sovrapporsi leggenda, e forse basterebbe riconoscere alla leggenda la stessa dignità, lo stesso contenuto di "realtà" che ha la storia. In fondo, ha senso parlare di non-esistenza di Babbo Natale? Cosa vuol dire, alla fin fine? Che non esiste in Lapponia un signore grassottello che manda avanti una fabbrica di giocattoli con elfi come maestranze e una dependance piena di renne volanti? D'accordo… ma che Babbo Natale, come idea, come entità, esista eccome lo vediamo ad ogni inverno. Come poter sostenere che non esista Topolino, come concionare se la reale esistenza di Achille e Ulisse contino davvero, al fine di quello che Ulisse e Achille rappresentano nella storia della cultura? Mostrate la locandina di "Gli uomini preferiscono le bionde" ad un gruppo di persone che non conoscono il mito di Marilyn Monroe, e chiedete di indicarvi quale, tra la Monroe e Jane Russell, sia la donna che ritengono più bella. Ci aspettiamo una distribuzione delle preferenze attorno a 50%-50%, ma quest'indagine non ha più senso in una cultura che ha ormai canonizzato Marilyn come icona assoluta di bellezza. Chiedete ad un campione non specialistico di intervistati quale sia il più grande matematico del Novecento, e vedrete trionfare con indiscutibile distacco Albert Einstein, che matematico non era, e che non nascondeva le sue personali dannazioni con l'algebra tensoriale. Chiedete a Rothman di demolire la fictionalization di Bell e di Infeld su Galois, e riuscirà a farlo solo dandovene un'altra, a tratti persino più intrigante delle precedenti.

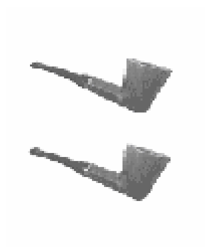
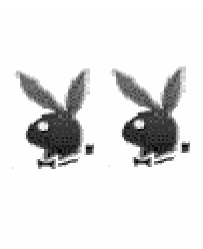
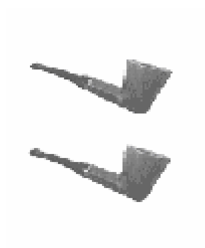
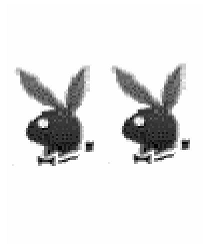
Genio incompreso, rivoluzionario, innamorato romantico ucciso da un amico stupito dal sentire il colpo di pistola al momento di premere il grilletto. Scegliete il vostro Galois, immaginate la vostra Stephanie come strega o come angelo; costruite le trame degne di un film di James Bond attorno ad un ventenne travolto dalla rivoluzione che ha sconvolto la Francia nel 1830; chiamate in causa Freud e lo sconvolgimento procurato in un diciottenne dalla scoperta di un padre impiccato. Fatene l'uso che più vi piace, perché come sempre, in fondo, la storia è sempre solo una ricostruzione, una via possibile, mai la verità. E come potrebbe esserlo? Provate a scrivere voi stessi la "verità vera" su quel che succede adesso, intorno a voi, e dite se siete davvero in grado di farlo. Figuriamoci quale sia la fatica dello storico, a scavare nelle tracce del tempo.

La classica versione di Bell ha comunque un merito: quella di aver affascinato Freeman Dyson, e di aver probabilmente contribuito a fare in modo che Freeman Dyson diventasse Freeman Dyson. Forse la versione di Rothman contribuirà nel futuro a creare un grande poeta, invece di uno scienziato. Quel che è piacevole, alla fine, è che, poeta o scienziato che sia, l'umanità avrà comunque di che congratularsi

[7] Sì, proprio quel Raspail del boulevard e della fermata del Metro a Parigi, zona Montparnasse.

con Evariste Galois, e con la sua capacità di generare leggende. Dal canto suo, la matematica continuerà silenziosamente a sviluppare e a far crescere la Teoria dei Gruppi, perpetuando nei secoli il nome e il cognome d'un ragazzo morto a vent'anni.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Organizziamo lo spennamento...			
Preparatevi per Halloween!			

2.1 Organizziamo lo spennamento...

Sembra incredibile, ma c'è ancora gente che *si fida* quando Rudy propone un qualche gioco d'azzardo, tant'è che il Nostro ha deciso di riaprire il *Casinó* di qualche tempo fa.

Siccome però invecchiando è diventato cauto e meditativo (lui sostiene anche piú onesto, ma non ci crediamo), sta cercando di pianificare tutto per bene.

Allora, il banchetto che ha deciso di aprire alle zeroezerozero del primo gennaio duemilaecinque questa volta ha le seguenti regole:

Gioca Rudy contro un singolo giocatore, una giocata al secondo del valore fisso di ***1*** Euro.

Con probabilitá ***0.499***, il giocatore vince (e Rudy gli paga ***1*** Euro, oltre a restituirgli quello giocato).

Con probabilitá ***0.501***, il giocatore perde (e paga ***1*** Euro a Rudy, oltre a restituirgli quello giocato).

Voglio sperare sia, se non onesto[8], almeno chiaro: niente patta, vantaggio dell'1 per mille al banco.

Come vi dicevo, cautela e meditazione: si parte con ***k*** Euro in cassa; infatti, le cose potrebbero anche andare male: con probabilità 0.499^k, potremmo perdere le prime ***k*** partite e ritrovarci senza soldi; oppure potremmo perderne ***k+3*** delle prime ***k+6*** e lo stesso ritrovarci in braghe di tela.

Come dicevamo, pianificare (e un minimo di ottimismo);

1. Qual'è il minimo valore di ***k*** per cui, con probabilità maggiore di $\frac{1}{2}$, non andremo mai in bancarotta?
2. Per la serie: la fortuna è cieca, ma la sfiga ci vede benissimo. Con il valore di ***k*** appena ottenuto, se proprio dobbiamo andare in bancarotta, quando succederà?

[8] In realtà lo è piú di molti giochi giocati correntemente ai Casinó.

2.2 Preparatevi per Halloween!

...che arrivano le pesti!

Allora, anche quest'anno Alberto, Fred e amici vari passeranno da casa vostra, quindi state pronti; hanno intenzione di impermalirsi di brutto, se non rispettate delle ben precise regole di divisione dei cioccolatini. Ve le anticipo, come me le hanno raccontate loro:

Alberto: "La parte del primo di noi più la metà di tutto quello che hanno preso gli altri è uguale alla parte del secondo di noi più un terzo di tutto quello che hanno preso gli altri che è uguale alla parte del...(ecc.ecc.ecc.)...che è uguale alla parte dell'***n-esimo*** di noi più la ***n+1-esima*** parte di tutto quello che hanno preso gli altri!"

