Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 068 – Settembre 2004- Anno Sesto

1. Pellegrinaggio a Thule

Su la tua pietra, o fratel mio, gemendo
Il fior de' tuoi gentili anni caduto[1]

Eppure è sempre lo stesso fiume.

Lo stesso Ticino che attraverso due volte al giorno, ormai da due anni. Il ponte della Torino-Milano lo attraversa quasi esattamente al chilometro numero cento, a quattro quinti del totale: dopo il Ticino, restano solo gli ultimi venticinque chilometri di Lombardia, quelli che scorrono veloci con le uscite di Boffalora, Arluno, Rho; poi arriva il casello della Ghisolfa e finalmente Milano Viale Certosa. E il Ticino è familiare, perché è un vecchio confine tra Stati che ha la sua funzione ridimensionata: ora è solo confine regionale, ma separa ancora con un taglio ben netto il Piemonte dalla Lombardia. È un confine di pianura: adesso, in piena estate,

[1] Ugo Foscolo; "In morte del fratello Giovanni".

il ponte autostradale si riconosce prima con le orecchie, per i salti che fanno le ruote sulle cesure tra le campate; solo più tardi con gli occhi, perché le larghe e vaste isole di ghiaia che affiorano dal fiume pigro e lento in questa stagione sono verdi, colonizzate da erba e piante. Centinaia di isole minime e variabili, pronte a sparire alla prima piena figlia di temporale. Il ponte, a campate non alte e non lunghe, sembra sorvolare un guado: acqua bassa e di non difficile attraversamento. Con Novara dietro le spalle e i nomi di paesi dei dintorni che, come Magenta, risuonano ancora nei sussidiari elementari col sapore di Risorgimento, è quasi inevitabile guardare l'incombente riva lombarda del fiume e ritrovarsi ad immaginare i manzoniani protagonisti del giuramento sacramentato in "Marzo 1821": *"Soffermati sull'arida sponda – vòlti i guardi al varcato Ticino"*.

Il Ticino che sto attraversando adesso è invece tutto un altro fiume: compatto, sponde alte viste ancor da più in alto, perché questa autostrada è già quasi strada di montagna, piena di viadotti e gallerie. Non mi trovo troppi chilometri più a monte, ma il fiume che vedo adesso è appena uscito dal lago, ha appena cominciato a farsi carico di portare a valle i miliardi di litri d'acqua del lago Maggiore, e svolge il suo ruolo di emissario con impegno. Ha il vero aspetto di fiume alpino: è facile immaginarsi il suo letto adagiato su una pendenza ancora rilevante, che fa muovere veloci le acque che di solito vedo lentissime e pigre. Vergiate, Golasecca, e il fiume è già pienamente riconoscibile come uno dei quattro fiumi che nascono tutti nella stessa piccola zona delle Alpi Svizzere, per poi dirigersi imprevedibilmente in quattro mari diversi. Non distanti dal Gottardo, tra il Pizzo Gallina e il Furka Pass, le sorgenti del Ticino si trovano quasi nello stesso punto di quelle del Rodano: ma il Ticino è fiume cisalpino, scende nel Po e arriva in Adriatico, mentre il Rodano rimane transalpino, e va a creare la Camargue oltre la Costa Azzura e la Provenza. Questi due sono i fiumi meridionali, ma dalla stessa terrazza montagnosa discendono l'Aar e la Reuss, che sono la prima linfa vitale del Reno, fiume d'Europa che divide Francia e Germania, per poi morire a Rotterdam, nel più grande porto del continente. Un punto triplo degli spartiacque, e sarebbe divertente lanciare piccoli pezzi di legno prima in una sorgente e poi nelle altre, per toccare virtualmente mari diversi e così distanti fra loro per mezzo dello stesso ramoscello; e basterebbero pochi chilometri in più per raggiungere le sorgenti dell'Inn, e attraverso di lui toccare anche il Danubio e il Mar Nero. Ma le divagazioni idrografiche sono interrotte dai monti, perché il panorama e il Ticino scompaiono sotto una galleria; l'autostrada continua a correre anche dentro la roccia, fino ad innestarsi ad una consorella. Dovendo scegliere tra Arona e Alessandria, io piego a destra, decisamente verso Nord; la stessa direzione presa a suo tempo da Pitea di Marsiglia.

"Pitea di Marsiglia? Chi era costui?"

Deve essere colpa dell'aria dei laghi alpini di queste parti, se certe domande saltano fuori come fiorellini di bosco in primavera. Non più famoso di quel Carneade che angustiava don Abbondio, Pitea di Marsiglia fu antico navigatore ed esploratore. Con buona pace d'Eracle e delle sue colonne[2], portò la sua nave oltre lo stretto di Gibilterra e cominciò ad esplorare il mare gelido del Nord. Le sue esperienze sono narrate in un'opera che si intitola "Dell'Oceano", dove per la prima volta si svelano ai provinciali marinai mediterranei cosa giaccia verso Settentrione[3]. Forse dal greco

[2] Che, peraltro, sono già loro un bel mistero: la posizione di quelle celeberrime occidentali è ancora discussa, anche se lo Stretto di Gibilterra ormai le detiene quantomeno per usucapione; ma è sorprendente scoprire che si suppone l'esistenza anche delle Colonne d'Ercole orientali, posizionate sui Dardanelli o sul Bosforo, e comunque non troppo distanti da Troia.

[3] "Settentrione" è parola bella, per una rivista di matematica, perché generata dal numero sette. Non è un caso enigmistico, che "sette" sia incluso nella parola: l'etimologia di "settentrione" narra che la parola nasce

"tele", che significa lontano; o forse da "tholos", che indica la foschia; forse invece dalla parola celtica che riferisce al nord, "tholos"; o addirittura dal nome d'un mitico re Thulus: sia come sia, Pitea è il primo ad utilizzare il termine "Thule", per indicare l'estremo limite delle Terre del Nord. Quanto racconta Pitea viene ripreso da Plinio, che descrive Thule come "terra senza notti durante l'estate e senza giorni durante l'inverno", e rinnova il mito dell'estremo limite settentrionale.

È curioso come siano proprio le esplorazioni, che per definizione sono ricerche e passi verso la conoscenza, ad alimentare miti e leggende. L'Atlantico è un oceano verticale, chiuso ad Est dall'Europa e dall'Africa, mentre ad Ovest è limitato dalle due masse continentali americane: questa sua geometria ha generato leggendarie storie sulle quattro possibili vie d'uscita: procedendo le esplorazioni da Est verso Ovest, i passaggi "ad Est" sono soffusi da un aura minore di mistero. Eppure, già il più facile "passaggio a Sud-Est", quello che passa per il Capo di Buona Speranza, ha un sapore misterioso e affascinante. C'è chi avanza l'ipotesi che già i Fenici, i marinai figli di Cartagine, avessero raggiunto il limite meridionale del continente e circumnavigato l'Africa; è teoria difficile da comprovare, soprattutto a causa delle correnti che, lungo le coste occidentali dell'Africa, hanno una decisa direzione Sud-Nord. È difficile immaginarsi i contemporanei di Annibale abbandonare il sicuro cabotaggio e allontanarsi dalle coste del continente, per scoprire il trucco scoperto secoli più tardi dai Portoghesi: anziché costeggiare in direzione meridionale, i mastri lusitani avevano scoperto che era meglio avventurarsi in mare aperto in direzione Sud-Ovest, e poi, ad un certo punto, fare una bella conversione di novanta o più gradi per dirigersi verso Sud-Est. Si allungava un bel po', ma si avevano sempre correnti e venti a favore. E poteva così capitare quel che capitò a Cabral nel 1500, che avendo esagerato un po' troppo nella sua manovra verso Ovest, andò a sbattere in una nuova terra occidentale, che non tardò a divenire una colonia portoghese. Era un ottimo punto intermedio verso il passaggio a Sud-Est, e come tale venne sfruttato all'inizio: ma poi quella terra ricca e bellissima assunse dignità maggiore di quella di mera stazione di passaggio. Era caratterizzata da bella vegetazione e da un insolito legno rosso, il "braseu", che finì per dare il nome a tutta la regione: e ancora adesso in Brasile parlano portoghese.

Il passaggio a Sud-Ovest è servito a Magellano per compiere la prima circumnavigazione del globo, e a Marlon Brando per interpretare il buon ufficiale Fletcher Christian che scopre la crudeltà di William Bligh, comandante del Bounty, fino al punto di porsi a capo del più famoso ammutinamento della storia. Il passaggio a Nord-Est era invece bloccato quasi perennemente dai ghiacci e poco ambito, perché in fondo si intuiva che, anche esistendo, non avrebbe potuto portare altrove che verso le coste aride, fredde e secche della Siberia. A Nord-Ovest, invece, trovare un passaggio era vitale, soprattutto per Inglesi e Francesi che dominavano l'Atlantico settentrionale e avevano invece molte miglia e molti vascelli spagnoli e portoghesi da affrontare, se volevano superare l'America passando per lo Stretto di Magellano a sud: e mentre le migliaia di isole tra Terranova, Baffin e le coste del Canada sembravano frammentarsi apposta per confondere i marinai, il "Passaggio a Nord-Ovest" e la sua disperata ricerca diventavano una leggenda per l'immaginario di tutta l'umanità.

Pitea di Marsiglia naviga però quasi duemila anni prima di Magellano, e cerca nuove terre a Nord, non passaggi tra un oceano e l'altro, e non si sa con certezza quale fosse la Thule da lui narrata; forse l'Islanda, solitaria isola che per noi è ancora Europa. È facile immaginarsi che sia stato fermato dal freddo e dalla scarsezza di luce, se non dalla paura: perché viaggiare verso Nord, sempre verso Nord, continuamente verso

da "Septem Triones", ovvero i "Sette Buoi", con ovvio riferimento alle sette stelle dell'Orsa Maggiore, che danzano da millenni attorno al Polo Nord Celeste.

Nord, è cosa ben diversa che dirigersi perennemente verso Oriente o verso Occidente. Cambia il clima, durante il percorso; c'è un costante gradiente negativo di temperatura con il quale fare i conti: le giornate cambiano durata con la latitudine, e il senso di "ambiente straniero" si rafforza di giorno in giorno, e non necessariamente va di pari passo con il "piacevolmente esotico". È proprio la geometria terrestre, la geometria d'una sfera in rotazione, a definire una differenza fondamentale tra la direzione Nord-Sud e quella Est Ovest, anche volendo tralasciare le reali difficoltà climatiche. Due viaggiatori che decidano di andare uno verso Est e uno verso Ovest, magari percorrendo con esattezza la linea immaginaria dell'Equatore, finiranno con l'incrociarsi, stringersi la mano, proseguire il cammino e incrociarsi ancora e ancora, senza con questo venir meno al loro impegno di procedere sempre nella direzione inizialmente prescelta. Due altri esploratori che decidessero di solcare un meridiano non avrebbero invece la stessa fortuna, perché non si può andare indefinitamente verso Nord o verso Sud: ad un certo punto il viaggiatore raggiungerà il polo, e sarà costretto a cambiare direzione, se vuole continuare il cammino. Al Polo Nord non esiste altro Nord da raggiungere, perché il viaggio è finito, e con il viaggio sono spariti tutti i punti cardinali della Rosa dei Venti. Il passo successivo dell'esploratore, qualunque passo esso decida di fare, non potrà essere ancora diretto verso Nord, ma neppure verso Est o verso Ovest: sarà invece un passo ineluttabilmente diretto a Sud.

E allora il limite Nord esiste davvero: forse non può esistere la "fine dell'Est" o l' "Ultimo Occidente", perché è solo una convenzione quella che ci fa chiamare "Estremo Oriente" il Giappone: anche i Californiani lo chiamano così, ma i loro piloti di linea puntano il muso dei Boeing ad Ovest senza un solo attimo di esitazione, quando sono diretti a Tokyo. Ha invece senso parlare di "fine della Terra del Nord", perché il Nord può davvero finire. Ed è inevitabile che alla Thule di Pitea si accoppi indissolubilmente l'aggettivo "ultima", a sottolineare la definitiva ineluttabilità della "fine", del "termine ultimo". "Ultima" è l'aggettivo indissolubile per il nome Thule; "ultima", scritto e pronunciato in latino anche per gli anglofoni, perché anche a loro la parola suona forse più definitiva di "last". E Thule si aggancia allora alla terra Iperborea, e diventa "l'Ultima Thule[4]". Poi sarà la leggenda e la magia della narrazione a trasformare un nome di luogo geografico in un nome di luogo dell'anima: l'Ultima Thule diventa presto un luogo immaginario, e poi perde addirittura la connotazione di luogo vero e proprio. È il nome dato al "limite estremo", al "non-plus-ultra", nel senso anche e soprattutto di limite naturale e soprannaturale delle umane capacità.