Fred: "Alberto, che è a dieta *[sul serio! (RdA)]*, è quello che prende meno cioccolatini e ne prende..." (qui il Nostro mi ha detto il numero e l'ho capito benissimo, ma io non ve lo dico. Scherzetto!).

Io: "Ma in quanti siete?"

Alberto: "Non ti basta? Fred, come al solito, è quello che prende più cioccolatini e ne prende più di dieci volte quelli che ho preso io"

Problema: quanti sacchettini preparate, e quanti cioccolatini mettete in ogni sacchettino?

3. Bungee Jumpers

Per farci perdonare dal typo del mese scorso, un problema della stessa origine, ma molto più bello.

Gara Austro-Polacca di Matematica - Primo Giorno - Problema 9

Dato un triangolo equilatero ***ABC*** di lato ***a***, si scelga un punto ***P*** sul prolungamento della base ***AB*** dalla parte di ***A***.

Sia r_1 il raggio del cerchio ***inscritto*** nel triangolo ***PAC*** e r_2 il raggio del cerchio ***exscritto*** del triangolo ***PBC*** rispetto al lato ***BC***.

esprimere $(r_1 + r_2)$ come sola funzionedi ***a***.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

2004-09-01 16:32	PMP – [068] – 1	
2004-09-01 20:53	u_toki – [066] – 1	
2004-09-02 17:10	PMP – [068] – 1	
2004-09-03 17:29	Caronte – [068] – 1	
2004-09-03 15:41	GaS – [068] – 1	
2004-09-03 22:29	u_toki – [068] – 1	
2004-09-04 14:20	Loba – [068] – Q&D	
2004-09-04 22:25	Floyd – [068] – 1	
2004-09-04 23:27	Zar – [068] – 2	
2004-09-05 11:32	capm08 – [068] – Q&D	3 mail Q&D
2004-09-06 10:45	Enrico – [068] – 1, Q&D	
2004-09-06 21:27	u_toki – [068] – 1	

2004-09-07 14:52	PMP – [068] – 2
2004-09-08 02:10	Caronte – [068] – Q&D
2004-09-25 12:55	u_toki – [068] – 2

E di sicuro anche questa volta ne abbiamo persa qualcuna verso la fine, ma la Redazione potrebbe decidere di menzionare i ritardatari il mese prossimo.

Come si può vedere tutti hanno avuto molto da dire sul Q&D, un segno che tanti erano ancora in vacanza, se non con il corpo, almeno con la mente. Ma abbiamo ricevuto tanta corrispondenza su altri argomenti, tanto che ci è venuta voglia di creare una nuova rubrica per raccontarvi le proposte e le mail più curiose che riceviamo ogni mese. Purtroppo quando ci siamo incontrati al CdR abbiamo pensato più a mangiare e bere che a decidere come chiamare la rubrica e quando iniziare, ma preparatevi al peggio, forse già il prossimo mese.

4.1 [066]

4.1.1 PMP

A quanto pare su questo problema c'è ancora qualcosa da dire... ***u_toki***, per esempio, commenta la sua soluzione:

> (...) vorrei dire due cosette sulle osservazioni di Alberto in merito alla mia soluzione di PMP (...).
>
> Prima osservazione: semplificare la soluzione della prima parte. Già, è MOOLTO lunga la mia argomentazione. Dovrò valutare quanto lui dice, ma è una cosa che richiede tempo, quindi ci ritornerò (spero).
>
> Seconda osservazione: la mia terza parte è sbagliata.
>
> La critica è sul fatto che io ho presupposto che Orefici e Argentieri facessero le statuine per la soluzione salva-universo (...). Vado con ordine e spiego il mio ragionamento dell'epoca.
>
> Cito quanto detto nell'estensione dell'estensione: "I rappresentanti di entrambe le Corporazioni [...] sostengono che sono LORO a dover fare la maggior quantità di lavoro". Allora: di quale "lavoro" parliamo?
>
> Essendo un'"estensione dell'estensione", dovrei andare a vedere cosa dice la PRIMA estensione: questa parla semplicemente di "contare QUANTE sequenze ecc."; NON c'è alcun riferimento a creare fisicamente le statuine e quindi NON C'È LAVORO NÈ PER ARGENTIERI NÈ PER OREFICI. A questo punto la domanda nella seconda estensione va "interpretata". Io mi sono detto: in tutto il testo di PMP, l'unica parte in cui si parla di creare fisicamente le statuine è quella sulla successione senza le triple ripetizioni (e non ho quindi l'obbligo di non mettere due statuine del Sole affiancate come si die nella prima estensione). Quindi suppongo che Argentieri e Orefici discutono su chi deve fare più statuine nella successione-soluzione iniziale. Alla fin fine, visto come era strutturata la successione, la mia risposta è diventata banale (metà statuine per ciascuna Corporazione) e ho così pensato che la "vera" domanda fosse quella di capire che statuina fosse la k-esima. L'interpretazione di Alberto invece (almeno io la vedo così) è: se suppongo di fare tutte le successioni "senza accoppiate di statuine del Sole", chi lavorerebbe di più? Ma anche questa interpretazione prevede un "suppongo", così come la mia. Inoltre, mentre la mia interpretazione dà più valore alla seconda domanda, questa lo dà alla prima: infatti non vedo come si può rispondere a "chi deve fare la k-esima statuetta".

4.2 [068]

A parte una certa promisquità di mail a inizio mese, non sono poi arrivate molte soluzioni... se non dai soliti sospetti. Ma andiamo a vedere.

4.2.1 Ufficio Complicazione Giochi Semplici

Le soluzioni qui sono arrivate da ***PMP***, ***u_toki***, ***Caronte***, ***GaS***, ***Floyd*** ed ***Enrico***. Cominciamo da ***PMP***, laconico come sempre.

> per il determinante la cosa è relativamente semplice da dimostrare. Questo sistema non è elegante, ma fa lo stesso. Nel caso n=2, sappiamo che il determinante di una matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ è dato da ad-bc; se si sviluppano i sedici casi possibili di parità vediamo che ce ne sono sei che danno un risultato dispari (tre quando a, d sono entrambi dispari e b, c non entrambi dispari; tre quando b, c sono entrambi dispari e a, d non entrambi dispari) e dieci pari.
>
> Per induzione, prendiamo una matrice A di dimensione (n+1)(n+1) con $n \geq 2$ e calcoliamo il determinante come somma (algebrica, ma tanto lavoriamo su Z_2 e quindi possiamo fregarcene dei segni) dei minori presi sulla prima riga. Ora, se prendiamo A' identica ad A tranne per $a'_{11} = a_{11} + 1$, otterremo un determinante che differisce dal valore originale per il minore A_{11}. Ma visto che per ipotesi induttiva questo minore è più probabilmente pari, anche la differenza tra det(A) e det(A') è più probabilmente pari. Visto che esiste un valore di a'_{11} per cui A' non è invertibile e det(A') è zero, ne segue la nostra tesi.