Oscillante in questa sua duplice accezione, è difficile immaginare un punto in comune, un'idea, un uomo che in qualche modo riunisca sotto il suo nome entrambe le caratteristiche thuliane: da una parte la Thule che coincide semplicemente con il Polo Nord, punto caratteristico e specialissimo d'una geografia e geometria sferica; dall'altra la Thule che richiama il sogno irraggiungibile quasi per definizione, la meta ambita, desiderata fortissimamente e quasi ineluttabilmente impossibile. Eppure, a ben vedere, un tale uomo esiste. Anzi, è esistito.

Su un'automobile comoda e su asfalto liscio e nuovo, è pura presunzione paragonarsi a Pitea o ai navigatori che cercavano il Passaggio a Nord-Ovest. Eppure vado anch'io verso un Nord, per quanto si tratti di un Nord non certo remoto né tanto meno impossibile a raggiungersi; non ho Islande misteriose o ghiacciate Scandinavie alle spalle. Più modestamente, accendo l'aria condizionata per combattere i trenta gradi dell'aria esterna, seguo con attenzione la segnaletica verde dell'autostrada, e riconosco in tempo l'uscita di Feriolo. È qui che devo lasciare le veloci quattro corsie

[4] "Ultima Thule" sembra comparire per la prima volta nelle Georgiche di Virgilio.

e infilarmi in una statale stretta e frequentata, che risale la costa del Lago Maggiore. A Nord, comunque. Anche io, ancora per un po', non troppo, ormai; ma pur sempre a Nord.

Thule ha esercitato anche un fascino aspro e crudele. La "Società di Thule" (Thule-Gesellschaft) nasce nel 1919, e viene da rammaricarsi che non sia deceduta subito dopo la sua creazione. Fu fondata da Rudolf von Sebottendorff, ed era associazione dai forti connotati esoterici. Purtroppo, però, l'esoterismo non era certo il peggiore dei suoi difetti: affiliata al Germanorder, la Thule-Gesellschaft inizia subito, appena terminata la Grande Guerra, ad accentrare i fanatici dell'estrema destra razzista e nazionalista tedesca. Diventa un'incubatrice naturale di quello che diverrà poi il Nazionalsocialismo hitleriano, al quale fornisce già pronte alcune icone che diverranno poi tristemente famose, quali il "Sieg Heil!" e anche e soprattutto la svastica destrogira. Era infatti il simbolo araldico della Società di Thule, e avrebbe dovuto rappresentare il percorso ascendente del sole dal solstizio d'inverno a quello d'estate. Rudolph Hess, braccio destro del Führer, era sempre un membro attivo della Thule-Gesellschaft[5]. Ma questa terza Thule non è piacevole né divertente: le prime due, quella geografica e quella dell'anima, bastano e avanzano per i nostri scopi.

Capita spesso che la gente si trovi disorientata e spiazzata, quando arriva a Los Angeles: e questo succede soprattutto agli Europei, abituati come sono a città antiche che si dipartono a raggiera da un centro storico che è davvero riconoscibile dalla storia passata sulle case antiche e lungo le vie strette e le piazze raccolte. Los Angeles è invece vasta, dispersa e pochissimo "città" nel senso classico del termine; è un'insieme di località, di sobborghi celebri non meno della stessa L.A.[6], una serie quasi infinita di toponimi senza un vero centro, senza un vero collante che non sia la scritta che campeggia sulle cartine geografiche. La sensazione di sconforto è legittima, ma provate a venire a Verbania, e ditemi se non è la stessa cosa. Stresa, Baveno, Fondotoce, Tre Ponti, Intra, sono tutte località, tutte cittadine lacustri, e tutte sono segnate come Verbania. La mia macchina procede timida e indecisa, incerta come me se sia davvero arrivata alla fine del viaggio o se manchi invece ancora molto. Due località hanno nomi speciali e segnate in rosso nella mia testa e sui miei appunti: entrambe dopo Intra (Verbania), entrambe prima di Ghiffa (Verbania), ma dopo aver superato la foce del Toce in una manciata di chilometri sono dentro Intra, la supero, e i cartelli stradali impietosamente indicano in bianco su blu l'esotica Locarno: già Svizzera, e non deve essere ormai nemmeno troppo lontana. Quando finalmente vedo un cartello confuso tra altri cinque indicanti luoghi dai nomi arcani che restano a sinistra, in direzione ortogonale al lungolago, il cuore si calma e la freccia della Opel si accende. Biganzolo, dice quell cartello: è uno dei due nomi che cerco.

Qual è la vostra personale Ultima Thule? La felicità, la pace, il successo? Oppure la gloria, l'amore, la conoscenza? Siete già arrivati a Thule, voi, oppure, come quasi tutti i figli di questa Terra, siete ancora in cammino, alla ricerca e all'inseguimento dell'irraggiungibile? Viaggiate da soli, verso Iperborea, o fate parte d'un gruppo,

[5] E se i misteri e le coincidenze mistiche (o anche solo da mystery-story) vi intrigano, considerate che la Società di Thule fu fondata il 12 Agosto 1919; Hess, dopo essere stato processato a Norimberga e condannato all'ergastolo, finì in prigione a Spandau dove fu affetto da una ondivaga (e forse solo apparente) pazzia. Nonostante tutto, arrivò a vedere la bellezza di 93 primavere, e se non arrivò alla novantaquattresima fu solo perché si suicidò; per farlo, scelse proprio il 12 Agosto 1987, sessantottesimo anniversario della fondazione della Società di Thule.

[6] Secondo una mia vecchia copia del Guinness dei Primati, a Los Angeles spetterebbe il record di "acronimo più efficace", visto che riesce a condensare le cinquantatre lettere del nome ufficiale della città (*"El Pueblo de Nuestra Señora la Reina de los Angeles de Porciúncula"*) nella brevissima sigla "LA".

d'una comitiva, d'una compagnia che divide obiettivo e difficoltà del viaggio? Ogni gruppo si fa forza, nella ricerca finale e definitiva: gli ecologisti lottano per un mondo più in sintonia con la natura, mentre magari gli scacchisti si contenterebbero di risolvere il vecchio problema "Il bianco muove e vince", scritto in caratteri piccoli sotto il diagramma d'una scacchiera con i trentadue pezzi ancora nelle posizioni d'inizio. I credenti forse identificano Thule con Dio, visto che molte religioni vedono nella matrice divina l'inizio, la causa e anche la fine di ogni cosa. Per un ragazzino di dieci anni, forse l'Ultima Thule è ancora soltanto il nuovo e non ancora completato videogioco da esplorare sulla Playstation. Per i matematici (o quantomeno per un gran numero di essi), l'Ultima Thule è l'Ipotesi di Riemann. David Hilbert la considerava il più grande problema dell'umanità, ma Hilbert era decisamente poco obiettivo, quando soppesava il ruolo della matematica e quello del resto del mondo. Però è certo che non c'è matematico che non abbia sognato di dimostrarla, quell'Ipotesi. Nata nel diciannovesimo secolo, è stata sottoposta ad attacchi feroci per tutto il ventesimo, e in questi tempi si mormora che sia stata alfine dimostrata. Sono soltanto voci, però: non è ancora ufficialmente riconosciuta come valida la dimostrazione avanzata da Louis De Branges de Bourcia. E poi, come già successo con lo sforzo eroico di Wiles nel venire a capo dell'Ultimo Teorema di Fermat, è facile prevedere che la "dimostrazione" non avrà lo stesso arcano fascino dell' "ipotesi". I sogni che si realizzano sono realtà, i sogni veri devono per forza rimanere sogni e nient'altro.

L'ipotesi di Riemann riguarda le parti reali delle radici non banali della funzione Zeta[7]: si ipotizza che siano infinite, quasi tutte comprese tra 0 e 1, e che la loro parte reale sia sempre uguale a ½. Tutto qui; certo, occorre poi ricordare che la funzione Zeta, siglata in greco come $\zeta(s)$, è definita da:

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = \prod \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$$

e serve, almeno in prima battuta, a stabilire quanti siano i numeri primi inferiori ad un numero dato; che è legata ad una infinità di aspetti della Teoria dei Numeri; che è strettamente associata alla Congettura di Goldbach; che molte dimostrazioni matematiche contemporanee, quasi fossero impazienti, si lanciano già "oltre" l'ipotesi di Riemann, supponendola esatta, e provano a vedere cosa si potrà scoprire davvero "dopo" la sua ricercatissima dimostrazione; che è talmente famosa da essere una delle poche cose che valicano i muri altissimi del territorio degli "addetti ai lavori", se è vero che è stato istituito un premio di un milione di dollari per il primo che la dimostrerà. Un milione di dollari sono un sacco di soldi; eppure siamo certi che la grandissima parte dei matematici lanciati all'inseguimento delle radici della Zeta non siano alla ricerca del malloppo. Oh, non saranno così folli da non ritirare il

[7] Il riferimento più facile, per noi di RM che siamo palesemente egocentrici, è il rimando a RM051.

premio, dovessero mai domare una volta per tutte il mostro di Riemann: ma siamo anche convinti che la caccia continuerebbe assidua e feroce anche in assenza del miraggio milionario. Se non vi fidate del tentativo di De Branges de Bourcia, sappiate che Hardy dimostrò a suo tempo che sono infiniti gli zeri non banali che rispettano l'ipotesi[8], e che svariati milioni di essi sono già stati studiati e analizzati.

Il personaggio che nel Novembre 1859 pubblicò per i tipi delle "Note Mensili" dell'Accademia di Berlino la memoria di poche pagine intitolata *"Sul numero dei numeri primi inferiori ad una grandezza data"*, che conteneva la famigerata ipotesi, si chiamava Georg Friedrich Bernhard Riemann. Nato a Breselenz, nell'Hannover, il 17 Settembre 1826, era il secondo dei sei figli di un pastore luterano. Era di famiglia povera, al punto da lasciar supporre che i suoi malanni e la sua fragilità in età adulta siano dipesi dalla cattiva nutrizione che la famiglia Riemann era costretta a fruire durante l'infanzia di Georg Friedrich Bernard: ma la ricchezza non è certo tutto, e il timidissimo Georg ebbe sempre un rapporto molto buono con tutti i suoi familiari, al punto di farsi, in età giovanile, molti chilometri a piedi dal Ginnasio di Luneburg fino a casa, pur di poter godere della compagnia della sua famiglia. Timido, lo era davvero: aveva problemi a parlare in pubblico, cosa che gli impedì (oltre ad una possibile mancanza di profonda vocazione) di seguire le orme del padre, perché è difficile predicare dal pulpito d'una chiesa se si ha paura del pubblico. Anche insegnare è una professione non troppo indicata, se si hanno certi problemi: ma Riemann imparò a superarli preparando le sue relazioni con un perfezionismo maniacale. Lo stesso perfezionismo (ma sarebbe meglio parlare più semplicemente di "perfezione") che si ritrova ancora nelle sue opere.

Opere che non sono davvero molte: a differenza della mole spaventosa delle pagine di Eulero, quelle di Riemann riempiono a stento un piccolo volume. Essendo oggi famoso soprattutto per la celebre ipotesi e avendo prodotto così poco, si potrebbe essere tentati di pensare che Riemann sia una specie di novello Goldbach, che è passato alla storia della matematica esclusivamente per la sua congettura: ma difficilmente si potrebbe arrivare ad una conclusione più sbagliata di questa. Riemann scrisse poco, ed ebbe vita breve e malandata che gli accorciò il potenziale produttivo: ma ogni suo lavoro, per quanto breve, fu assolutamente rivoluzionario e dirompente. Se, per dirla con Dante, "parva favilla gran fiamma feconda", le faville che fece scintillare Bernard Riemann furono tutt'altro che poche, e gli incendi da esse scaturite stanno ancora divampando altissimi, incendiando le maggiori teorie fisiche e matematiche.

Avessi aspettato a svoltare, avessi saltato quella prima indicazione per Biganzolo, il viaggio sarebbe stato più corto e diretto. Appena un chilometro oltre il bivio da me preso con sicura baldanza, proprio in coincidenza della pietra miliare del Km. 16, un incrocio più comodo mi si sarebbe palesato davanti, e con entrambi i nomi da me cercati ben marcati sui cartelli stradali. Però, se avessi davvero aspettato un altro chilometro, mi sarei perso la salita sulla collina di Biganzolo, le strade strette e ombreggiate, il panorama del lago dall'alto; avrei evitato di perdermi, perdendo così almeno un po' del senso dell'avventura alla ricerca di questa piccola Thule sulle rive del lago Maggiore; soprattutto, avrei visto la chiesa dal basso verso l'alto, che è vista peggiore di quella che la sorte mi ha riservato. È solo una piccola chiesa parrocchiale, ma è bello trovarsela davanti dopo una curva improvvisa, lungo la morbida discesa che riporta in direzione del lago: con il suo bravo campanile d'ordinanza, eretta a mezzacosta sulla collina. Sembra più una piccola cappella di campagna che una parrocchia: il primo pomeriggio estivo scalda deciso i suoi muri e,

[8] Ah, l'affascinante linguaggio della matematica! Solo qui "infinito" è minore di "tutto". L'ipotesi è stata dimostrata per infiniti zeri, ma non per tutti.

inevitabilmente, lascia chiuso e sbarrato il suo portone. E io, alla fin fine, non sono neanche sicuro al cento per cento di essere arrivato al posto giusto.

Chi si avvicina prima alla fisica che alla matematica incontra il nome di Riemann quando incontra Albert Einstein e la Teoria della Relatività Generale: certo, lo incontra in questo modo su testi di divulgazione, e non su libri di testo: quando si arriva a studiare seriamente la Relatività, il nome di Riemann lo si è sicuramente già incontrato in precedenza, ad esempio nella trattazione delle funzioni analitiche. Ma anche i libri di divulgazione non possono fare a meno di raccontare di come Einstein abbia dovuto fare i conti con una geometria che poco somigliava a quella euclidea, nel momento in cui la sua maggiore teoria prendeva forma ed equazioni; di come si palesassero le sue difficoltà con certa matematica, di quanto ebbe bisogno di aiuto di matematici (guarda un po', italiani) come Levi-Civita e Ricci-Curbastro; di come questi gli spiegarono che alla sua teoria ben si attagliava una geometria più complessa e sofisticata di quella di Euclide: una geometria immaginata e descritta da Georg Friedrich Bernhard Riemann. Einstein rimase entusiasta della geometria riemanniana, e ne aveva ben donde: come disse Freudenthal, *"lo spirito dell'approccio riemanniano era esattamente quello di cui la fisica aveva bisogno: la struttura metrica determinata dai dati"*. Può capitare allora che il lettore tenda a figurarsi Riemann come un contemporaneo, o quasi, di Einstein: almeno, così è successo a chi scrive queste note. Invece, Riemann riposava già nel mondo dei più da cinquant'anni, quando la Relatività Generale vide la luce.

Dopo il Ginnasio a Luneburg, Riemann era atteso dall'austera e magnifica Università di Gottingen. A quei tempi, il più celebre matematico di quell'Università era uno dei più grandi matematici di tutti i tempi, Karl Friedrich Gauss. Il solitario e timido Riemann lo avrà poi come relatore nella sua tesi di dottorato, e l'encomio che il sommo Gauss pronunciò a suo beneficio mostra che il grande Karl riusciva a riconoscere facilmente anche i buoni matematici[9], oltre alla buona matematica. Eppure Riemann pubblicava poco; lesse in sei giorni le novecento pagine della "Teoria dei Numeri" di Legendre, e la memoria con la sua celeberrima Ipotesi, pubblicata non troppo tempo dopo, mostrano come, tutto sommato, non fu lettura affrettata, quella che dedicò al tomo di Legendre. Dopo i primi due anni a Gottingen, andò per due anni a Berlino, a studiare con Jacobi, Dirichlet e altri. Qui venne a scoprire nuovi metodi rispetto a quanto si insegnava a Gottingen, e si dedicò allora per un po' allo studio dei fondamenti dell'analisi complessa: i suoi maestri, soprattutto Eisenstein, provarono a mostrargli i limiti più arditi ed evoluti della teoria delle funzioni, ma Riemann sembrava interessarsi più ai fondamenti di quella scienza, che ai suoi teoremi. In breve, rifondò la teoria delle funzioni analitiche, e tracce di questo si ritrovano inevitabilmente nelle condizioni di olomorfismo, che sono dette "di Cauchy-Riemann", nella definizione stessa di integrale ("alla Riemann") e in centinaia di altri punti.

Tornò a Gottingen nel 1849: in fondo, perbacco, doveva ancora prendere la laurea in matematica, in quell'Università. Stranamente, però, cominciò invece ad interessarsi più marcatamente di fisica. Seguì corsi di filosofia e di fisica sperimentale sotto Weber; dai suoi appunti, sappiamo che quei corsi gli bastarono per rifiutare il concetto di "azione a distanza", e preconizzare l'avvento della Teoria dei Campi. La fisica gli piacque al punto da dimenticarsi (di nuovo!) che doveva ancora laurearsi in matematica, e si iscrisse nel 1850 all'Istituto di Fisica Matematica fondato da Weber, Ubrich, Stern e Listing. È qui che scopre, grazie ai buoni uffici di Listing, che la

[9] Ma anche Gauss ha qualcosa da farsi perdonare, in merito al riconoscimento del genio matematico: non lesse (e quindi non riconobbe l'eccezionalità dell'autore) la memoria che Abel gli mandò, deludendo grandemente le speranze del matematico norvegese. Cfr RM055, "Rue S.te Marguerite, N° 41"

topologia è uno strumento assai utile, per un fisico. Riemann comprende la lezione, e la elabora fino a concludere che la topologia è strumento ancora più utile, per un matematico. Sette anni dopo, nel 1857, applicherà i metodi topologici alla teoria delle funzioni di variabili complesse, regalando alla matematica e al mondo le magiche "superfici di Riemann", infinitamente estese e avvolte su loro stesse, con "tagli" che le separano al fine di moltiplicarle all'infinito. Nel farlo, restituisce uniformità alle intrattabili funzioni multiformi, e svincola una volta per tutte la matematica (piano cartesiano compreso) dalla schiavitù del piano euclideo.

Non sto cercando una chiesa. Le scarse notizie rubate in rete e, soprattutto, la poetica mail di un vecchio lettore di RM, Luigi, mi hanno indirizzato verso Biganzolo per arrivare a Selasca, quando ancora non sapevo che entrambi erano borghi vicinissimi e piccolissimi, entrambi inclusi nella losangelesca Verbania. Luigi mi scrive che viene qui ogni anno, in un pellegrinaggio ripetuto che invece io faccio adesso per la mia prima volta; se ho letto bene le sue righe, qui, su questa collina, a pochi passi dalla chiesa, dovrebbe esserci anche un piccolo camposanto. Ma a chi chiedere, se la chiesa è chiusa? Giro attorno all'edificio, e non è una grande passeggiata: quando giungo sul retro della chiesa, ho un panorama che mi rassicura e sorprende tre volte. Il lago, innanzitutto, che si intravede tra tetti e montagne, con acqua scura e d'una tonalità di grigio appena più scura di quella dei monti. E sul lago, il promontorio inconfondibile di Caldè-Castelveccana, sulla riva lombarda e opposta, esattamente di fronte ai miei occhi. Ero là esattamente un anno fa, in una festa di matematica e di allegria, di ragazzini giovani e ragazzini oltre la quarantina. Mi sorprende pensare che fra tre giorni sotto quel promontorio la festa si ripeterà, anche se stavolta non ci sarò; mi sorprende vedere quel posto che mi sembrava così lontano, scoprirlo così vicino. Sarà il tema del viaggio, ma è inevitabile pensare che i sei o sette chilometri che mi separano da quel promontorio diventerebbero immediatamente decine, quasi centinaia, se volessi risalire in macchina e tornare di nuovo a toccare quella riva. Ovvio, penso con quell'incongruenza di cui sono capaci solo i mediocri: il lago, in questo momento, fa quello che fa il "taglio" su una superficie di Riemann: la vicinanza è solo apparente, finché resto incollato sul piano cartesiano della terra e delle strade d'asfalto. Avessi ali o vele, allora i pochi chilometri resterebbero tali: ma la mia geometria in questo momento non è euclidea, è riemanniana. E vorrei bene vedere che non lo fosse, visto dove mi trovo… Sposto lo sguardo di nuovo sulla costa piemontese, sulle case, sui tetti, e poi appena qui sotto, lungo la collina che ospita questa stessa chiesetta, e infine lo vedo. Non c'è dubbio, stavolta: è piccolissimo, ma è indubitabilmente un cimitero.

Georg infine si laurea, nel 1851. La sua tesi è il frutto dei suoi studi sulle variabili complesse, e si intitola "Principi di una teoria generale sulle funzioni di variabile complessa", e Gauss la definisce "molto bella"; aggiunge poi che "… non solo soddisfa alle condizioni richieste per la tesi di laurea, ma le supera di gran lunga".

I successivi lavori di Riemann non si distolgono dal suo solito, sorprendente e rivoluzionario livello: si dedica all'elettromagnetismo, e contribuisce in maniera innovativa alla teoria; si dedica alle funzioni abeliane, e lo fa in contemporanea con la pubblicazione sullo stesso argomento da parte di Weierstrass; quest'ultimo, una volta letta la memoria di Riemann, ritira la sua pubblicazione, quasi a voler dichiarare la manifesta superiorità del collega di Hannover. Tutto questo accade, è bene ricordarlo, mentre Riemann ha solo trent'anni e non è ancora professore a Gottingen: lo diventerà solo l'anno successivo, nel 1857. Nel frattempo, era rimasto povero, con tre sorelle da mantenere, e con una salute tutt'altro che ferrea. Continua ad affrontare temi nuovi, come la teoria del calore e l'elettrodinamica; nel 1862 trova anche il tempo per sposarsi; soprattutto, però, trova sempre il tempo di ammalarsi. Pochi mesi dopo il suo matrimonio, si ammala di pleurite, e decide di passare un po' di tempo in Italia, per giovarsi del clima più mite. Guadagnò presto una forma migliore, e dopo l'inverno italiano ritornò a Gottingen. E tornò ad ammalarsi. E tornò di nuovo in Italia, a Pisa, nel 1863; la città toscana provò il colpaccio, offrendogli una cattedra all'Università, e sembra che Riemann avrebbe accettato volentieri, se non fosse stato in condizioni di salute ancora così malandate da non poter ragionevolmente sostenere l'impegno. Gottingen gli prolungò la licenza, e Georg potè permettersi un periodo lungo di riposo, creandosi numerose amicizie tra i matematici italiani, e rinnovando quelle già stabili con matematici tedeschi, come l'inseparabile Dedekind. Infine tornò ancora a Gottingen, per passarvi l'inverno tra il 1865 e il 1866.

Ma non poteva resistere troppo a lungo. Un riacutizzarsi della malattia lo convinse a cercare ancora conforto oltre le Alpi, e scese ancora una volta in Italia. Era un'Italia appena nata, e le due rive del Lago Maggiore erano solo da sei anni riunite sotto la stessa bandiera. Il 1866 era anche l'anno della Terza Guerra d'Indipendenza, quella che doveva riportare anche il Veneto sotto il tricolore, anche se per riuscirci sembrava fossero necessarie almeno due clamorose sconfitte, a Custoza e a Lissa.

Georg Friedrich Bernard Riemann scelse di stabilirsi a Selasca, ospite di amici. Dedekind racconta che passava il tempo lavorando all'ombra d'un fico, in serenità. Guardava, con ogni probabilità, lo stesso panorama che sto guardando io adesso. Il 20 Luglio 1866 la flotta veneziana, che era ancora austriaca, sconfisse quella napoletana e piemontese, che erano già italiane. Quello stesso giorno Riemann, ancora solo trentanovenne, morì. Fu sepolto in questo piccolissimo camposanto che ora mi ospita.