Anche ***Caronte*** è stato altrettanto veloce questa volta:

> Esempi semplici, ma indicativi.
>
> 1.- Giocando a Pari e Dispari, decidendo però di considerare come risultato il prodotto dei due numeri giocati, chi scegliesse il dispari si comporterebbe da deficiente totale. Infatti:
>
> a) senza libero arbitrio, perderebbe 3 volte su 4;
>
> b) con libero arbitrio, perderebbe sempre!
>
> 2.- Giocando a pari e dispari col determinante di matrici n per n.
>
> Sottocaso matrici diagonali: Probabilità del dispari (½)^n.

Il Capo ha sentenziato che così come l'hanno risolto loro, il problema andava bene sì e no per un Q&D. Ma non ci scomponiamo ed andiamo a vedere la soluzione di ***GaS***.

> Giocando a pari e dispari l'importante è se il numero gettato da ognuno è pari o è dispari, giocare un 4 o uno 0 è perfettamente identico come è la stessa cosa giocare un 1 o un 5, si potrebbero cioè limitare le scelte esclusivamente a 0 e ad 1 senza cambiare la sostanza del gioco. Per questo motivo nel prosegue della soluzione ragioneremo esclusivamente in logica binaria, un numero pari sarà 0, uno dispari sarà semplicemente 1; inoltre 1+1=0 (dispari + dispari = pari). Per il gioco che ci interessa, quindi, consideriamo tutti i numeri in modulo 2 e cosi anche il determinante sarà uno dei due valori 0, 1.
>
> Consideriamo una generica matrice A di dimensione kxk e svolgiamo il determinante secondo la prima riga, come è noto un tale calcolo è composto dalla somma di k determinanti di matrici di dimensione (k-1)x(k-1), ognuno moltiplicato per l'opportuno elemento della prima riga. Denotiamo con P_{0i} la probabilità che il determinante di una matrice ixi sia 0, naturalmente la probabilità del determinante uguale ad 1 sarà (1- P_{0i}).

Supponiamo nota la probabilità $P_{0(k-1)}$ e andiamo a tirarci fuori qualche formula in maniera ricorsiva.

Come detto il determinante totale è la somma (in realtà ci sono somme alternate a sottrazioni ma, in logica binaria, la cosa è identica) di k elementi del tipo a*D con a generico elemento della prima riga e D determinante della matrice (k-1)x(k-1) ad esso associato, calcoliamoci la probabilità x che a*D sia 0:

$$x = \frac{1}{2}\left(1 + P_{0(k-1)}\right) \qquad \texttt{[004.001]}$$

e chiamiamo y=1-x la probabilità che a*D sia dispari (=1).

Abbiamo quindi k contributi binari la cui somma è il determinante cercato, ho 2^k possibili configurazioni (0+0+…+0+0; 0+0+…+0+1; 0+0+…+1+0;……; 1+1+….+1+1) e di queste quelle "buone"(la cui somma, cioè, è il determinante nullo) sono tutte e solo quelle con un numero pari di 1. Ma quante sono? Che probabilità ha ognuna di queste?

Ricordiamo intanto che ogni termine della sommatoria ha probabilità x di essere 0 ed y=1-x di essere 1, quindi una configurazione con n "0" e m "1" ha una probabilità di capitare pari a $(x^n)*(y^m)$. Dobbiamo ora sommare le probabilità di tutte le configurazioni "buone", cioè quelle con zero 1, quelle con due 1, quelle con quattro 1 ecc…. Cioè si ha:

$$P_{0k} = N_0 x^k + N_2 x^{k-2} y^2 + N_4 x^{k-4} y^4 + \ldots$$

Dove N_i è il numero di combinazioni con i cifre pari ad 1.

Ma quante sono? Quanto valgono i coefficienti N_i? Non è difficile rendersi conto che la k-esima riga del triangolo di Tartaglia (o come altro lo vogliamo chiamare, coefficiente binomiale, triangolo di Pascal o che so io) ci da, in ordine, N_0, N_1, N_2, …, N_k cioè quasi esattamente quello che cerchiamo (dimostrarlo non è difficile ma non vorrei incasinare ancora di più questo guazzabuglio di idee, se ne fosse bisogno sono disponibile a chiarimenti). Se fossimo interessati a tutti i contributi si avrebbe quindi uno sviluppo dato da $(x+y)^k$, in realtà siamo interessati solo a quelli con le potenze pari di y e quindi si ha:

$$P_{0k} = \left[(x+y)^k + (x-y)^k\right]/2 \qquad \texttt{[004.002]}$$

Dove la seconda parte serve ad annullare i contributi non voluti (provare per credere). Ricordiamo ora che x+y=1 e usando la `[001]` semplifichiamo la `[002]` come:

$$P_{0k} = \left[1 + (2x-1)^k\right]/2 = \left[1 + P_{0(k-1)}{}^k\right]/2 \qquad \texttt{[004.003]}$$

Che è la formula ricorsiva che cercavamo.

Necessitiamo ora solo delle condizioni iniziali, semplicemente poniamo P_{01}=½ (che corrisponde al normale pari e dispari). Ugualmente per la P_{1k} si ha:

$$P_{1k} = 1 - P_{0k} = \left[1 - P_{0(k-1)}{}^k\right]/2$$

E quindi si avrà sempre P_{0k}>P_{1k} per k>1, conviene quindi scegliere pari per vincere più facilmente.

Ad occhio pensavo che scegliendo pari fosse molto più facile vincere invece, gia per k>5, le probabilità si assestano quasi sul 50%. I primi valori dovrebbero essere:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
P_{0k}	0.5	0,625	0,62207	0,574873	0,531393	0,511258	0,504565	0,5021

k	9	10	11	12	13	14	15	16
P_{0k}	0,501014	0,500498	0,500247	0,500123	0,500061	0,500031	0,500015	0,500008

E quindi per matrici grosse non si hanno grossi squilibri, al limite per $k \to \infty$ le probabilità tendono ad ½.

Tempo fa avevo anche imparato a trasformare formule ricorsive in formule chiuse (quando questo fosse possibile), ora invece non saprei neanche per quali particolari configurazioni questo sia possibile, mi tocca quindi tenermi la scomodità della ricorsione a favore di una semplicità del ragionamento.