Sono passati quasi centoquaranta anni, e le tombe di solito resistono per un tempo inferiore. Comunque so che è qui che è sepolto, quel terribile rivoluzionario di poche parole. Non riuscirò a mettermi con esattezza di fronte alle sue vecchie ossa, perché dalle lapidi mi sorridono simpatiche signore Marie e qualche anziano Giovanni di queste terre e questo secolo. Ma Bernard è qui. Certo più di quanto Dante sia nel cenotafio vuoto di Firenze, forse anche di più di quanto Napoleone sia sotto la cupola de Les Invalides, che di certo è più grande e vasta di questo piccolissimo cimitero. E il geometra che ha sconvolto la geometria sarebbe certamente in grado di dimostrare che è al tempo stesso sotto i miei piedi, sopra la mia testa e anche più lontano degli antipodi, se solo gli saltasse il ghiribizzo di farlo. Volevo comprare un fiore, per ricordare a me stesso di essere stato qui (non certo per ricordarlo a Riemann, che è senz'altro in tutt'altre faccende affaccendato, in questo momento), ma qui c'è solo lago e collina, un sole d'agosto e un camposanto di campagna poco più grande di un appartamento. Niente fiore, allora, basta il sole e la luce, che abbondano, per chiudere questo pellegrinaggio. Resta soltanto da prendere fuori dallo zainetto la macchina fotografica, e prepararsi a scattare la foto che ho inutilmente cercato per giorni in rete. È una foto che dovrebbe esserci, mi dicevo, possibile che non si trovi davvero? Beh, se non si trova, è ora che qualcuno la metta.

La lapide[10] è appena sulla sinistra, sul muro di cinta interno. Avessi più tempo e una macchina fotografica migliore, forse riuscirei a prendere in una sola inquadratura sia il marmo che il promontorio di Caldè.

Ma è davvero troppo complicato, provarci. Scatto qualche altra foto, e dichiaro ufficialmente concluso il pellegrinaggio. Avessimo anche solo un'ipotesi di budget, in questa e-zine, avrei anche per la prima volta un'autentica scusa per emettere una nota di rimborso spese. Ma siamo poveri quanto il secondo figlio d'un pastore luterano dell'Hannover, e quindi non ho nessuna speranza.

Ma sono contento lo stesso.

[10] QUI RIPOSA IN DIO

GIORGIO FEDERICO BERNARDO RIEMANN

PROFESSORE IN GOTTINGA

NATO A BRESELENZ IL 17 SETTEMBRE 1826

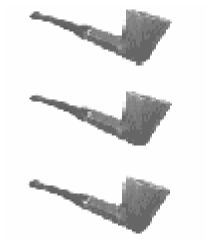
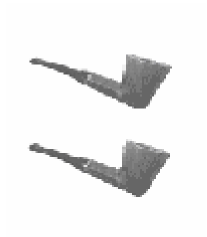
MORTO A SELASCA IL 20 LUGLIO 1866

A COLORO CHE AMANO DIO

TUTTE LE COSE DEVONO SERVIRE PER IL MEGLIO

(La traduzione è di Luigi: lui dice che non è troppo bella, ma a noi pare perfetta. Grazie, Don, per avercela mandata, e per le altre informazioni che hanno reso possibile questo "compleanno").

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Ufficio Complicazione Giochi Semplici			
Cerentoliadi			

2.1 Ufficio Complicazione Giochi Semplici

Voglio sperare abbiate presente il gioco del "pari e dispari", e spero siate d'accordo nel dire che anche se è onesto (cinquanta-cinquanta)[11] è piuttosto noioso, con solo una somma da fare.

Dovendo passare un po' di tempo, io e Doc abbiamo pensato di provare in un altro modo; anzichè "tirare" un numero a testa, "tiriamo" una matrice $n \times n$ di interi (in due: insomma, ne generiamo una), e ne calcoliamo il determinante; se è ***pari*** vince Rudy, se è ***dispari*** vince Doc.

Ora, Doc trova molto divertente calcolare tutti quei determinanti, ma ha un piccolo sospetto... c'è da fidarsi, a giocare con Rudy?[12]

In pratica: data una matrice quadrata di interi, è più probabile che il suo determinante sia pari o dispari?

Non so a voi, ma a me è servito OOoCalc[13] all'ultimo passaggio.

2.2 Cenerentoliadi

Dovete sapere che Doc e alcuni nostri lettori sono coinvolti in questa attività; non staremo a discutere di cosa si tratti, basti dire che richiede incontri periodici in quel di Milano (vuoi vedere che Milano ha almeno *una* cosa interessante??); ora, non ci risulta che durante questi incontri vengano svolte le attività sottoesposte, ma forse sarebbe una buona idea.

I partecipanti alle Cenerentoliadi sono in numero finito (e fin qui ci manteniamo ragionevolmente aderenti alla realtà) e costante; inoltre, alcune coppie di partecipanti

[11] Lo sappiamo anche noi che la somma di due distribuzioni uniformi è una distribuzione triangolare. Lasciamo perdere, non è qui il problema.

[12] Ovviamente si tratta di domanda retorica, e il Capo spera ancora che ci caschi qualcuno, dopo più di 60 numeri in cui vince sempre lui... [AR]

[13] Sarebbe il parente gratuito di Excel (in OpenOffice).

sono "amici"[14]; sempre per amor di problemistica, supporremo gli incontri siano settimanali.

Prima dell'avvio delle gare che rappresentano il vero motivo di esistenza delle Cenerentoliadi, gli amici si trovano al banco del bar per un the o un caffè (bisogna avere la mente lucida, per partecipare! Alcolici temporaneamente sospesi) e ciascuno di loro si ricorda che cosa ha preso la maggioranza dei suoi amici alla riunione precedente; in segno di amicizia, prende la stessa cosa (per capirci: se PMP è amico di Doc e Doc è amico di Stefano e la volta prima Doc ha preso un the e PMP e Stefano un caffè, questa volta Doc prende un caffè (due amici col caffè), PMP prende un the (un amico col the) e Stefano un the (un amico col the); la prossima volta, torneranno alla configurazione iniziale. Supponiamo che in caso di parità the-caffè il soggetto scelga quello che aveva preso lui la volta precedente.

Ora, noi auguriamo lunga vita alle Cenerentoliadi, teoricamente infinita; è però abbastanza evidente che, alla lunga, il processo del "cosa-bevo-stasera" diventa *periodico*, in quanto (essendo finito e costante il numero dei Cenerentolonici[15]) gli stati possibili sono in numero finito; ci interesserebbe però la risposta ad un paio di domande:

Riuscite a dimostrare che il periodo è ***1*** o ***2***?

Supponiamo i membri siano ***1000*** e che da ***18*** anni, tutte le settimane, si sottopongano a questa prova; hanno finalmente raggiunto la costanza (periodo 1), ma la domanda è se esistono configurazioni che permettano di andare avanti più a lungo prima di arrivare a questa noiosa situazione.

3. Bungee Jumpers

Gara Austro-Polacca di Matematica – Primo giorno – 30 giugno 1993 – Prob. 1

Trovare tutti i numeri naturali x, y per cui è $2^x - 3^y = 7$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

2004-07-28 21:36	u_toki - [066] – 3
2004-07-29 11:19	Stetson - [066] – 2
2004-08-07 09:58	Alberto - [066] – 1, 2, 3
2004-08-07 15:31	u_toki - [067] – 1
2004-08-09 16:10	Enrico - [067] – 2
2004-08-13 19:53	u_toki - [067] – 2
2004-08-13 19:56	Winnipeg - [067] – 1
2004-08-23 12:08	Loba - [067] - 1
2004-08-27 13:34	a_raoul – [067] – 2

E di sicuro anche questa volta ne abbiamo persa qualcuna verso la fine, ma la Redazione potrebbe decidere di menzionare i ritardatari il mese prossimo.

[14] L'"amicizia" è simmetrica (se ***A*** è amico di ***B***, allora ***B*** è amico di ***A***), ma non riflessiva ("ci sono quei giorni che non mi sopporto") e non necessariamente transitiva (se ***A*** è amico di ***B*** e ***B*** è amico di ***C***, non si può dire nulla sull'amicizia tra ***A*** e ***C)***.

[15] Se gli altri sono Olimpionici, questi saranno Cenerentolonici... *[tecnicamente, "olimpionico" non è chiunque partecipi alle Olimpiadi, ma solo chi le vince (ovvero, sono Olimpionici solo le Medaglie d'oro). Visto però che io e .mau. le vinciamo spesso, la cosa va bene lo stesso (PRS).]*

4.1 [066]

Siamo certi che ci sia ancora molto da dire sui quesiti dell'estate, e qui pubblichiamo ancora qualcosa che ci è arrivato nel frattempo.

4.1.1 PMP

Cominciamo con i commenti di ***Alberto***, che ci ha subito fatto sapere cosa pensava delle soluzioni pubblicate:

1. Il GC dice *"farei notare a margine che si dice, nel testo, alle ore 12 del 22 dicembre 2001 date inizio all'immane impresa... Quindi non era il caso di stracalcolare i Fibonaccioni... Bastava F(5) o F(7)..."*

Eccome se occorreva calcolare i Fibonaccioni!

Difatti si dice, poco più avanti: "...Secoli dopo, appurato che ormai non c'era più sugo etc.". Questo significa che il primo problema (quello di trovare una sequenza senza 3-ripetizioni) viene archiviato e ne nasce uno nuovo: quello di calcolare il numero delle sequenze formate con le statue del Sole e della Luna. *[Potrei provare ad arrampicarmi sui vetri sostenendo che si tratta di "secoli dopo il 2001", ma piove e i vetri sono bagnati... (RdA)]*

Difatti i numeri di Fibonacci con la prima parte del problema non c'entrano proprio niente, non trovate? Entrano in gioco solo grazie alla nuova regola: "non potevano esserci due statue del Sole vicine".

2. Il metodo del "simbolo complementare" (chiamiamolo così) col quale u_toki costruisce la sua sequenza mi sembra molto buono, tuttavia la casistica per dimostrare che non dà adito a sottosequenze 3-ripetitive potrebbe risultare superflua se quello che sto per dire si rivelasse giusto. Diciamo che è una "idea per una dimostrazione"...

Partiamo, come fa lui, dalla sequenza:

SL | LS | LSSL | LSSLSLLS | LSSLSLLSSLLSLSSL | LSSLSLLSSLLSLSSLSLLSLSSLLSSLSLLS | etc. etc.

Ora poniamo SL = X ed LS = Y, ottenendo:

XY | YX | YXXY | YXXYXYYX | YXXYXYYXXYYXYXXY | etc. etc.

Ora poniamo XY = A ed YX = B, ottenendo:

ABBA | BAAB | BAAB | ABBA etc. etc.

Ora poniamo ABBA = H e BAAB = K, ottenendo:

HKKH etc. etc.

È una specie di frattale, insomma! Le caratteristiche presenti nella sequenza iniziale si mantengono inalterate ad ogni livello di ingrandimento/rimpicciolimento.

Ora ragioniamo a ritroso. Prendiamo una sequenza iniziale costituita da pochi termini (ad es. HKKH) e verifichiamo che in essa non vi siano sottosequenze 3-ripetitive. Le uniche sottosequenze possibili sono HKK, KKH che non sono 3-ripetitive.

Quindi poniamo H = ABBA e K = BAAB. Le proprietà della sequenza "frattale" ci assicura che anche in ABBABAABBAABABBA non vi sono le sottosequenze 3-ripetitive. Possiamo anche verificarlo (se siamo sfaccendati).

Poi poniamo A = XY e B = YX etc. etc.

> Il ragionamento si può iterare quanto si vuole. Quindi si può costruire una sequenza lunga quanto si vuole... e senza ripetizioni.
>
> 3. La terza parte del ragionamento di u_toki è sbagliata. Egli considera che Orefici e Argentieri costruiscano la sua successione ma questo è completamente errato! Vi sono numerose coppie SS (due statue del Sole affiancate) e ciò viola la regola data per costruire le sequenze. Il rapporto tra il numero di statue di un tipo e dell'altro chiama (banalmente) in causa il rapporto aureo, non trovate?

Troviamo. Ed aspettiamo altri commenti e interventi.