Ed ecco cosa pensa un nuovo iscritto, ***Floyd***:

Legenda: "*d*" = numero dispari;

"*p*" = numero pari;

"P(*x*)" = probabilità di *x*;

Enuncio ora tre semplici lemmi con lo scopo di rendere più agile la soluzione del problema. Mi correggo, i primi due non sono semplici, sono proprio stupidi.

I) Sommando due numeri interi la probabilità che il risultato sia pari o dispari è ½.

DIM: si hanno quattro casi possibili di cui due danno un risultato pari (p+p), (d+d) e due danno un risultato dispari (d+p), (p+d).

II) Sommando un numero qualsiasi di interi la probabilità che il risultato sia pari o dispari è ½.

DIM: per induzione utilizzando (I).

III) Data una matrice nxn, se in una colonna c'è almeno un elemento dispari allora è possibile sempre trasformare la matrice in un'altra avente lo stesso determinante ma con un solo elemento dispari nella colonna precedente.

DIM: si scelga una riga qualsiasi che contenga uno degli elementi dispari della colonna in questione e la si sommi a tutte le righe che contengono gli altri elementi dispari. Il determinante non cambia per una proprietà dei determinanti.

ES: Sommando la prima riga alla seconda e alla terza ottengo un solo numero dispari sulla prima colonna.

1	2	3
3	4	5
5	1	1

1	2	3
4	6	8
6	3	4

Cerco ora di calcolare la probabilità che il determinante di una matrice nxn sia dispari. Chiamo questo evento D.

Considero la prima colonna. Affinché il det sia dispari non può contenere tutti elementi pari per il teorema di Laplace. Chiamo questo evento E_1. La sua probabilità è $P(E_1)=1-(½)^n$. E_1 è condizione necessaria ma non sufficiente. Poiché è necessaria posso applicare il lemma (III) e far rimanere un solo elemento dispari (d_1) sulla prima colonna. Applicando il lemma (III), in pratica sommo una riga ad altre righe e per il lemma (II) non altero le probabilità degli elementi delle altre colonne che rimangono ($P(d)=P(p)=½$). Considero il complemento algebrico di d_1. Affinché si verifichi D questo complemento algebrico deve essere anche esso dispari. Chiamo questo evento C_1. Per il teorema di Laplace per il calcolo dei determinanti, posso concludere che affinché si verifichi D deve verificarsi sia E_1 che C_1, per cui $P(D)=P(E_1)*P(C_1)=(1-½^n)*P(C_1)$.

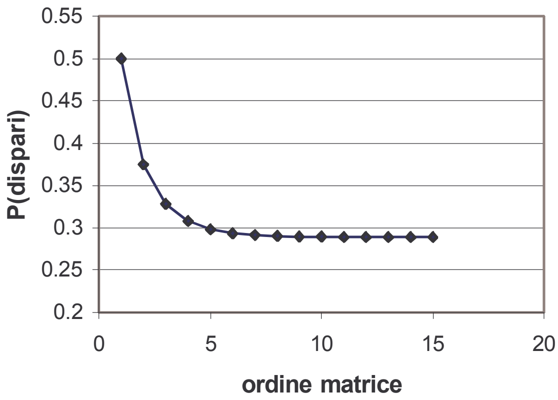
Per quanto riguarda $P(C_1)$ posso ripetere lo stesso procedimento. Infatti si tratta di calcolare la probabilità che il determinante di una matrice, questa volta (n-1)x(n-1), sia dispari. Considero quindi la prima colonna, applico il lemma (III) e così via… Dopo questa seconda iterazione, posso concludere che $P(D) = P(E_1)*P(E_2)*P(C_2) =$

$(1-½^n)*(1-½^{n-1})*P(C_2)$. Continuando in questo modo arrivo all'ultimo complemento algebrico che corrisponde ad un solo elemento, per cui $P(C_{n-1})= ½$.

Posso scrivere quindi la formula finale che è

$P(D)= (½)*(1-½^2)*(1-½^3)* …….(1-½^n)$.

Per rispondere alla domanda del problema concludo che è più facile ottenere un determinante pari. Infatti la probabilità che sia dispari è ½ moltiplicato per tutti numeri minori di 1. Quindi a parte il caso banale di una matrice 1x1 aumentando l'ordine diminuisce la probabilità di ottenere un determinante dispari.



Più precisamente si ha un andamento di questo tipo (grafico) in cui aumentando l'ordine della matrice la probabilità di ottenere un determinante dispari diminuisce fino a stabilizzarsi attorno a 2.89 per matrici più grandi di 10x10.

Ed infine ***Enrico***:

Quale è la probabilità che il determinante di una matrice di numeri interi sia pari?

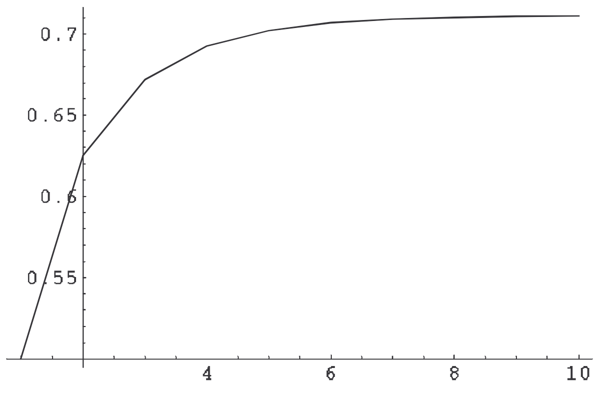
Comincio con il risultato, poi proverò a convincervi che è giusto.

Indicando P(n) la probabilità che il determinante di una matrice nxn di interi sia pari, ho trovato la seguente regola di ricorrenza:

$$P(1) = \frac{1}{2}$$

$$P(n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)P(n-1) + \frac{1}{2^n}$$

Riporto in figura il grafico fino al valore n=10, ed osservo che la ricorsione tende ad un valore costante di circa 0.7112.



Come ho trovato questo risultato?

Innanzi tutto considero per semplicità che la matrice sia costituita solo da 0 e 1. È facile convincersi che la parità del determinante non cambia se al posto di un numero pari metto 0 e al posto di un numero dispari metto 1.

Per calcolare il determinante, uso lo sviluppo secondo la prima linea.