4.1.2 Dario Bressanini (quasi)

Niente qui? Eppure, direi che ci sono ancora ampie possibilità di manovra...

4.1.3 Caronte

Anche qui abbiamo commenti di ***Alberto***:

> Secondo me per trovare una (vera) strategia di vittoria ci si deve mettere nelle peggiori condizioni. La peggiore condizione, ovviamente, è che anche l'avversario conosca la stessa strategia.
>
> Se, nonostante questo, la strategia funziona ancora allora ciò che determina la vittoria dell'uno o dell'altro giocatore sono sempre fattori come la prima mossa, la rottura dell'equilibrio pari/dispari nelle distanze etc.
>
> In queste condizioni (e con queste premesse) due super maestri di questo gioco impattano sempre! (sia per il gioco delle pedine che per quello dei pedoni).

E l'ultima soluzione ritardataria di ***u_toki***, ce l'ha mandata tre giorni prima della chiusura del numero precedente, per cui si capisce la fretta.

> *Scacchiera 3x3*
>
> Le ho giocate direttamente tutte (avevo anche preparato tempo fa una tabella excel, poi buttata) e il nero può vincere sempre
>
> *Scacchiera nx3 con n dispari*
>
> BOH! Spero di avere il barlume dopo o al più tardi domani sera.
>
> *Scacchiera nx3 con n pari.*
>
> [Mi è venuta in mente 15 minuti fa lavandomi i denti!] Il nero può muovere in maniera SIMMETRICA rispetto al bianco e facendo così può sempre "rispondere" alla mossa del bianco. Questo vuol dire che il nero non si troverà mai ella situazione di non poter muovere. Cosa intendo per simmetrica? Il bianco ha le colonne da 1 a n da sx verso dx. Il nero ha le colonne da n a 1 da sx verso dx se il B muove la sua pedina della colonna k, cioè la sua k-esima pedina da sx, allora il nero muove quella della colonna n-k, che per lui è proprio la k-esima pedina da sx. Se con tale mossa il B cattura in diagonale verso la SUA sx/dx, allora il nero con la mossa successiva catturerà in diagonale verso la SUA sx/dx
>
> Nota: il discorso simmetrico "salta" [magari c'è un inghippo a cui devo ancora pensarci] nella scacchiera nn3 con n dispari perché il B può muovere la pedina centrale e il N non ha una mossa simmetrica possibile (la sua pedina centrale è bloccata proprio dalla pedina appena mossa dal B.

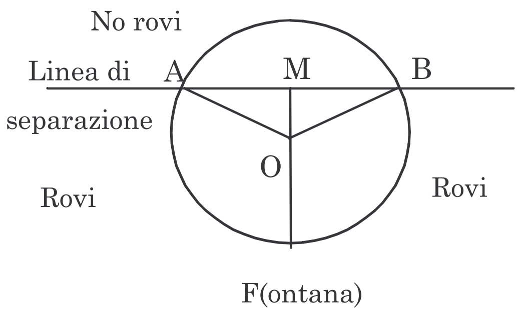
Chissà che non ci arrivino altre puntate...

4.2 [067]

È più che evidente che siete più in vacanza di noi, le soluzioni ricevute sono state pochissime. Pubblichiamo quello che è arrivato, e poi vediamo...

4.2.1 Ardite speculazioni terriere

Le soluzioni qui sono arrivate dal solito ***u_toki***, ***Winnipeg*** (nuovo allonimo, ma un noto solutore) e ***Loba***. Cominciamo da ***u_toki***.

> Ricordando il fatto (noto già a Didone) che, fra tutte le curve chiuse di lunghezza data, quella che racchiude la superficie maggiore è la circonferenza, decido di acquistare un appezzamento di forma circolare.
>
> Avendo 100 m di rete da usare per il recinto (=circonferenza) , ottengo un cerchio (=appezzamento) di raggio $\frac{50}{\pi} \approx 15{,}9$ m e area $\frac{2500}{\pi} \approx 795{,}8$ mq.
>
> Se decido di sopportare senza problemi il lavoro di dover togliere i rovi, posso decidere che il cerchio sia tutto nella parte coi rovi (ovviamente facendo passare il recinto per la fontana) e così minimizzerò la spesa, pagando solo $\frac{1250}{\pi} \approx 397{,}9$ U.M. (=unità monetarie).
>
> Era questa l'opzione *"massima superficie con minima spesa e massimo lavoro"*.
>
> Se decido di limitarmi a *"massima superficie con massima e minimo lavoro"* allora devo mantenere la forma circolare (è la condizione di massima superficie che comanda) ma devo minimizzare la parte coi rovi, massimizzando quella pulita: avrò una situazione come in figura:
>
> 
>
>
> Allora:
>
> Area pulita=Area settore AOB-Area triangolo AOB
>
> FM=20
>
> OF=OA=OB=r
>
> OM=20-r
>
> MB=MA=$\sqrt{r^2 - (20-r)^2} = \sqrt{40r - 400}$
>
> α =angolo MOB
>
> $$\tan\alpha = \frac{MB}{MO} = \frac{\sqrt{40r-400}}{20-r}$$
>
> $$\alpha = \arctan\frac{\sqrt{40r-400}}{20-r}$$
>
> A sett.AOB= $\alpha r^2 = \arctan\frac{\sqrt{40r-400}}{20-r} r^2 = \arctan\frac{\sqrt{\frac{2000-400\pi}{\pi}}}{\frac{20\pi-50}{\pi}}\frac{2500}{\pi^2} \approx 332{,}65$
>
> Area triangolo AOB=MB*OM=

$$=\sqrt{40r-400}*(20-r)=\sqrt{\frac{2000-400\pi}{\pi}}*\frac{20\pi-50}{\pi}\approx 62{,}75$$

Area pulita 332,65-62,75=269,9;

Area con rovi 795,8-269,9=525,9;

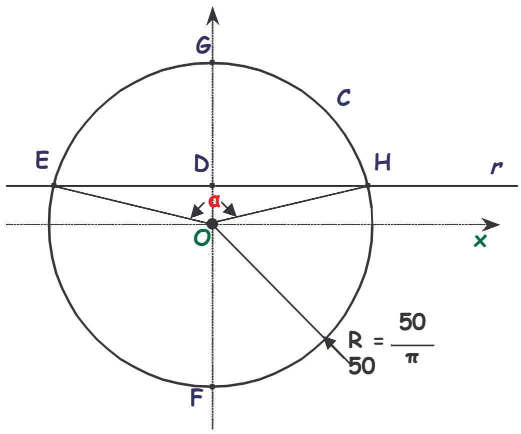
Quindi la spesa sarebbe circa 269,9+0,5*525,9=532,85 U.M.

Winnipeg ci ricorda ad inizio soluzione che

> Sin dai tempi in cui la sorella di Pigmalione frequentava le coste nordafricane (Il nome storico del problema isoperimetrico è proprio "Problema di **Didone**") è noto che la figura geometrica piana che, a parità di perimetro, massimizza l'area coperta è il cerchio...

Ci ricordavamo di Didone e della pelle di bufalo, ma non delle sue parentele.

Comunque, i calcoli procedono suppergiù nello stesso modo sino alla determinazione dell'angolo α (che, con indubbia fantasia, hanno chiamato tutti nello stesso modo), ma dopo le cose vanno un po' in un'altra direzione... Riportiamo il disegno, che è molto carino, per orientarci un attimo: lo trovate qui di fianco.



Il Nostro valuta l'angolo come:

$$\frac{\alpha}{2}=\arctan\frac{\overline{DH}}{\overline{OD}}=\arctan\frac{2\sqrt{\frac{5}{\pi}-1}}{2-\frac{5}{\pi}}$$

e, ricavato il valore dell'angolo, calcola il valore del settore circolare:

$$A=AreaSegmentoCircolareEDHG=\frac{R^2}{2}(\alpha-sen\alpha)\cong 312{,}47m^2$$

e la formula per il prezzo:

$$P=(1*A)+\left[\left(\frac{1}{2}*(\pi^2R-A)\right)\right]$$

Qualcosa non torna, ma il metodo ci ha fatto ricordare un'altra formula... e quanto sia difficile far quadrare i conti con pigreco.

Anche se ci ha messo un certo tempo ad arrivare, la risposta di ***Loba*** è decisamente interessante, quantomeno per le libertà che si prende con la lingua italiana:

1) Definisco un sistema cartesiano con asse x la retta che separa la zona ½ dalla zona 1 e con asse y la perpendicolare a detta retta, passante per F.

2) Γ, la circonferenza, sarà di formula $x^2+\left(y+\left(20-\frac{50}{\pi}\right)\right)^2=\left(\frac{50}{\pi}\right)^2$. Da ciò deduco anche che Γ intersecherà l'asse ***x*** nei due punti ***A*** e ***B*** tali che $x_A=-x_B=\pm\sqrt{\left(\frac{50}{\pi}\right)^2-\left(20-\frac{50}{\pi}\right)^2}$

3) Ora esplicito la ***y***, interessandomi solo del valore positivo e ricavando una funzione di ***x***. $y=\sqrt{\left(\frac{50}{\pi}\right)^2-x^2}-20+\frac{50}{\pi}$ e la integro da A a B *[Questa ci è piaciuta molto (RdA)]*, per ottenere la porzione di area di costo 1: $\int_A^B\sqrt{\left(\frac{50}{\pi}\right)^2-x^2}-20+\frac{50}{\pi}dx$ che mi dà come risultato circa 296.314.

4) Sottraggo ora all'area totale questa porzione e divido il risultato per 2 ottenendo il prezzo della parte rovente (o rovata *[Rovinata (RdA)]*) che sommo al risultato ottenuto, ricavando il prezzo complessivo P. P=526.461/2+259.314 P=532.545 (un po' approssimato).

Ho quindi un prezzo variabile tra P_{min}=397.89 soldi e P_{max}=532.55 soldi. L'appezzamento più conveniente dipende dal costo e dal tempo necessario alla pulitura del terreno (della serie se per un'ora di lavoro ti pagano più di quanto tu debba pagare un operaio specializzato per fare quel mestiere, allora assumilo o compra più terreno già sgombro, altrimenti prendilo tutto di rovi e hai trovato cosa fare nei corti pomeriggi invernali…).

Beh, è già qualcosa che Loba ci trovi il lavoro per l'inverno; alcuni di voi avevano suggerito di bruciare i rovi e, una volta tanto, siamo contenti che certe braccia siano state sottratte all'agricoltura. Non so quale sia la vostra esperienza, ma governare un fuocherello di rovi è praticamente impossibile: resta "fuocherello" per pochi decimi di secondo, poi vi conviene chiamare il Canadair più vicino[16].

Comunque, di questo problema dovremo riparlarne; ha un'interessante estensione, che ci tenevamo per i mesi autunnali... Ne riparliamo il mese prossimo, OK?

4.2.2 La barca di Rudolph

Tre soluzioni, fortunatamente tutte con lo stesso risultato!

Cominciamo con ***Enrico***, il quale non solo risolve il problema ma ci dá anche un'altra notizia, molto interessante::

> Riassumo brevemente il problema in una versione un po' più generale: stiamo procedendo con la barca di Rudolph a velocità costante v_R, lungo l'asse delle x, quando ci accorgiamo che dei nostri amici si muovono dal punto (x,y) puntando istante per istante verso di noi a velocità v_A.
>
> Che traiettoria seguono e dopo quanto tempo ci raggiungeranno?
>
> Il moto della nostra barca è molto semplice:
>
> $$x_R=v_Rt \qquad \texttt{[004.001]}$$

[16] La quasi totalità degli incendi non scatenati dai piromani o dai mozziconi nascono da qualcuno convinto che un fuoco di rovi sia governabile.

$$y_R = 0$$

Quali equazioni soddisfano le coordinate della barca dei nostri amici?