Se la prima linea ha tutti 0, il determinante è pari (in particolare è 0). Questo avviene con probabilità $½^n$

Supponiamo ora che nella prima linea ci siano k uno (k>0 e k<=n). Questo avverrà con probabilità

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

Il determinante non cambia se ad una colonna sottraggo un'altra colonna, quindi mi riconduco sempre al caso che nella prima riga ci sia un solo 1. La probabilità che il determinante sia pari è uguale alla probabilità che l'unico minore (di ordine n-1) che contribuisce sia pari, e questo è semplicemente P(n-1). Per convincersi di questo fatto basta osservare che la somma di una costante e di variabili aleatori che assumono il valore 0 o 1, è pari con probabilità ½ indipendentemente dal valore della costante. Sommando su k, ottengo quindi

$$P(n)=\frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}P(n-1)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}(2^n-1)P(n-1)$$

che è la relazione iniziale.

Con immenso piacere notiamo che non vi vengono due risultati uguali, anche se i grafici sono piuttosto simili, se girati al contrario. In ogni caso nessuno di voi pensava di poter vincere ad uno dei giochi del Capo, vero?

4.2.2 Cenerentoliadi

Non molto qui, un pigro contributo di ***PMP***, ed un tentativo iniziale di ***u_toki***:

È abbastanza scontato che, se tutti prendono la stessa bevanda (tutti C o tutti T), sarà così ad ogni incontro (periodo 1).

Se nessun cenerentolionico è amico di qualcun altro, allora tutti continueranno a bere quanto bevuto la prima volta, indipendentemente da cosa bevono gli altri (periodo 1).

Supponiamo invece che ogni cenerentolionico sia amico di tutti gli altri. Abbiamo due possibili casi, a seconda che il numero N dei cenerentolionici sia dispari oppure pari.

N=2a+1 dispari

Una maggioranza beve quindi (per esempio) C. Se esattamente a+1 persone bevono C e le rimanenti a bevono T, si ha che:

- se Tizio beve C, le rimanenti 2a persone bevono metà C e metà T, quindi la prossimo volta Tizio continuerà a bere C;
- se Tizio beve T, allora a+1 persone devono C, a-1 T, quindi Tizio la prossima volta berrà C.

Se invece le persone che bevono C sono almeno a+2, allora la maggioranza degli amici di Tizio beve C, e così farà Tizio la settimana successiva.

In pratica, al prossimo incontro, tutti berranno C (periodo 1).

N=2a pari

Se bevono metà C e metà T, si ha che:

- se Tizio beve C, le rimanenti 2a-1 persone bevono in maggioranza T, quindi la prossimo volta Tizio berrà T;
- se Tizio beve T, allora le rimanenti 2a-1 persone bevono in maggioranza C, quindi la prossima volta Tizio berrà C.

Quindi ad ogni incontro successivo tutti cambiano bevanda (periodo 2).

Se invece le persone che bevono C sono almeno a+1, allora la maggioranza degli amici di Tizio beve C, e così farà Tizio la settimana successiva. Al prossimo incontro, tutti berranno C (periodo 1).

Possiamo supporre che, dati due qualunque cenerentolionici, questi o sono amici o esiste una catena di amicizie che permette di collegarli: per esempio, dati Tizio e Sempronio, o sono amici oppure possiamo trovare Caio _1, Caio _2, …, Caio _n tali che sono amici le coppie Tizio&Caio_1, Caio _1&Caio_2, …, Caio_n&Sempronio e la catena è costituita da n+1 amicizie.

Qualora non fosse così, infatti, il gruppo di tutti i partecipanti potrebbe essere suddiviso in 2 o più sottogruppi con la caratteristica detta sopra (ciò si vede bene rappresentando le amicizie tramite un grafo); il periodo complessivo sarebbe dato dal m.c.m. dei periodi dei singoli sottogruppi e, *qualora* questi ultimi fossero 1 o 2, anche il periodo complessivo sarebbe 1 o 2.

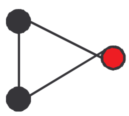
Quindi un inizio di idea di ***Zar***, che ci ha mandato anche qualche disegno:

Stavo pensando al problema delle Cerentoliadi, e sono ancora in alto mare. Non ho dimostrato che il periodo puo' essere solo 1 o 2, ma ho analizzato un po' di casi e ho dedotto ciò che allego nel presente

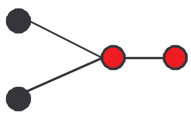
messaggio: una figurina fatta con openoffice (una presentazione .sxi, insomma, non ricordo come si chiama la parte di openoffice che fa le presentazioni), dove ho rappresentato alcuni casi fondamentali che si possono presentare nel problema. C'è il prototipo del periodo 1, ovvero una sola persona, senza amici, che beve the o caffè. Quello continuerà per sempre nella sua abitudine, e nulla gli farà cambiare idea.

Periodo 1

Periodo 2



Antiperiodo 1 – periodo 1



Antiperiodo 1 – periodo 2

Poi ho messo il prototipo del periodo due, ovvero due soli amici che bevono uno the, l'altro caffè. Ogni volta faranno i gentili e scambieranno la loro ordinazione, e la volta dopo tutto torna come prima.

Poi ho chiamato con "antiperiodo" una situazione che si può presentare durante la fase transitoria, prima che si stabilizzi il tutto. Se ci sono tre amici, due dei quali bevono caffè, il terzo the, la volta dopo tutti berranno caffè e non sarà più possibile tornare alla situazione precedente.

Nella quarta figura (non sto a spiegarla a parole, si capisce meglio guardandola) invece c'è un antiperiodo 1 che genera poi un periodo 2.

Bene, per ora non ci sono conclusioni, se non queste: al fine di dimostrare che il periodo può solo essere 1 o 2 si devono studiare le componenti connesse del grafo che collega i vari amici. Componenti sconnesse non si influenzano e quindi tanto vale studiare soltanto grafi connessi (se non ci sono amici, ognuno continua a bere quello che gli piace e il periodo è 1, da subito).

Una configurazione che permetta ai 1000 amici di evitare la monotonia per molto tempo deve essere una generalizzazione dell'ultimo tipo, ovvero una struttura ad albero binario con solo il primo ramo (quello che parte dalla radice), singolo. Tutti gli amici-nodi bevono una bevanda, tutti gli amici-foglie bevono l'altra bevanda. Se gli amici fossero 1024 sarebbe meglio, così si potrebbe costruire un albero binario completo. Invece con solo 1000 si fa poco, perché 512 di essi costruiscono un albero binario completo, gli altri non fanno nulla di utile.

Però 512 persone compongono un albero di 9 livelli, e l'antiperiodo si esaurisce in fretta, di certo molto prima dei 18 anni indicati dal quesito. Quindi, o il mio metodo non funziona tanto bene, o gli amici si annoiano in fretta.

Beh, chi sa proporci come fare? E datevi da fare, che siamo addirittura riusciti a convincere Rudy a fare una simulazione in 'Calc'!

5. Quick & Dirty

Si avvicina il Natale (e il calendario è in ritardo[9]...). Anche quest'anno non abbiamo ancora pensato ai regali, però abbiamo un mucchio di scatole per incartarli.

*In particolare, le scatole sono in tre formati: piccola, normale e grande; nel tentativo di fare un po' di ordine (Natale è vicino, ma non così vicino) abbiamo preso **11** scatole grandi e in alcune (non tutte) di queste abbiamo messo **8** scatole normali (otto normali per ogni grande); inoltre, in alcune (non tutte) di queste scatole normali abbiamo messo **8** scatole piccole (otto piccole per ogni normale).*

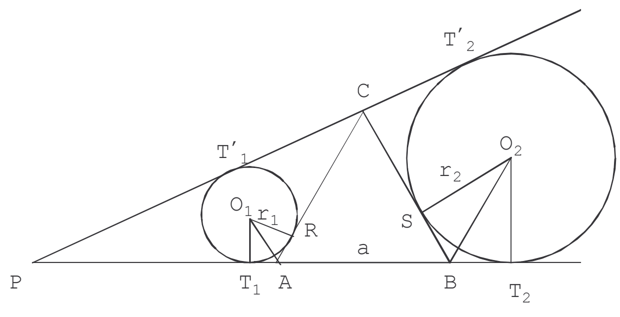
*Al momento, sul tavolo ci sono **102** scatole vuote.*

Quante scatole abbiamo usato?

Quanti di voi si sono ricordati che le scatole nelle scatole nelle scatole sono ***vuote***?

Mettendo ***8*** scatole in una scatola, il numero totale di scatole vuote aumenta di $8-1=7$ (ne riempite una che era vuota con otto che restano per il momento vuote); se ***x*** è il numero di volte che ***8*** scatole sono state messe in una scatola (indipendentemente dalle dimensioni) e se all'inizio avevamo ***11*** scatole, deve essere $11+7x=102$, e quindi ***x=13***; da cui sono state usate ***102+13=115*** scatole.

6. Pagina 46



Dalla figura, è immediato che $T_1\hat{O}_1R=60°$, in quanto supplementare a $T_1\hat{A}R=120°$ (essendo quest'ultimo angolo esterno di un triangolo equilatero). Quindi, $A\hat{O}_1R=30°$ e, con lo stesso metodo, $B\hat{O}_2S=30°$.

Dato che le tangenti ad un cerchio passanti per un medesimo punto esterno al cerchio sono uguali, si ha che deve essere:

$$\begin{aligned} T_1T_2 &= T_1A+AB+BT_2 \\ &= RA+AB+SB \\ &= r_1\tan 30°+a+r_2\tan 30° \\ &= \frac{r_1+r_2}{\sqrt{3}}+a \end{aligned} \qquad \texttt{[006.001]}$$

[9] Continua ad esserlo, anche questo mese.

e

$$\begin{aligned} T_1'T_2' &= T_1'C + CT_2' \\ &= CR + CS \\ &= (a - RA) + (a - SB) \\ &= 2a - \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}} \end{aligned} \qquad [006.002]$$

Dato che tangenti comuni a due cerchi sono uguali tra loro, si ha che è $T_1T_2 = T_1'T_2'$ e quindi:

$$\frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}} + a = 2a - \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}} \qquad [006.003]$$

il che implica $(r_1 + r_2) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 A che punto è la notte – [002] - Compieta

Questa è più noiosa, della puntata precedente; poca roba con cui giocare...

Beh, torniamo ai nostri aggeggi, ad esempio a D_3. Credo sia abbastanza chiaro che ammette due sottogruppi:

$$\begin{aligned} C_2 &= \{I, f\} \\ C_3 &= \{I, r, r^2\} \end{aligned} \qquad [007.001]$$

Supponiamo di prendere il primo gruppo e di moltiplicare (a sinistra) tutti i suoi elementi per tutti gli elementi del secondo gruppo (in modo ordinato); quello che otteniamo sono degli insiemi[10] che vanno sotto il nome di ***Classi Laterali*** (sinistre) con interessanti caratteristiche:

$$\begin{aligned} IC_2 &= \{I, f\} \\ rC_2 &= \{r, rf\} \\ r^2C_2 &= \{r^2, r^2f\} = \{r^2, fr\} \end{aligned} \qquad [007.002]$$

Si noti (no, non ve lo dimostro) che questi aggeggi non hanno elementi comuni tra loro; inoltre si vede che è:

$$\begin{aligned} D_3 &= C_2 \cup rC_2 \cup r^2C_2 \\ &= C_2 \cup C_2r \cup C_2r^2 \end{aligned}, \qquad [007.003]$$

dove le Classi Laterali Destre ve le calcolate da soli.

La cosa è strettamente imparentata con il ***Teorema di Lagrange***, il quale afferma che ***l'ordine di un gruppo è sempre un multiplo dell'ordine di un qualsiasi sottogruppo***; da cui, è immediato che se l'ordine di un gruppo è un primo, allora il gruppo non ha sottogruppi propri[11].

Giusto per fare un po' di allenamento, calcoliamo tutte le Classi Laterali (Destre e Sinistre) dei nostri sottogruppi:

C₂		***C₃***	
Classi Laterali Sinistre	Classi Laterali Destre	Classi Laterali Sinistre	Classi Laterali Destre
$\begin{aligned} IC_2 &= \{I, f\} \\ rC_2 &= \{r, rf\} \\ &= \{r, fr^2\} \\ r^2C_2 &= \{r^2, r^2f\} \\ &= \{r^2, fr\} \end{aligned}$	$\begin{aligned} C_2I &= \{I, f\} \\ C_2r &= \{r, fr\} \\ &= \{r, r^2f\} \\ C_2r^2 &= \{r^2, fr^2\} \\ &= \{r^2, rf\} \end{aligned}$	$\begin{aligned} IC_3 &= \{I, r, r^2\} \\ fC_3 &= \{f, fr, fr^2\} \end{aligned}$	$\begin{aligned} C_3I &= \{I, r, r^2\} \\ C_3f &= \{f, rf, r^2f\} \\ &= \{f, fr^2, fr\} \end{aligned}$

Ora, spero non siate abbastanza addormentati (abbiamo appena cominciato!) dal non accorgervi che ***le Classi Laterali di C₃ sono uguali tra loro***, mentre questo non succede per $\boldsymbol{C_2}$. Appunto per questa invarianza, il sottogruppo $\boldsymbol{C_3}$ viene detto ***Sottogruppo Invariante*** o ***Sottogruppo Normale***.