Indicando con ρ la distanza tra le due barche e con θ l'angolo tra la retta congiungente le due barche, e la direzione della nostra barca (cioè l'asse x), si ha

$$\rho = \sqrt{y^2 + (v_R t - x)^2}$$
$$\sin\theta = -\frac{y}{\rho} \quad ; \cos\theta = \frac{v_R t - x}{\rho}$$ **[004.002]**

Le coordinate della barca degli amici sono dunque:

$$x = v_R t - \rho\cos\theta$$
$$y = -\rho\sin\theta$$ **[004.003]**

e verificano le seguenti equazioni

$$\frac{dx}{dt} = v_A \cos\theta$$
$$\frac{dy}{dt} = v_A \sin\theta$$ **[004.004]**

Derivando rispetto al tempo le eq. **[002]** e usando le eq. **[004]**, si ottengono le equazioni per ρ e θ

$$\frac{d\rho}{dt} = v_R \cos\theta - v_A$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_R \sin\theta}{\rho} \qquad (5)$$ **[004.005]**

Adesso mi permetto la libertà di fare il rapporto delle precedenti equazioni, semplificare dt ed ottenere la seguente equazione

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\theta(r - \cos\theta)}{\sin\theta} \qquad (6)$$ **[004.006]**

dove $r = \frac{v_A}{v_R}$. Integrando si ottiene

$$\rho(\theta) = \rho_0 \left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}} \right)^r \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta} \qquad (7)$$ **[004.007]**

Dove, ovviamente, θ_0 e ρ_0 sono i valori iniziali per θ e ρ.

Dalla precedente equazione si vede che $\rho = 0$ (ci hanno raggiunto!) se $\theta \to 0$ e $r > 1$.

Se $r = 1$,cioè le due velocità sono uguali, quando $\theta \to 0$ si ha che ρ tende ad un valore costante.

Questo si capisce, perché una volta che l'inseguitore si è messo sulla scia del fuggitivo, essendo le due velocità uguali, la distanza rimane costante.

Se $r < 1$, la distanza ρ tende all'infinito quando $\theta \to 0$.

Per trovare la dipendenza dal tempo, si può usare la seconda dell'eq.(5).

Separando di nuovo le variabili, si ha

[004.008]

$$v_R t = -\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\rho(\phi)}{\sin\phi} d\phi \qquad (8)$$

Eseguendo l'integrale e semplificando, si ottiene

[004.009]

$$v_R t = \frac{(\rho_0 - \rho)r + \rho_0 \cos\theta_0 - \rho\cos\theta}{r^2 - 1} \qquad (9)$$

Se siamo interessati all'istante t_P in cui i nostri amici ci raggiungono, basta porre nella precedente equazione $\rho = 0$ e $\theta = 0$:

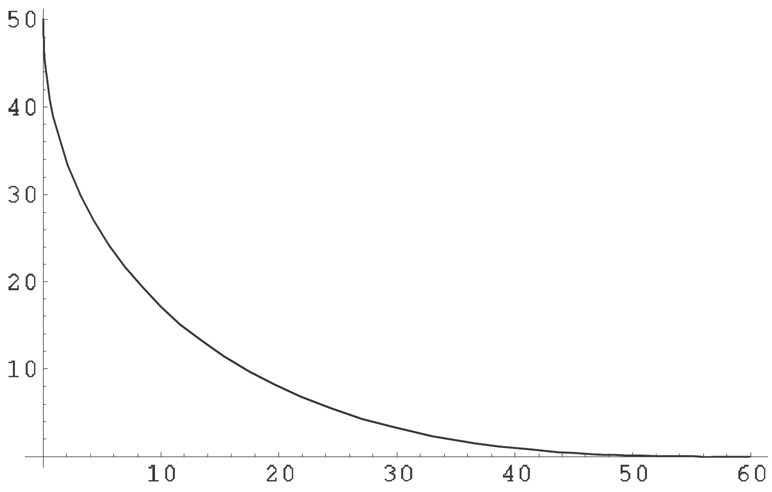
[004.010]

$$t_P = \frac{\rho_0 (r + \cos\theta_0)}{v_R (r^2 - 1)} \qquad (10)$$

Si vede subito (per verifica) che se $\theta_0 = 0$, cioè la barca con gli amici parte dietro di noi, si ha $t_P = \frac{\rho_0}{(v_A - v_R)}$ come ovviamente deve essere.

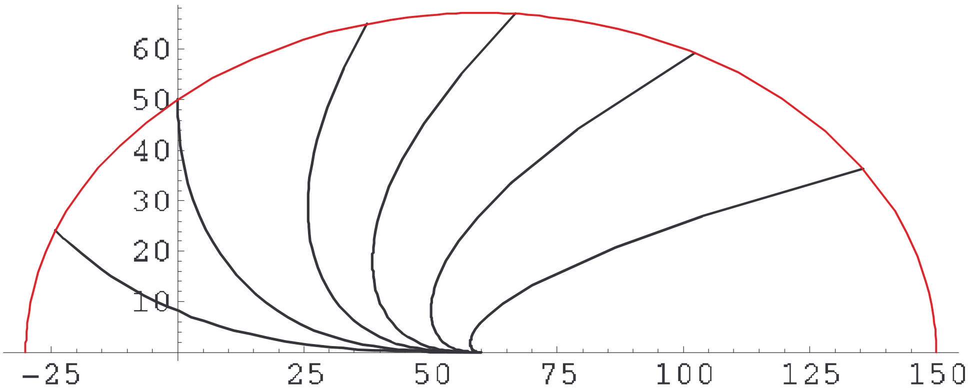
Nel nostro caso $v_R = 20, v_A = 30, \rho = 50, \theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ e quindi $t_P = 3$ ore.

Per la forma della traiettoria basta far variare θ tra θ_0 e 0 e usare le equazioni parametriche (3) insieme alle eq.(7) e (9). Riporto in figura il risultato.



Visto che abbiamo trovato tante belle formule, ci possiamo anche chiedere quali sono i punti iniziali dai quali la barca dei nostri amici ci raggiunge con lo stesso tempo (3 ore).

Dalla eq.(10) si vede che il luogo di tali punti è un ellisse. Nella seguente figura riporto qualcuna di queste traiettorie insieme all'ellisse in questione (in rosso).



A questa parte non avevamo pensato, ma la cosa è decisamente degna di nota.

u_toki, invece, preferisce un'altra strada. Va detto che, eroicamente, non si fa prendere dalla disperazione... A insindacabile giudizio della Redazione, "seghiamo" il disegno: infatti, ci risulta non riportabile senza danni (al disegno: viene diverso da com'era prima).

Fissiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali ***xOy***, con l'origine nel punto in cui si trova inizialmente la seconda barca ***B***, l'asse ***x*** con direzione nord-sud, l'asse ***y*** con direzione ovest-est; la prima barca ***B***, cioè quella in cui ci troviamo, ha quindi, all'inizio, coordinate ***B(50,0).***

La barca b viaggia (nel verso positivo delle ordinate) lungo la retta di equazione ***x=50***, mentre ***B*** percorre una curva di equazione ***y=f(x)*** con tangente orizzontale in ***O*** e tangente verticale nel punto di incontro tra le due barche (tranne in ***O***, questa tangente ha pendenza positiva).

Al generico istante t, b si trova nel punto [identificheremo barche e punti] di coordinate b(50;20t), mentre B ha coordinate B($x(t)$;$y(t)$); dato che B punta sempre verso b, la tangente in B alla curva interseca in b la retta x=50. Inoltre, la direzione della tangente è la stessa di $\vec{v} = (\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt})$, il vettore velocità di B (di modulo 30).

Uguagliando i coefficienti angolari si ha:

$$\frac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}} = \frac{20t - y(t)}{50 - x(t)}$$

$$\frac{\frac{dy(t)}{dx(t)}\frac{dx(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}} = \frac{20t - y(t)}{50 - x(t)}$$

$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{20t - y(t)}{50 - x(t)}$$

$$(50 - x(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} = 20t - y(t)$$

Deriviamo rispetto a t:

$$-\frac{dx(t)}{dt}\frac{dy(t)}{dx(t)} + (50 - x(t))\frac{d}{dt}\frac{dy(t)}{dx(t)} = 20 - \frac{dy(t)}{dt}$$

$$-\frac{dx(t)}{dt}\frac{dy(t)}{dx(t)} + (50 - x(t))\frac{d^2y(t)}{dx(t)^2}\frac{dx(t)}{dt} = 20 - \frac{dy(t)}{dx(t)}\frac{dx(t)}{dt}$$

$$(50 - x(t))\frac{d^2y(t)}{dx(t)^2}\frac{dx(t)}{dt} = 20$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{20}{50 - x(t)}\frac{1}{\frac{d^2y(t)}{dx(t)^2}} \qquad \texttt{[004.011]}$$

Il fatto che $\vec{v}$ ha modulo 30 possiamo esprimerlo così:

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 = 900$$

da cui

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2\left(1 + \left(\frac{dy(t)}{dx(t)}\right)^2\right) = 900$$

$$1 + \left(\frac{dy(t)}{dx(t)}\right)^2 = 900\frac{1}{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2}$$

Sostituendo in quest'ultima equazione la **[011]** si ottiene:

$$1 + \left(\frac{dy(t)}{dx(t)}\right)^2 = \frac{900}{400}(50 - x(t))^2\left(\frac{d^2y(t)}{dx(t)^2}\right)^2$$

che, posto $z = \frac{dy(t)}{dx(t)}$ e sottintendendo la dipendenza da t (per alleggerire la notazione), diventa

$$1 + z^2 = \frac{9}{4}(50 - x)^2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

Estraiamo la radice:

$$\sqrt{1 + z^2} = \frac{3}{2}(50 - x)\frac{dz}{dx}$$

Separando le variabili abbiamo:

$$\frac{2}{50-x}dx = 3\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}dz \qquad \texttt{[004.012]}$$

L'integrale del primo membro è $-2\ln(50-x) = -\ln(50-x)^2$ +costante [Nota: $50-x>0 \quad \forall x : x<50$ e quindi posso omettere il valore assoluto nell'argomento del ln]

L'integrale del secondo membro è meno immediato…o almeno lo è stato per me! Per parti NIENTE! Via sostituzioni "standard" NIENTE. Su un testo ho trovato che è addirittura un integrale notevole! Comunque sia ecco come risolverlo:

sia $\sqrt{1+z^2} = t-z$; allora

$$1+z^2 = t^2+z^2-2tz$$

$$2tz = t^2-1$$

$$z = \frac{t^2-1}{2t}$$

$$dz = \frac{4t^2-2t^2+2}{4t^2}dt = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$$

$$\sqrt{1+z^2} = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

Quindi:

$$3\int\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}dz = 3\int\frac{2t}{t^2+1}\frac{t^2+1}{2t^2}dt = 3\int\frac{1}{t}dt = 3\ln|t| = 3\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right| = \ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|^3$$
+costante

L'equazione differenziale `[012]` conduce quindi a [posso eliminare il valore assoluto anche nel secondo membro in quanto $z = \frac{dy(t)}{dx(t)}$ è sempre positivo poiché il coefficiente angolare della tangente è, esclusa l'origine, sempre positivo] :

$$-\ln(50-x)^2 = \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)^3 + \ln c$$

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)^3 + \ln c + \ln(50-x)^2 = 0$$

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)^3(50-x)^2 c = 0$$

$$\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)^3(50-x)^2 c = 1$$

$$c = \left(z+\sqrt{1+z^2}\right)^{-3}(50-x)^{-2}$$

Ricordando la condizione iniziale di tangente orizzontale, $x=0 \Rightarrow z=\frac{dy}{dx}=0$, troviamo che $c=50^{-2}$ e, sostituendo, abbiamo l'equazione:

$$\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)^3=50^2\left(50-x\right)^{-2}$$

Elevando alla $\frac{1}{3}$:

$$z+\sqrt{1+z^2}=50^{\frac{2}{3}}\left(50-x\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{1+z^2}=50^{\frac{2}{3}}\left(50-x\right)^{-\frac{2}{3}}-z$$

Elevando al quadrato:

$$1+z^2=50^{\frac{4}{3}}\left(50-x\right)^{-\frac{4}{3}}+z^2-2z50^{\frac{2}{3}}\left(50-x\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$2z50^{\frac{2}{3}}\left(50-x\right)^{-\frac{2}{3}}=50^{\frac{4}{3}}\left(50-x\right)^{-\frac{4}{3}}-1$$