[10] Non gruppi: l'elemento identità sparisce, gisto per dirne una.

[11] Un po' meno immediato è il fatto che questo gruppo sia un Gruppo Ciclico

Ora non dovrebbe risultarvi particolarmente complesso calcolare le tavole di moltiplicazione tra le classi laterali, per quanto riguarda ***C₃***. Siccome so che non lo farete mai, comunque, ve le passo io. Le trovate qui nel seguito, probabilmente un po' in disordine. Se andate a riprendervi la tabella di moltiplicazione del gruppo diedrico ***D₃*** o, meglio ancora, il suo grafo di Cayley, vi accorgete che un bel po' di roba all'interno di queste tabelle è semplificabile; e infatti, anche quell'orrore che è la seconda tabella si trasforma in un molto più tranquillo ***fC₃***, mentre per la terza è abbastanza evidente (visto che i calcoli ve li ho già fatti io) che è uguale a ***C₃***.

C_3*C_3

	I	r	r^2
I	I	r	r^2
r	r	r^2	I
r^2	r^2	I	r

C_3*fC_3

	f	fr	fr^2
I	f	fr	fr^2
r	rf	rfr	rfr^2
r^2	r^2f	I	r^2fr^2

fC_3*fC_3

	f	fr	fr^2
f	I	r	r^2
fr	r	r^2	I
fr^2	r^2	I	r

Ora, se a qualcuno sta venendo in mente di fare una strana tabellina di moltiplicazione del tipo di quella qui di fianco, siete sulla strada giusta; infatti, è esattamente quello che succede[12].

	C_3	fC_3
C_3	C_3	fC_3
fC_3	fC_3	C_3

Adesso, però, cerchiamo di capire che cosa è successo. Siamo, in sostanza, partiti dal gruppo ***D₃*** e abbiamo costruito, con l'ultima tabellina, rispetto al Sottogruppo Normale, un'operazione che ci porta dagli elementi della Classe Laterale in elementi che sono gruppi loro stessi, anche se visti come singoli elementi; in sostanza, abbiamo costruito un ***Gruppo Ciclico di Ordine 2 in cui C₃ è l'elemento identità***. Questo gruppo, indicato nel caso specifico come D_3 / C_3, è detto ***Gruppo Quoziente*** o ***Gruppo Fattoriale***.

In generale, se descrivete un gruppo come unione delle Classi Laterali di un suo Sottogruppo Normale, allora le Classi Laterali formano un Gruppo Quoziente[13].

Insomma, un gruppo i cui elementi sono gruppi. E poi la gente si chiede perché Algebra l'ho dato per ultimo...

Proviamo a partire da un altro punto: ad esempio, da un paio di polinomi (in tre variabili):

$$\begin{aligned} d_3 &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \\ g_3 &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \end{aligned} \qquad \textbf{[007.004]}$$

Mi pare piuttosto chiaro che, nel primo caso, potete tranquillamente permutare tra di loro le variabili che il polinomio non cambia, mentre nel secondo caso potete avere qualche problema.

Infatti, nel primo caso in realtà avete una rappresentazione del nostro vecchio amico, il ***Gruppo Diedrico*** (e qui dovrebbe risultarvi ragionevolmente chiaro perché abbiamo parlato di trasposizioni) che, in questo particolare caso, prende il nome di ***Gruppo Simmetrico*** e viene indicato con ***S₃***.

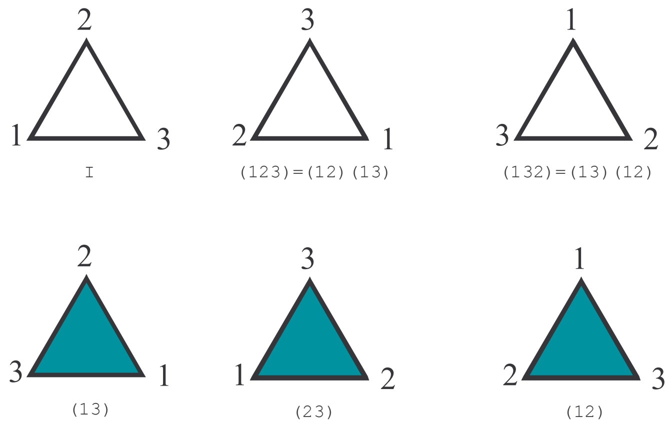
Nel secondo caso, invece, le cose si complicano; ci sono delle trasposizioni che *cambiano segno*.

[12] Il primo che dice che manca una tabellina pulisce la lavagna. Dopo aver calcolato la tabellina.

[13] Vi ho risparmoiato il passaggio attraverso gli omomorfismi. Potreste almeno ringraziare...

In questo secondo caso, se teniamo conto delle sole trasposizioni che non cambiano segno al polinomio, otteniamo (la cosa è ragionevolmente semplice da vedere) un gruppo, il cosiddetto ***Gruppo Alterno*** $\boldsymbol{A_3}$ che, evidentemente, è un sottogruppo di $\boldsymbol{S_3}$.

Sono il primo ad ammettere che la cosa sia poco chiara; fa comodo, a questo punto, usare di nuovo il nostro triangolino di carta (possibilmente con una faccia colorata di verde), piuttosto che calcolare ogni volta un polinomio; di seguito, dovreste trovare il disegno con rappresentati gli elementi e le permutazioni (scritte "all'americana") che li rappresentano.



Forse, in questo modo, la cosa è più chiara che con i polinomi; comunque è facile vedere che tutti e sei gli elementi non sono altro che il nostro ***Gruppo Simmetrico*** $\boldsymbol{S_3}$ e che quelli della prima riga rappresentano il nostro ***Sottogruppo Alterno*** $\boldsymbol{A_3}$ o delle cosiddette permutazioni pari.

Si possono notare alcune cose interessanti, a questo punto; tanto per cominciare, abbiamo trasformato le nostre notazioni in aggeggi che contengono solo due simboli nella parentesi; questo ci permette di visualizzare ogni trasposizione come un ribaltamento attorno ad un'altezza del triangolo; ***(1,2)*** significa che ***1*** va al posto di ***2*** e ***2*** va al posto di ***1***, ossia è come se ribaltassi attorno all'altezza passante per ***3***; inoltre, si vede facilmente che le permutazioni pari (il nostro gruppo alterno) sono formate da un numero ***pari*** di trasposizioni, mentre le dispari da un numero dispari.

Voglio sperare che, adesso, se vi servono un gruppo simmetrico e uno alterno di ordine $\boldsymbol{n}$ non abbiate problemi, a costruirli; e dovreste anche arrivare piuttosto velocemente ad accorgervi che $\boldsymbol{A_4}$ non è altro che il nostro amico, il Gruppo Tetraedrico.

Ora, voglio sperare che abbiate seguito il mio consiglio dell'altra volta e vi siate andati a riprendere i numeri 45 e 46 di una rivista di Matematica che sicuramente conoscete e che vi siate divertiti a costruire solidi platonici, perché adesso servono; la cosa si potrebbe anche affrontare dal punto di vista delle permutazioni, ma vi abbiamo già detto che quelle ci sono antipatiche; quindi, preferiamo passare dai solidi.

Per prima cosa, mettiamone via qualcuno; quelli che ci interessano sono il ***tetraedro***, il ***cubo***[14] e l'***icosaedro***; l'ottaedro e il dodecaedro non li consideriamo in quanto sono *duali* rispettivamente del cubo e dell'icosaedro: se mettete un vertice al centro di ogni faccia ottenete l'altra figura e, se provate con il tetraedro, ottenete un altro tetraedro (che è quindi il duale di sè stesso).

Bene, adesso si tratterebbe di catalogare le varie rotazioni di questi aggeggi e, possibilmente, di correlarle con le permutazioni viste sopra, esattamente come abbiamo fatto per il triangolo in cui ogni rotazione rispetto ad una certa altezza è stata associata ad una permutazione di oggetti: coraggio che (almeno le prime due) sono più facili di quanto sembri.

Abbiamo infatti già visto che il gruppo di simmetria del ***tetraedro*** non è altro che il Gruppo Alterno $\boldsymbol{A_4}$, ossia le permutazioni ***pari*** di quattro oggetti; una bella domanda è

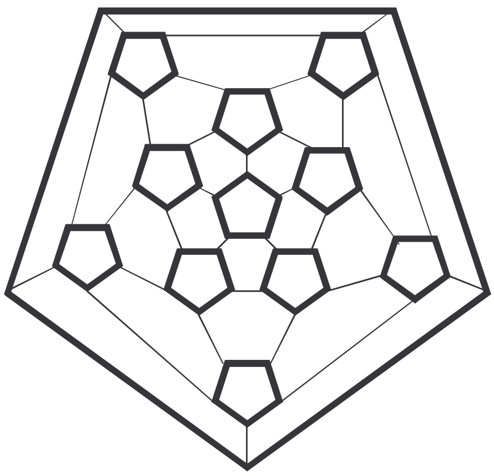
[14] Che, vi ricordiamo, *non* abbiamo spiegato come costruirlo... Abbiamo trovato un modo, ma estermamente insoddisfacente.

"Quali sono i quattro oggetti, qui?". In questo caso è abbastanza facile in quanto si tratta dei quattro vertici del tetraedro, che si scambiano di posto tra di loro. Se provate con il ***cubo***, vi accorgete che il gruppo di simmetria questa volta è S_4, ossia ***tutte*** le permutazioni di quattro oggetti; il fatto che non siano solo le permutazioni pari, qui, fa sì che si debba considerare qualcosa di diverso rispetto ai semplici vertici; i quattro oggetti che permutiamo sono, in questo caso, le diagonali che uniscono due vertici opposti.

A questo punto, non dovrebbe essere un problema fare il conto per l'icosaedro; il suo gruppo di simmetria è A_5, ossia le permutazioni ***pari*** di cinque elementi; qui, vedere i cinque elementi è decisamente complicato, in quanto se contate le diagonali ne ottenete sei; gli oggetti da considerare sono i tre rettangoli che si incrociano a 90° e che definiscono, con i loro vertici, i vertici dell'icosaedro[15]; ecco, sono questi gli aggeggi che permutano. Quindi, possiamo dire che A_4 ha $\frac{4!}{2} = 6$ elementi, S_4 ha $4! = 12$ elementi e A_5 ha $\frac{5!}{2} = 60$ elementi.

Siccome fin qui avete capito tutto, adesso disegnate i diagrammi di Cayley per tutti quanti.

Coraggio, che la cosa è più semplice di quanto sembri; se fate un po' di prove con il tetraedro (in realtà dovreste già averle fatte il mese scorso) vi accorgete che il diagramma non è altro che un tetraedro al quale siano stati tagliati i vertici; la cosa funziona anche con gli altri, e quindi non dovreste avere problemi.



O meglio, i problemi diventano di un altro tipo... conoscete la mia inettitudine al disegno, vero? Allora, non lamentatevi che è venuto male. Quello che vedete qui da qualche parte è il diagramma di Caley per l'icosaedro. Fortunatamente viviamo in un mondo meramente tridimensionale, quindi abbiamo finito. Tutti i pentagoni in grassetto hanno i lati orientati nello stesso senso tranne quello grande esterno che va al contrario.

Anche in questo caso il diagramma è ottenibile per troncamento; prendete l'icosaedro, tagliate tutti i vertici ricavando dei pentagoni e trasformando quindi le facce triangolari in esagoni. Se fate un lavoro "regolare", nel senso di ottenere esagoni e pentagoni regolari, il solido che ottenete è la struttura del fullerene[16]; esiste il modo per costruirlo con l'origami, ma è lunghissimo e il risultato finale scarsamente soddisfacente; qui, molto meglio utilizzare quelle perfide barrette magnetiche del *GeoMag*[17].

Bene, torniamo al gruppo? Ha alcune interessanti caratteristiche.

Tanto per cominciare, anche se sembra complicato, ha solo due generatori, e le ***relazioni di definizione*** sono:

---

[15] Problemino (facile): dimostrate che questi rettangoli sono aurei.

[16] Questa rivista è letta da più chimici che giocatori di calcio, quindi trascuriamo l'esempio classico che si fa in questi casi.

[17] Gentilmente prestato da Alberto e Fred

$$r^5 = f^2 = (rf)^3 = I \ . \qquad [007.005]$$

Certo che, come gruppo, è un po' voluminoso... non si potrebbe lavorare con dei sottogruppi? Beh, si, ne ha un mucchio, ma *nessuno è un sottogruppo normale*; quindi, è un gruppo ***semplice***[18]. Mai termine fu più fuori posto, almeno secondo noi.

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

[18] La cosa è piuttosto noiosa da dimostrare, ma vi diamo almeno una traccia: si dimostra che qualunque rappresentazione omomorfa ***g*** del gruppo per cui sia ***g(r)=I*** implica che tutto il gruppo sia mappato su ***I***, e la stessa cosa capita per ***f***; inlotre, per ogni ***x*** diverso da ***I***, ***g(x)=I*** implica ***g(r)=I*** oppure ***g(f)=I***.