Moltiplicando per $50^{-\frac{2}{3}}\left(50-x\right)^{\frac{2}{3}}$:

$$2z=50^{\frac{2}{3}}\left(50-x\right)^{-\frac{2}{3}}-50^{-\frac{2}{3}}\left(50-x\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$z=\frac{1}{2}\left(50^{\frac{2}{3}}\left(50-x\right)^{-\frac{2}{3}}-50^{-\frac{2}{3}}\left(50-x\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

cioè:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(50^{\frac{2}{3}}\left(50-x\right)^{-\frac{2}{3}}-50^{-\frac{2}{3}}\left(50-x\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

il cui integrale è:

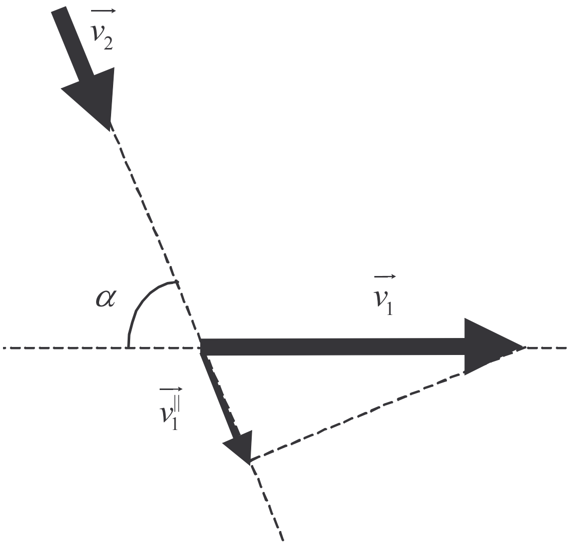
$$y=\frac{1}{2}\left(-50^{\frac{2}{3}}\cdot 3\left(50-x\right)^{\frac{1}{3}}+50^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{5}\left(50-x\right)^{\frac{5}{3}}\right)+c'$$

Osservando che per x=50, y=c', per risolvere il problema ci basta trovare il valore di c'; questo si trova tramite la condizione iniziale $x=0 \Rightarrow y=0$:

$$c'=\frac{1}{2}\left(50^{\frac{2}{3}}\cdot 3\left(50\right)^{\frac{1}{3}}-50^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{5}\left(50\right)^{\frac{5}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(3\cdot 50-\frac{3}{5}\cdot 50\right)=\frac{1}{2}\left(150-30\right)=60$$

Le due barche si incontreranno dopo che la nostra barca b avrà percorso 60 miglia (e B ne avrà percorse 90).

a_raoul (si capisce che è un amico di *u_toki*? E che l'allonimo gliel'ha affibbiato lui?) trova una soluzione più breve e piuttosto interessante, anche se dobbiamo rifare il disegno (PowerPoint no, eh? Che è, avete paura di diventare tutti manager, se lo usate?). Lo trovate qui di fianco, se tutto va come deve.



Al generico istante t, possiamo individuare i due vettori velocità di ciascuna barca:

- $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1(t)}$ per la nostra barca
- $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2(t)}$ per l'altra barca,

i cui moduli valgono rispettivamente ***20*** e ***30***.

[Nota: essendo le velocità in nodi, il tempo è misurato in ore]

Il vettore velocità relativo fra le due barche è quindi dato da

$$\overrightarrow{v_r}(t) = \overrightarrow{v_2}(t) - \overrightarrow{v_1^{\|}}(t)$$

di modulo $30 - 20\cos\alpha(t)$.

Se $\left(x_2(t), y_2(t)\right)$ sono le generiche coordinate del punto corrispondente alla posizione della seconda barca (in un sistema cartesiano con origine nel punto iniziale della prima barca, asse x con direzione e verso dati dal moto della prima barca, cioè ovest-est, e asse y identificato dall'asse sud-nord), allora $\overrightarrow{v_2(t)} = \left(\frac{dx_2(t)}{dt}, \frac{dy_2(t)}{dt}\right)$ da cui

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 30\cos\alpha(t).$$

e quindi

$$\cos\alpha(t) = \frac{1}{30}\frac{dx_2(t)}{dt}$$

Sia T il tempo che trascorre prima dell'incontro fra le due barche. In questo tempo, considerando il moto relativo fra le due barche, viene coperta una distanza pari alla distanza iniziale fra di esse. Pertanto

$$50 = \int_0^T \left|\overrightarrow{v_r}(t)\right| dt = \int_0^T \left(30 - 20\cos\alpha(t)\right) dt = \int_0^T \left(30 - \frac{20}{30}\frac{dx_2(t)}{dt}\right) dt$$

A questo punto, con un abuso di notazione, possiamo scrivere:

$$50 = \int_0^T 30dt - \frac{2}{3}\int_0^T dx_2(t) = 30T - \frac{2}{3}20T$$

in quanto il secondo integrale corrisponde alla distanza "in orizzontale" percorsa fino al momento dell'incontro dalla seconda barca e questa distanza è la stessa che percorre la prima barca, cioè $20T$.

Le due barche si incontreranno quindi dopo un tempo $T=3$ ore; la prima barca avrà percorso 60 miglia, la seconda 90.

Adesso, Rudy deve decidere se è contento o seccato: questa soluzione è *un terzo* della sua, come complicazione...

5. Quick & Dirty

Si avvicina il Natale (e il calendario è in ritardo...). Anche quest'anno non abbiamo ancora pensato ai regali, però abbiamo un mucchio di scatole per incartarli.

In particolare, le scatole sono in tre formati: piccola, normale e grande; nel tentativo di fare un po' di ordine (Natale è vicino, ma non *così vicino*) abbiamo messo sul tavolo ***11*** scatole grandi e in alcune (non tutte) di queste abbiamo messo ***8*** scatole normali (otto normali per ogni grande); inoltre, in alcune (non tutte) di queste scatole normali abbiamo messo ***8*** scatole piccole (otto piccole per ogni normale). Nelle scatole piccole non mettiamo niente.

Al momento, sul tavolo ci sono ***102*** scatole vuote.

Quante scatole abbiamo usato?

6. Zugzwang!

6.1 La Bella Addormentata

Due premesse:

1. Non mi piace la Dama
2. Non mi piacciono le favole di Wilhem e Jakob Grimm.

Bene, ho trovato un gioco che mette insieme le due cose; contenti?

Per prima cosa, siccome c'è un mucchio di gente che dorme, mettete i feltrini alle pedine... Andiamo con calma.

Allora, l'attrezzatura è quella normale da Dama (ottoperotto caselle, dodicipiudodici pedine. E le chiamo pedine. E qui si mangia, non si prende). Dovete solo ricoprire il "sotto" delle vostre pedine con un qualcosa di colore diverso dal bianco e dal nero. Vanno benissimo quei fogli di feltro adesivo verde o rosso: ne avanzano sempre a Natale, e di solito saltano fuori verso l'autunno, quando sono assolutamente inutili. Non serve che siano di colori diversi, ne basta uno.

Allora, date le premesse, l'inizio è noiosissimo: esattamente e precisamente come la Dama, vi mangiate un po' di pedine (è obbligatorio mangiare, e se avete la scelta tra due mangiate è obbligatoria quella con più pezzi) e, se tutto va come deve, riuscite a promuovere una vostra pedina a Dama. E avanti così.

"Ricorda la Dama..." Vero. La differenza è che ***non potete avere più di una Dama***. "E se arrivo al fondo con un'altra pedina?" Vi limitate a girarla al contrario; quella diventa una ***Bella Addormentata***. Le Belle Addormentate (che possono essere quante volete) non muovono, non mangiano e non possono essere mangiate; nel momento stesso nel quale vi mangiano la Dama, potete trasformare una delle vostre Belle Addormentate in una nuova Dama.

Quella sopra è la modifica principale rispetto alla Dama; ci sono poi un po' di regole aggiuntive, che movimentano un attimo il gioco.

Una Dama avversaria *può essere presa da una pedina*, ma solo saltandola *all'indietro*. Le pedine vengono prese dalle pedine saltandole in avanti.

Una Dama può mangiare in due modi: o saltando come al solito o *sostituendosi* al pezzo mangiato. Sono ammesse le mangiate multiple, ma *non potete* combinare i due modi: o saltate sempre, o sostituite sempre (per quella mossa). La cattura per sostituzione non è obbligatoria, mentre quella per salto lo è. Quindi, se è possibile catturare per salto, questo va fatto.

> Eccezione alla regola precedente: *a meno che sia possibile catturare la Dama avversaria durante il movimento*: in questo caso, si può scegliere tra le ***Pari Opportunità*** (non prendetevela con me: si chiama così, 'sta cavolo di regola) e decidere cosa volete prendere.

Quando vi mangiano la Dama, potete (se volete) *svegliare una Bella Addormentata* delle vostre, trasformandola in una Dama. La sveglia non conta come mossa, quindi potete muovere un pezzo dopo aver svegliato la Bella Addormentata.

Se decidete però di muovere la Bella Addormentata subito dopo averla svegliata, lei farà un ***Saltello di Gioia***, e si muoverà (diagonalmente) di ***due*** caselle in linea retta.

> Il Saltello di Gioia si può fare solo se le due caselle sono libere e non guardate da pezzi avversari (insomma, non vi "segano" la Sonnolenta alla prossima mossa).

A ***me*** non piace, ma forse è perché non sopporto la Dama. Siccome però non tutti i gusti sono alla menta, se vi piace ditemelo, che ho un paio di problemini.

7. Pagina 46

Per prima cosa, si nota che entrambi i numeri devono essere pari; supponiamo, per dimostrarlo, che uno dei due almeno sia dispari.

Se ***x è dispari***, il numero 2^x+1 può essere fattorizzato come:

$$2^x+1=(2+1)\left(2^{x-1}-2^{x-2}+\ldots-2+1\right), \qquad \texttt{[007.001]}$$

e quindi dalla prima parentesi si ha che deve essere ***multiplo di 3***.

Di conseguenza, $2^x-3^y\equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$, mentre $7\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Quindi, ***x*** non può essere dispari.

Se ***y è dispari***, con la stessa tecnica si ricava che $3^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$, da cui si ricava che per ***k*** intero è $3^{2k+1}\equiv 3(\mathrm{mod}\,8)$. Di conseguenza, $3^y+7\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$; poiché deve poi essere $2^x\equiv 3^y+7$, deve essere $x\leq 2$; per ***x=1***, si ha $2-3^y=7$, che è impossibile; anche per ***x=2***, ottenendo $2^2-3^y=7$, si giunge ad un'equazione impossibile.

Supponiamo quindi ***x, y pari***; in questo caso, $x=2l,\ y=2m$, con ***l*** e ***m*** numeri naturali.

L'equazione data si può allora scrivere nella forma:

$$\left(2^l+3^m\right)\left(2^l-3^m\right)=7, \qquad \texttt{[007.002]}$$

dove le due parentesi sono numeri naturali; essendo ***7*** un numero primo, le due parentesi possono essere pari solo a ***7*** e a ***1***; inoltre, deve essere $\left(2^l+3^m\right)=7$ e $\left(2^l-3^m\right)=1$, in quanto il secondo è minore del primo. Deve allora essere ***l=2*** e ***m=1***, ossia ***x=4*** e ***y=2***. E questi sono gli unici valori ammissibili.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 A che punto è la notte – [001] Vespro

Questo pezzo ha un mucchio di inizi. Ma parla un mucchio di volte della stessa cosa.

Come disse un famoso politico italiano anni fa, "A pensare male si fa peccato, ma sovente ci si azzecca". Se la vostra impressione è che questo pezzo sia estremamente noioso e parli di cose note a tutti, avete perfettamente ragione. E se pensate che l'autore di queste righe lo abbia scritto perché buona parte di queste cose le aveva allegramente dimenticate, avete pensato talmente male da centrare in pieno la ragione. Non a giustificazione, un po' di storia.

Un lettore ci aveva chiesto se potevamo scrivere qualcosa in merito alla dimostrazione di un certo teorema[17], possibilmente messa in termini comprensibili; Rudy si è accorto che quella era una delle sei cose che non sapeva (si rifiuta di dirci quali sono le altre cinque, ma riteniamo abbiano a che fare con la teoria galbraithiana del profitto e il Codice di Voynich), e si è lanciato nella ricerca di vecchi libri e nuovi siti, chiudendosi in clausura per quindici giorni e uscendone con l'aria di chi sicuramente non ha visto la luce, ma a occhio e croce non ha neanche visto la curva a metà galleria.

Ricominciamo. *[RdA speaking]* Prima o poi di questo dovevamo parlarne, anche perché avevo trovato un paio di cose interessanti che richiedevano un certo ripasso; il guaio, qui, è che se ti perdi un passaggio sei fregato, e *sembra* facile dire "questo lo so..." e passare al paragrafo successivo, dove ti ritrovi, per dirlo con la mia supplente di mate preferita, nell'organico fino al collo. Vi invito quindi a fare uno sforzo e a seguire il tutto, ignorando le eventuali approssimazioni inserite per amor di semplicità e procedere con calma, possibilmente giocandoci un attimo sopra.

Anche se non sembra, la cosa porterà ad interessanti conclusioni, in un futuro ragionevolmente prossimo. Allora, cominciamo per la quarta volta, questa volta *seriamente.*

Tutti voi vi ricordate cos'è un gruppo; quindi, ve lo rispiego.

Si definisce ***Gruppo*** un insieme ***A*** associato ad un'***operazione chiusa*** sull'insieme,

$$G = \{A, \otimes\} : \forall p, q \in A \Rightarrow p \otimes q \in A \qquad \texttt{[008.001]}$$

soddisfacente gli assiomi di:

Associatività

$$\forall r, s, t \in G \Rightarrow r \otimes (s \otimes t) = (r \otimes s) \otimes t, \qquad \texttt{[008.002]}$$

Esistenza e unicità dell'***elemento neutro***

$$\exists! I \in G : \forall p \in G \Rightarrow I \otimes p = p \otimes I = p, \qquad \texttt{[008.003]}$$

Esistenza e unicità dell'***inverso***

$$\forall x \in G, \exists! x^{-1} : xx^{-1} = x^{-1}x = I. \qquad \texttt{[008.004]}$$

Non so voi, ma la prima volta che me l'hanno spiegata, questa roba, la domanda è stata: "Tutto chiaro, ma ci sarebbe un esempio, possibilmente non infinito e che non siano i razionali?". La fortuna di avere dei buoni insegnanti si vede anche da questo; due minuti con carta e forbici e (ottenuto un triangolo suppergiù equilatero) l'esempio era pronto; le

[17] Vince il solito abbonamento gratuito chiunque riesca ad indovinare ***adesso*** dove andremo a parare. Aiutino: il titolo è molto importante, nel senso che è una battuta tremendamente stupida.

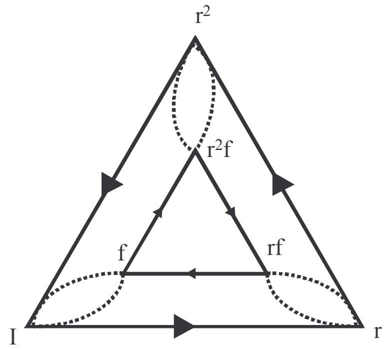
rotazioni (di sessanta gradi) del triangolo formano gruppo, in quanto soddisfano tutti gli assiomi sopra elencati; non sto a farvi il disegno perché presumo che siate in grado di visualizzarlo (o ve lo siate già costruito).

Come qualcuno di voi ricorderà, sono possibili anche altre rappresentazioni, a parte quella strettamente "fisica" del costruirlo; una delle più noiose da costruire è probabilmente la ***tavola di moltiplicazione*** del gruppo, che vi ritrovate qui di fianco (si spera).

	I	r	r^2
I	I	r	r^2
r	r	r^2	I
r^2	r^2	I	r

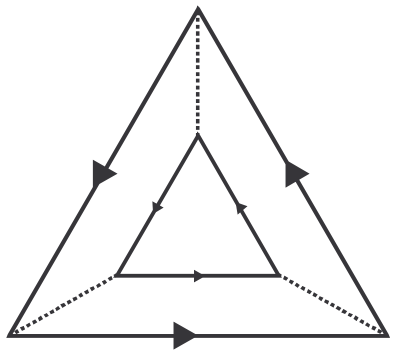
È evidente che, se vi serve un gruppo un po' più numeroso, non vi resta altro da fare che prendere un poligono con più lati e costruire lo stesso schemino; semplicemente, anzichè il ***Gruppo Ciclico*** C_3 ne ottenete un altro.

Il bello del nostro esempio è che può essere esteso anche a concetti decisamente più complicati; infatti, è abbastanza intuitivo che, oltre all'operazione ***r*** di rotazione potete considerarne anche un'altra, di ***riflessione***, che indicheremo con ***f***; il gruppo in questo caso diventa abbastanza numeroso (sei elementi, se fate il conto) e fare la tabellina è ancora più noioso; in questo caso, la rappresentazione è decisamente più chiara attraverso il ***Grafo di Cayley***, che dovreste trovare qui di fianco e che è noto come ***Gruppo Diedrico*** D_3.



"Perché dici che la tabella è noiosa? E questo, no?" Beh, no. Secondo me, il Grafo di Cayley permette di vedere immediatamente molte più cose, in un gruppo, che nella tabella sono piuttosto nascoste; ad esempio, la ***non commutatività***: qui è piuttosto immediato accorgersi che $rf \neq fr = r^2 f$; con la tavola, la cosa è più complicata. E poi, si vede subito che stiamo parlando di triangoli; è triangolare...

Già, e se ci servisse un gruppo ***commutativo***? beh, con il Grafo di Cayley è immediato costruirlo; basta "cambiare il senso" delle frecce del triangolo interno, e il gioco è fatto. Il Grafo di Cayley lo trovate (in forma semplificata, forti del fatto che $f^2=I$ e quindi non servono le frecce) qui di fianco.



Come è fatto, 'sto gruppo? Beh, abbiamo messo assieme un Gruppo Ciclico (C_3: sarebbero le rotazioni) con un altro Gruppo Ciclico (C_2: sarebbero le riflessioni) e abbiamo imposto che gli elementi dell'uno *commutino* quando sono associati agli elementi dell'altro... In un certo qual senso, abbiamo "moltiplicato" i due gruppi tra di loro; e, infatti, la cosa si chiama ***prodotto diretto***; un po' più formalmente, si definisce il prodotto diretto tra i nostri due gruppi come:

$$C_3 \times C_2 \Leftrightarrow \begin{cases} C_3 \cap C_2 = I \\ \forall (a \in C_3, b \in C_2) \Rightarrow a \otimes b = b \otimes a \end{cases} \qquad \text{[008.005]}$$

Certo che anche fare i disegni... a manina sarà divertente, ma con Powerpoint è tutt'altro che semplice; forse, qualche altro modo di vedere il gruppo... Tranquilli, c'è, anche se si "vede" piuttosto poco; il nostro gruppo può essere definito attraverso le ***Relazioni di Definizione***:

$$r^3 = f^2 = rfr^{-1}f^{-1} = I \qquad \text{[008.006]}$$

Dove abbiamo detto che ***r*** appartiene ad un Gruppo Ciclico di ordine ***3***, ***f*** appartiene ad un Gruppo Ciclico di ordine ***2*** e questi due aggeggi commutano tra di loro[18].

Questo giochino funziona *quasi* sempre; infatti, possono esistere dei gruppi che ***non*** hanno Relazioni di Definizione (esempio classico: C_∞, che voglio sperare non resisterete alla tentazione di costruirvi da soli); questi vengono detti ***Gruppi Liberi***[19].

Alice è gentilmente invitata a fermarsi qui[20].

Per il semplicissimo motivo che esiste un altro modo di visualizzare la cosa, basato sulle ***permutazioni*** (è statisticamente dimostrato che nel 70% dei casi i gruppi finiti vengono spiegati solo attraverso questo concetto, origine di buona parte dei disamori per questa materia); lo diamo per capito, liquidandolo in poche righe e una tabella sempre sul nostro Gruppo Diedrico.

Se ripescate il triangolino usato per generare ***C₃*** e chiamate i vertici (senso antiorario) ***A***, ***B*** e ***C***, vi accorgete che l'operazione ***r*** mette sostanzialmente ***A*** al posto di ***B***, ***B*** al posto di ***C*** e ***C*** al posto di ***A***; ossia, potete indicare il nostro gruppo attraverso questi movimenti; i vari elementi diventano allora[21]:

$$\begin{array}{lll} I = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix} & r = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} & r^2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix} \\ f = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} & fr^2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} & fr = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{[008.007]}$$

Mai piaciuta molto, questa notazione... L'unica che mi piace ancora meno è quella (tipica dei testi americani) che si basa sulle trasposizioni, indicando all'interno di una parentesi come si scambiano tra di loro gli elementi; mi limito a darvi la tabella equivalente a quella qui sopra, credo sia chiaro di per sè.

$$\begin{array}{lll} I = (A)(B)(C) & r = (A,B,C) & r^2 = (A,C,B) \\ f = (A,C)(B) & fr^2 = (A)(B,C) & fr = (A,B)(C) \end{array} \qquad \text{[008.008]}$$

Aggiungete che le rappresentazioni non sono uniche, e il disinteresse sarà completo.

Va detto che ha una sua utilità; ad esempio, se volete studiare il ***Gruppo Tetraedrico*** indicato solitamente con A_4, ottenuto dalle rotazioni attorno ad un'altezza (***r***) o attorno ad una mediana (***f***) di un tetraedro[22] e chiamate i vertici semplicemente con dei numeri, avete che le trasformazioni dei generatori sono:

---

[18] Posto che non siate già caduti addormentati, per quanto riguarda il ***Gruppo Diedrico*** (genericamente di ordine ***n***) le Relazioni di Definizione sono $r^n = f^2 = (rf)^2 = I$ e, come già parzialmente visto, per ***n>2*** il gruppo ***non*** è commutativo. $D_2 = C_2 \times C_2$ ve lo costruite da soli, che è facile.

[19] Se andate a rivedervi il secondo "pezzo" sul Paradosso di Banach-Tarski ("Due palle cosi! – [002] – Il contrartio di 'Gestalt', ovvero..."; RM64, maggio 2004) trovate un'altra definizione di Gruppo Libero; se riuscite a dimostrarne l'equivalenza, vi diciamo "bravi".

[20] Odio ammetterlo, ma mi sono fermata molto prima…[AR]

[21] Confermiamo ufficialmente che qui è stato usato il triangolino di carta, per generare la tabella.

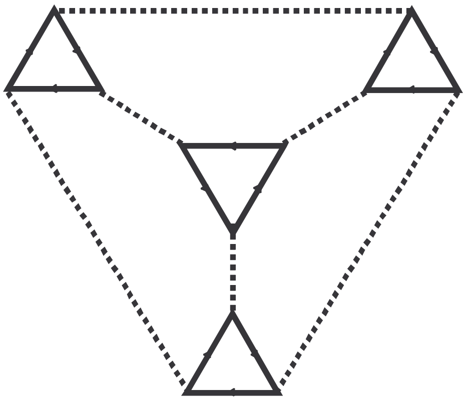
[22] Su RM45 (ottobre 2002), "Suppergiù platonicamente perfetto [001]" trovate un metodo per costruire il tetraedro (e altro) accessibile anche a Rudy e a Doc.

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1,2,3) = (1,2)(1,3)$$
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3)(2,4) \qquad [008.009]$$

mentre le Relazioni di Definizione risultano:

$$A_4 : \begin{cases} r^3 = I \\ f^2 = I \\ (rf)^3 = I \end{cases} \qquad [000.010]$$

e il Grafo di Cayley è l'anticamera di un incubo (lo dovreste trovare qui di fianco, se tutto va come deve); giusto per capirci qualcosa, è un tetraedro (fatto dalle linee tratteggiate) troncato (dai triangolini più piccoli).



Bisogna ammetterlo, in questi casi la notazione per trasposizioni è decisamente più chiara, anche se a molti di noi non piace.

Liberi di cominciare ad elucubrare sulla similitudine tra le Relazioni di Definizione del Gruppo Diedrico e di quello Tetraedrico o, attività sicuramente più divertente, di costruire qualche gruppo; se proprio volete il compito a casa, sono abbastanza divertenti i gruppi $G = C_2 \times C_4$ e $G = C_3 \times C_3$. O anche (attenzione che ***non*** sono Relazioni di Definizione: non c'è scritto che siano pari all'identità) il gruppo definito da $a^2 = b^2 = (ab)^2$. Di questo, tra l'altro, ne dovremo riparlare... Ma non subito.

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms