

1. Sineddochi.....	1
2. Problemi.....	15
2.1 Ardite speculazioni terriere.....	15
2.2 La barca di Rudolph.....	16
3. Bungee Jumpers.....	16
4. Soluzioni e Note.....	16
4.1 [011].....	17
4.1.1 Problema da un altro Rudolph.....	17
4.2 [066].....	17
4.2.1 PMP.....	17
4.2.2 Dario Bressanini (quasi).....	27
4.2.3 Caronte.....	34
5. Quick & Dirty.....	38
6. Pagina 46.....	38
7. Paraphernalia Mathematica.....	42
7.1 Un paio di oggetti curiosi.....	42



1. Sineddochi

Meditate, gente, meditate.

Meditate, perché ci sono sempre centinaia di buone occasioni per farlo: e in vacanza queste occasioni aumentano a dismisura. Ad esempio, potreste meditare in maniera leggera e un po' dissacrante, notando che le tre parole d'apertura di questo compleanno altro non sono che un vecchio slogan pubblicitario, reso celebre una ventina d'anni fa (o forse più) da un noto showman e clarinettista. O potreste meditare in maniera accorta e futuribile (questa modalità riesce molto meglio a chi legge i pezzi celebrativi di apertura di RM solo dopo aver dato una scorsa generale a tutta la rivista), meravigliandovi del fatto che questo numero sessantasette di RM ha identici incipit ed explicit¹. Coincidenza? Certo no, visto che ne parliamo all'interno della rivista stessa, in un pedestre tentativo di autoreferenza: ma quale sarà stato allora il meccanismo che ha generato la finta coincidenza? L'autore della prima pagina di RM ha forse letto in anticipo quanto scritto dall'autore dell'ultima, e ha quindi giocato alle citazioni? O è avvenuto il contrario? O uno dei due ha invece esplicitamente richiesto all'altro di cominciare/finire il proprio pezzo con quella frase

¹ L'explicit è il contrario dell'incipit. Ergo, visto che l'incipit è l'inizio del testo, l'explicit ne è la fine.

prestabilita? E se fosse davvero andata così, per quale scopo avrebbe dovuto mai farlo? Per farvi meditare su queste sciocchezze? O solo per avere la soddisfazione di vedere i propri ordini mentali obbediti, visto che, in un modo o nell'altro, state davvero meditando come la frase vi chiedeva di fare?

Un vecchio manuale popolare di psicologia si avventurava nella distinzione dei termini “meditazione” e “concentrazione”; distinzione che veniva introdotta essenzialmente tramite i concetti paralleli di “estensione” e “profondità”. Si prefigurava insomma una similitudine tra l'indagine mentale e la penetrazione nella madre terra. La concentrazione veniva assimilata allo scavo di un pozzo profondo: nulla sfuggiva all'indagine d'una concentrazione ben diretta, che procedeva sicura e verticale verso le conoscenze più nascoste: a fondo, sempre più a fondo, purché entro il perimetro ben delimitato del pozzo/argomento. L'analogia procedeva bene perché lo scavo era ben mirato verso uno scopo (acqua/soluzione) assai chiaro e preciso. La meditazione, invece, era diretta soprattutto all'indagine aperta e attenta, anche se solo a livello superficiale. Come l'aratro che taglia le zolle, e nel farlo cambia la faccia dei campi: il solco è superficiale, nulla a che vedere con la profondità del pozzo di poco sopra; ma l'aratura si perde fino all'orizzonte, in tutte le direzioni, e modifica il paesaggio.

La meditazione è per propria natura attività indipendente e poco controllata, quasi fine a sé stessa: si nutre delle analogie e della libera associazione di idee. Ve ne state sulla spiaggia, in riva ad un mare estivo e caldo, con la testa finalmente sgombra dai pensieri quotidiani che sono spesso imbrigliati dalla tirannica triade lavoro-studio-casa; osservate in totale nullafacenza neuronica il bagnasciuga, dove il fronte dell'acqua del mare batte e ribatte su una pietra lisciata dalle onde. Senza preavviso, nella vostra testa scatta la connessione tra il ritmico movimento del mare sulla pietra e l'analogo movimento che lo straccio bagnato fa sul pavimento di casa quando siete di corvè per le pulizie domestiche. Un ricordo sonnacchioso ne approfitta per ribadire che lavare i pavimenti non vi piace affatto: molto meglio lavare la macchina, ad esempio... magari in quei simpatici auto-autolavaggi², dove in cambio dell'acquisto di qualche gettone vi concedono in affitto una pistola che lancia un bel getto d'acqua ad alta pressione³: spararlo sulla carrozzeria della macchina lurida di polvere dà una bella sensazione di potere e di utile divertimento. Il pensiero pigro e sonnolento può poi forse soffermarsi sulla stranezza data dalla constatazione che anche le signore più categoriche e inflessibili nei riguardi della pulizia domestica riescono pacificamente a convivere con automobili assolutamente fetenti, mentre usualmente per i maschietti vale esattamente il contrario (macchina tirata a lucido e casa che può lecitamente ospitare una camionata di cinghiali); e infine si può cominciare quasi a costruire una teoria in merito al superbo mistero che si sta

² “Auto-autolavaggio” è insegna esistente e presente nel mondo reale, abbiamo testimoni oculari a disposizione. Anche se un'insegna non ha la stessa dignità d'una voce di dizionario, è curioso come il duplice “auto” nasca dalla medesima radice greca, ma veicoli un significato ormai trasposto per il secondo “auto”, mentre mantiene quello originale nel primo. Traducendo brutalmente “auto” con “da sé”, si vede bene che “la macchina automobile” è “la macchina in grado di muoversi da sola”, senza bisogno di bestiame che la traini: ma “automobile” è ormai parola tanto diffusa e utilizzata che si è mangiata integralmente il significato del prefisso “auto”. Quindi, l'automobile diventa l'auto (che si tratti d'una sineddoche attuata direttamente sulla parola, anziché sul significato?) e l'autoradio non è certo la cosa che “si irraggia da sola”, ma più semplicemente la “radio dell'automobile”. Così l'autolavaggio è il posto dove si lavano le automobili, e non il posto dove ci si lava da soli. Inevitabilmente, l'autoautolavaggio diventa il posto dove si lava senza alcun aiuto esterno la propria automobile.

³ “Getto ad alta pressione” è ormai quasi un luogo comune del linguaggio, ma ciò non toglie che l'espressione sia sostanzialmente sbagliata: il migliore dei fisici che abbiamo in redazione chiosa e fa notare, forte del principio di Bernoulli, che ad essere “alta” in questo caso è la velocità, non la pressione. Come spiegano mirabilmente le code in autostrada, quando la pressione sale la velocità scende; quando la pressione crolla (fine della coda) la velocità è tale da entusiasmare anche il più tollerante degli autovelox della Polizia Stradale.

dipanando sotto l'ombrellone: l'automobile è forse un simbolo? Uomo – procacciatore di cibo – caccia – ruolo sociale prevalentemente esterno alla tana; donna – cura della prole – stanziale – ruolo prevalentemente interno alla tana. Da qui a statuire che le donne tendono a riversare cure sulla magione mentre i maschietti tendono a curare soprattutto ciò che dalla magione riesce ad allontanarli in fretta, il passo è breve. Reminescenze primitive che superano le ere geologiche, e si condensano tuttora nel sorprendente fatto che i maschietti comprano gli *Arbre Magique* dal benzinaio e le femminucce riempiono i carrelli del supermercato col *Mastro Lindo*.

Ecco, non sono passati neanche cinque minuti da quando vi siete stravaccati sulla sdraio, e avete già prodotto una mezza teoria sociologica in grado di connettere gli aspetti selettivi del marketing occidentale al genere dell'acquirente, e che al contempo è in grado di fare imbufalire uno stuolo di femministe. Tutta colpa del cervello nella libera uscita scatenata dalla meditazione. Se proprio dovete mettervi a fantasticare sulla spiaggia, non è meglio farlo su argomenti che non rischiano di farvi litigare con la fidanzata? È ben vero (lo abbiamo appena ricordato) che il bello della meditazione sta proprio nella sua libertà, nelle libere associazioni, e che pertanto non è carino cercare appositamente qualcosa su cui meditare, censurando a priori percorsi potenzialmente perigliosi: però, diamine, guardatevi intorno! Siete nel posto perfetto per analizzare uno dei maggiori problemi della fisica classica e contemporanea, e voi sprecate le meningi inseguendo i deodoranti a forma di pino silvestre?

Il Grande Problema sta proprio lì, davanti ai vostri occhi. Almeno, una sua parte; l'altra parte la state calpestando coi piedi nudi e sudati. Le onde del mare avanzano pigre verso il vostro ombrellone, spegnendosi con un piccolo suono di risacca a non più di dieci metri da voi: i vostri piedi scavano buche nervose tra i granelli di sabbia, spostando milioni di minuscoli corpuscoli alla ricerca di un po' di frescura. Onde del mare, granelli di sabbia. Onde, corpuscoli.

Il dualismo onda-corpuscolo è un mostro sacro della fisica. Generato dall'apparentemente innocente domanda "Ma come diavolo è fatta la luce?", ha iniziato a tormentare le menti dei filosofi naturali fin dall'antichità: a differenza di altri quesiti storici, però, questo ha attraversato indenne (anzi rafforzandosi) anche i secoli razionali, dal Seicento newtoniano all'appena defunto ventesimo secolo. Rafforzandosi, perché la domanda nata appositamente per la luce si è poi estesa alla materia (e quindi all'energia), e alle particelle elementari (mettendo pertanto in dubbio anche il significato stesso del termine "particella"). Onde o corpuscoli? Granelli di sabbia o acqua mobile del mare? Come dobbiamo immaginarci il materiale che costituisce il mondo e noi stessi?

Ah, non ci proveremo neppure, a raccontare i misteri e gli aneddoti che infarciscono il dualismo più celebre della storia della fisica. Ci sono decine di migliaia di belle pagine scritte da autorevolissimi autori, a qualsiasi livello si voglia affrontare il problema. Prendono tutte benissimo il lettore per mano, mostrandogli come alcuni fenomeni denunciino perfettamente la natura ondulatoria della luce, nonostante la convinzione contraria del sommo Newton: più avanti, raccontano il quanto di luce introdotto da Einstein che, per spiegare l'arcigno effetto fotoelettrico, tira fuori dal cilindro il concetto di fotone, riabilitando il vecchio Sir Isaac (e per una volta i due si trovano quasi d'accordo, dopo aver marchiato con aggettivi eponimi e contrapposti il tempo e lo spazio). E poi la rivoluzione di De Broglie, che sfonda il fronte più imprevisto: quando sembra tornare in auge la teoria corpuscolare della luce, il francese introduce l'ipotesi ondulatoria della materia. E via così, in un susseguirsi di ipotesi ed esperimenti, teorie ed equazioni che provano (e in genere ci riescono) a coniugare magnificamente sia l'aspetto ondulatorio che quello corpuscolare dei mattoncini dell'universo. E poi Bohr, con il principio di complementarietà; e Bragg,

celebre per il suo esperimento di diffrazione dei raggi X da parte dei cristalli, ma anche per l'ipotesi (non si sa bene quanto scherzosa) asserente che *“la luce si comporta come onda nei giorni pari, e come corpuscolo in quelli dispari”*.

Si esce da quei libri affascinati, spesso ancora un po' confusi, con la tentazione semplicistica di mettere pace tra i contendenti tramite una banale sostituzione di congiunzione (“Onda o Corpuscolo?” – “Onda e Corpuscolo!”). Eppure, siamo pur sempre in Agosto, sempre sulla riva del mare, sempre con i granelli di sabbia sotto i piedi e con le onde del mare dentro gli occhi e dentro le orecchie. È il momento buono per dimenticare tutto, indossare i calzoncini corti (da bagno o meno che siano) dei bambini, e prendere seriamente in considerazione la sabbia e i cavalloni. Un granello di sabbia è, nella testa d'un bimbo, un'ottima rappresentazione del concetto di “corpuscolo”; è piccolo, forse la cosa più piccola che si possa ancora “vedere”, ed è ragionevolmente indivisibile. Ancora pochi anni di scuola, e anche il bambino scoprirà che occorrono esponenti di tutto rispetto per rappresentare il numero di atomi che compongono quel granello di sabbia, ma per il momento esso è quasi perfetto nel ruolo del corpuscolo ideale. Tanto perfetto che, probabilmente, nella testa del bambino anche il concetto di “punto matematico”, se dovesse mai cominciare a farsi strada in quelle giovani meningi, partirebbe quasi certamente dalla stessa rappresentazione: il granello di sabbia, l'elemento più piccolo di materia; il granello di sabbia, un punto geometrico.

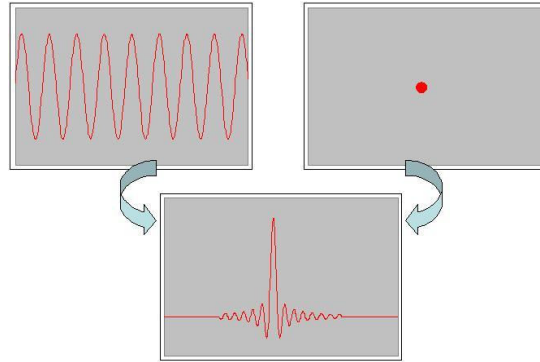
Se è vero che questa “coincidenza di idee” esiste, almeno a quell'età, abbiamo di fronte già un problema di una certa rilevanza: il granello di sabbia, in quanto corpuscolo fisico, ha tutte le dimensioni dell'universo fisico, mentre il punto matematico non ne ha neppure una. L'abitudine a “disegnare punti” è attività sacrosanta e meritoria (se i nostri progenitori non avessero cominciato a disegnare punti, rette e cerchi sulla sabbia e sulle tavolette di cera, col cavolo che staremmo qui con una e-zine di matematica ricreativa in mano), ma agli adulti matematicamente acculturati dovrebbe essere ben evidente e stridente la contraddizione implicita che si attua ogni volta che si “disegna” un punto: la matita, il gesso, la penna, i pixel sulla tastiera compaiono, invadono spazio e introducono dimensioni proprio per identificare quell'ente che dimensioni non ha.

La contraddizione interna del granello di sabbia, istintivamente eletto a rappresentante sia del punto fisico che di quello matematico, si scontra inoltre con altrettanta ferocia con il concetto di onda. Gli studenti che cominciano a avventurarsi nei meandri dei comportamenti corpuscolari e ondulatori della materia arrivano spesso a invocare una sorta di pace: “Ma alla fine, che ci sarà di tanto sconvolgente, in questo dualismo? Un po' onda e un po' particella, per la miseria, e facciamola finita!”. E non è neanche un atteggiamento sbagliato, alla fin fine: ma ogni tanto bisogna tornare a stupirsi, e a vedere cosa si stia (magari solo per sfinimento) accettando. L'onda del mare è solo una pallida approssimazione dell'onda ideale: l'onda è infinita, percorre l'asse cartesiano delle x con sublime e armonioso ritmo, in un ripetersi interminato. Se il confronto tra il granello di sabbia, piccolo minuscolo e invisibile, e il cavallone che si è appena schiantato sulla riva (facendo urlare quella bionda niente male che prendeva il sole) vi sembra eccessivo per una mera questione di dimensioni⁴, dovrete essere vieppiù stupiti dal fatto che onda e corpuscolo sono davvero uno la contraddizione dell'altro, dal punto di vista della

⁴ Solo in seconda lettura ci accorgiamo che la lingua italiana pullula di tranelli. Si parlava prima di dimensioni geometriche, nel senso di “mono-bi-tridimensionale”, poi è saltato fuori dalla tastiera questo “dimensioni” che invece va letto solo nella comune accezione di “quantità”, come quando si dice “di grandi dimensioni” intendo qualcosa di voluminoso, e non un ente iper-iper-spaziale.

collocazione spaziale e dimensionale⁵. Il punto è perfettamente definito, e non occupa spazio. L'onda è perfettamente distribuita, da più a meno infinito, ed è quasi un sinonimo dello spazio che occupa. Il punto si può immaginare fermo o in moto, ma la definitezza della sua posizione spaziale è così psicologicamente forte, nella rappresentazione mentale che abbiamo, che il movimento è considerato quasi come un "accidente", un mero e facoltativo attributo del punto stesso. L'onda è invece il movimento perfetto: è il movimento assoluto, al punto che la sua forma più immota, l'onda stazionaria, è il corrispondente magico e misterioso della libellula che vibra con assoluta maestria le quattro ali per restare sospesa sempre sopra lo stesso punto del terreno.

Poche cose sono diverse, costituzionalmente e radicalmente, quanto lo sono il corpuscolo e l'onda. Anche nelle forme meno ideali e più usuali, siamo abituati ad essere attraversati da onde (state usando il cellulare, sotto l'ombrellone? State prendendo la tintarella?) e terrorizzati dall'essere attraversati da corpuscoli ("Bang! Ti sparo, mamma, se non mi lasci fare il bagno! Sono già due ore che ho mangiato!" – "Posa subito quella pistola a tappi, che potresti fare del male a qualcuno!"). E quel che i fisici hanno fatto, per risolvere il problema, è, in fondo, un bel compromesso ideologico: hanno preso l'onda infinita e l'hanno compressa, strizzata, e infine localizzata (beh, quasi...) nello spazio del corpuscolo. L'onda rinuncia alla sua infinita estensione, per trovare in cambio una posizione spaziale definita: il corpuscolo rinuncia alla sua perfetta finitezza e localizzazione⁶, ma si riveste adesso di tutte le proprietà magiche delle onde, come l'interferenza e la diffrazione. Il risultato di quest'ardita costruzione compromissoria è lo sfuggente e mistico "pacchetto d'onda", uno dei protagonisti assoluti della Meccanica Quantistica.



C'è davvero tanta matematica, dietro a questo sposalizio ideale tra l'infinito dell'onda e l'infinitesimo del punto; il risultato concettuale è comunque audace e sorprendente, anche a prescindere dalle regole di calcolo che poi gli verranno cucite addosso, tramite l'Equazione di Schroedinger e mille altre. Il pacchetto d'onda è una sineddoche; e come fa spesso anche la sineddoche vera e propria, contiene un messaggio più forte del concetto iniziale. "La parte per il tutto" è il principio che guida questa antica figura retorica: si incontra spessissimo nel linguaggio comune. Il tormentone della "fuga dei cervelli" dal patrio suolo verso nazioni che tengono in miglior conto la ricerca scientifica ne è un trito esempio: i "cervelli" in questione fuggono solitamente accompagnati anche da tutte le altre parti del corpo, perché non vengono estratti dalla scatola cranica dei legittimi possessori al momento del passaggio delle frontiere. È solo che la parte che viene ritenuta più significativa degli

⁵ Ecco, come volevasi dimostrare: in questo caso, "dimensionale" va invece inteso nel senso geometrico. Ah, che fatica, questi linguaggi così ambigui...

⁶ La parte divertente dello scrivere i compleanni su RM è che il rigore scientifico utilizzato è talmente basso che si riesce quasi sempre a trovare una scorciatoia verso altri concetti (purché affrontati anch'essi col medesimo, scarsissimo, rigore): ad esempio, da questa velocissima e assai approssimativa constatazione si potrebbe provare a far discendere, quasi con inevitabile naturalezza, perfino il Principio di Indeterminazione di Heisenberg. La parte meno divertente è che il mio augusto professore di Meccanica Quantistica di solito legge RM, compleanni compresi, e forse adesso sta meditando di togliermi il saluto. Spero proprio che non lo faccia, me ne dispiacerebbe assai; in alternativa, potrebbe piuttosto presentare istanza al Senato Accademico per inficiarmi a posteriori qualche esame ormai passato in giudicato (e pure in prescrizione, ormai...); questo sarei in grado di sopportarlo benissimo.

scienziati è il cervello, e quindi è quella la parte dello scienziato che viene usata per descrivere lo scienziato nella sua interezza. La *sineddoche* è usatissima, e non è certo vincolata al linguaggio colto, anzi: per evitare di farci scrivere sconcezze, limitatevi ad immaginare il banale e triviale commento che si possono scambiare un paio di ragazzotti non troppo sofisticati quando vedono passare una ragazza molto attraente, e avrete ricostruito quella che è probabilmente la *sineddoche* più usata della lingua italiana.

La “parte per il tutto”⁷ è ben lontana dall’essere una limitazione. Quando scriviamo “cervello” nel suo senso originario e piano, abbiamo una definizione generale e aspecifica di un organo del corpo umano. Quando diciamo “cervello” intendendo “scienziato”, non facciamo solo l’operazione di sintetizzare il soggetto scienziato in un una parte di esso, ma valorizziamo anche la parte stessa: è un “cervello” speciale, importante, caratteristico, significativo: altrimenti col cavolo che lo avremmo scelto come veicolo della nostra *sineddoche*. Il pacchetto d’onda segue il medesimo iter: non è solo una “parte” dell’onda, perché è proprio il suo essere “solo una parte”, e quindi non più infinita e indefinita dal punto di vista spaziale, a rendere il pacchetto così importante e significativo. L’essere “onda” non è meno importante dell’essere “parte”, certo; ma è proprio l’unione delle due cose che fa fare il salto concettuale e dimensionale. Dimensionale, perché anche il corpuscolo rinuncia alla sua nullità dimensionale, e ne acquista una, due, tre, quattro... tutte quelle necessarie per passare da “niente matematico” a “ente fisico”. Da punto a granello di sabbia.

Se il pacchetto d’onda vi sembra ancora un ente fisico troppo teorico, troppo “ad hoc” costruito, vale la pena considerare i successi indiscutibili che la sua introduzione ha portato nello studio della struttura atomica e nucleare. Successi tanto vasti e importanti che il metodo è alla base anche della teoria fisica contemporanea più celebre e promettente: la Teoria delle Stringhe raggiunge in brevissimo tempo livelli di complicazione concettuale e matematica tali da farla apparire inaccessibile anche nei testi di divulgazione⁸, non fosse altro perché lo stuolo di dimensioni invocate dalla teoria diventa rapidamente terrorizzante, e questo varrebbe anche se non fossero “ripiegate su sé stesse”. È significativo però che l’embrione iniziale della teoria che mira all’unificazione di tutte le interazioni fisiche consista sostanzialmente nella sostituzione del “punto” gravitazionale con una stringa o corda: le vibrazioni di queste corde conducono a complicazioni affascinanti e complesse, ma per chi, come noi, non riesce a seguire facilmente i percorsi concettuali della M-Teoria, il punto essenziale e significativo sembra essere sempre la sostituzione del “punto matematico” con un microscopico “ente esteso oscillante”.

I fisici, però, non fanno altro che fare il loro mestiere, quando rinunciano al punto a zero dimensioni sostituendolo con altri enti dotati di dimensioni e grandezze, perché non fanno altro che rinunciare ad una semplificazione. Il considerare gli enti fisici come “idealmente” riconducibili ai punti euclidei in molte applicazioni della meccanica è stata un’idea geniale e fecondissima, come lo è stata quella di Galileo di considerare puro “accidente” la resistenza dell’aria durante lo studio della caduta dei gravi: ciò nondimeno, talvolta è opportuno rinunciarvi, specialmente se si decide di studiare come cade un corpo dotato di paracadute; e non c’è fisico che non sappia perfettamente che compie una necessaria approssimazione (anzi, una vera e propria “idealizzazione”) ogniqualvolta considera un ente fisico puntiforme.

⁷ *Sineddoche*: dal greco “sin” e “dekhomai”, “insieme ricevo”, la parte per il tutto; ma anche, più raramente, “il tutto per la parte”.

⁸ Come ad esempio “L’Universo Elegante”, di Brian Greene, Einaudi, Euro 20,50.

Il medesimo lusso non può concederselo il matematico: per lui il punto vero è il punto matematico, ed è ben lungi dall'essere l'idealizzazione di qualcos'altro. Anzi, a ben vedere, il matematico compie esattamente l'operazione opposta a quella del fisico, quando con il gesso disegna un punto geometrico sulla nera lavagna d'ardesia; lascia una minuscola traccia di gesso che ha il mero ruolo di nodo al fazzoletto, perché la traccia di gesso ha tutte le dimensioni canoniche dello spazio fisico (spessore compreso), ma gli serve solo per fissare un concetto che non è disegnabile. Le linee matematiche hanno invece dimensione, e contengono infiniti punti, infinite nullità dimensionali: i punti a dimensione zero sono contenuti nelle linee a dimensione uno, ma ne sono anche i soli costituenti? Basta affermare che una linea è composta di punti per identificare la linea? È lecito assumere il punto come "parte per il tutto" d'una retta? O, continuando la nostra ormai trita similitudine, può il punto essere la sineddoche d'una retta?

Di primo acchito, la risposta non sembra così facile: il "salto dimensionale" da punto a linea sembra coinvolgere qualche altro aspetto, qualche ulteriore elemento che non è ancora entrato in discussione: l'essere composta di punti non basta a definire la retta, come il contenere infinite rette non basta a definire il piano. Questo in parte è ovvio: una retta ha anche altre ben definite proprietà, oltre a quella di "contenitore" di punti. Ad esempio, quelle proprietà che ci consentono di distinguerla da una parabola, e di distinguere quest'ultima dalla traiettoria d'una mosca in volo; ma il punto in discussione è se il salto dimensionale da punto a linea, da linea a piano, da piano a spazio sia davvero un salto qualitativo e discreto, o piuttosto un passaggio continuo.

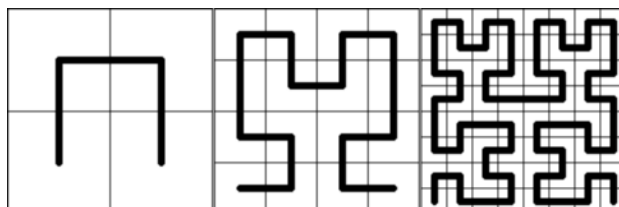
Non è difficile immaginarci il buon Euclide pronto a romperci sulla testa il suo amato compasso, solo per aver ventilato una sciocchezza del genere: le dimensioni della geometria euclidea sono gabbie rigogliose e invalicabili, incluse l'una nell'altra come matriske. Gli abitanti di Flatland⁹ semplicemente non possono immaginare il mondo tridimensionale, così come solo alcuni dotati matematici del nostro mondo riescono ad immaginare un universo con più di tre dimensioni spaziali: ma ci riescono solo attraverso le proprietà matematiche, non "visualizzandolo". Però, i matematici dilettanti del ventunesimo secolo hanno già incontrato oggetti strani e complessi come i frattali, e persino le e-zine gratuite italiane hanno già affrontato il concetto di "dimensione frazionaria", durante le dissertazioni mirate a misurare la lunghezza delle coste dell'Islanda¹⁰. Non siamo a conoscenza di studi dediti a verificare le caratteristiche di dimensioni esprimibili attraverso i numeri reali, ma siamo pronti a scommettere che qualcuno ci stia già pensando. E noi, che non siamo vincolati da nessun rigore accademico o scientifico, possiamo prendere una scorciatoia.

Possiamo cominciare con l'immaginarci un quadrato. Un quadrato qualunque, la figura geometrica più facile, o forse solo la più istintiva. Una volta immaginatolo, dobbiamo solo trovarne il centro, e marcarlo. Non è difficile, vero? Si fa anche restando sulla sdraio in riva alla spiaggia. La metà del lavoro è già fatta, mancano solo due altre azioni: la prima è quella di predisporre a ripetere ricorsivamente una serie di azioni semplici, l'altra quella di immaginare di unire dei punti con una linea, proprio come si fa sulla "Pista Cifrata" della Settimana Enigmistica. Se queste azioni non vi spaventano, cominciamo pure...

⁹ "Flatlandia. Racconto fantastico a più dimensioni", di Edwin A. Abbott; Adelphi, Euro 6.00. Un classico irrinunciabile, direbbero i seri recensori di libri di matematica ricreativa.

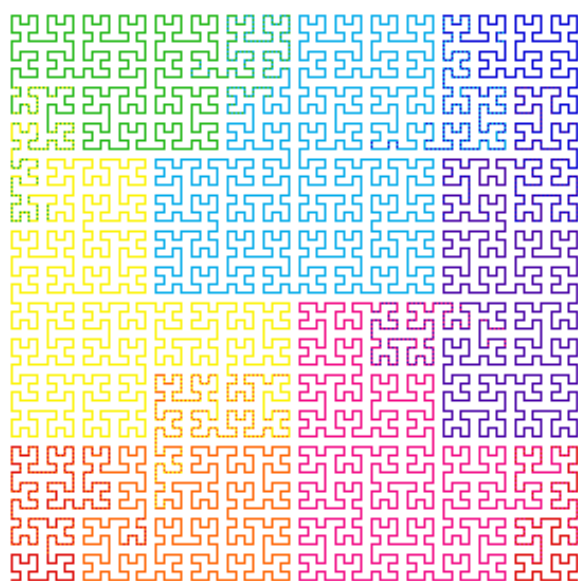
¹⁰ Paraphernalia Mathematica "Roba da Islandesi"; Rudi Mathematici 58 e 59, Euro 0,00.

Avete immaginato il quadrato e il suo centro, e lo avete marcato. Questo è il primo ciclo della ricorsione. Adesso dividete il quadrato in quattro quadrati più piccoli, ognuno di lato pari alla metà del lato originario. Marcate i centri di tutti e quattro i quadrati e uniteli con una linea spezzata di tre segmenti: dal primo al secondo centro, dal secondo al terzo, dal terzo al quarto. E così avete completato anche il secondo ciclo. Adesso dividete ognuno dei quattro quadrati precedenti in quattro quadrati uguali e più piccoli, e... beh, è chiaro il concetto, no? Dovreste subito ottenere qualcosa di questo genere:



e adesso dovete solo continuare. Fino all'infinito, mi raccomando.

Un paio di precisazioni, prima di discutere il risultato finale: ogni passo “moltiplica” per quattro il passo precedente, in modo tale che si abbiano quattro piccole copie ripetute di quanto appena realizzato un attimo prima, ma queste piccole copie si possono sempre connettere tra loro, mantenendo l'unicità della curva: come a dire



curva¹¹.

che ogni passo arricchisce di dettagli il passo precedente, senza cambiarne la natura. Se siete affascinati dalle misure, non è neanche difficile calcolare la lunghezza totale della curva ad ogni ciclo; quel che ci interessa adesso è però solo il fatto che la curva moltiplica ad infinito la sua lunghezza e le sue convoluzioni, pur rimanendo confinata all'interno del quadrato originario. Al punto che, al limite, coincide in tutto e per tutto con il quadrato stesso. Quella che vedete a colori qui a fianco è ben lontana dall'aver raggiunto la coincidenza col quadrato, ma è molto bella, e dovrebbe rendere l'idea di quale sia la tendenza onnivora della

¹¹ Gli affezionati lettori di RM sanno ormai per esperienza che siamo barbari saccheggiatori della rete, quantomeno per le illustrazioni di questi compleanni. Non più del 10% di esse sono autoprodotte (e se tornate indietro a vedere la figura del “pacchetto d'onda”, capite subito il perché). Lanciandoci alla ricerca d'una bella immagine di questa famosa curva che prende il nome dal matematico che celebriamo questo mese (anche se, nelle varianti qui esposte, è talvolta chiamata anche “curva di Hilbert”), ci siamo imbattuti nella pagina <http://mathforum.org/advanced/robertd/lsys2d.html>, dove oltre alle belle figure si trova anche un ottimo articolo a firma di Robert Dickau. Lì si spiega non solo come sono fatte queste curve, ma anche come ottenerle direttamente sul vostro pc. Intimiditi da tanta vastità e bellezza, per una volta abbiamo chiesto ufficialmente (e con un bel po' di timore reverenziale) ai signori del Math Forum della Drexel University di Philadelphia l'autorizzazione a riprodurre qualche loro figura. È probabile che non ci abbiano riconosciuto per i farneticanti che siamo, perché si sono mostrati di gentilezza estrema: ci hanno messo in contatto con l'autore, e Robert si è detto lusingato di concederci la riproduzione della sua figura, mentre Richard Tchen ci ha addirittura inseriti nella loro Internet Mathematics Library. Adesso non montatevi troppo la testa, però: innanzitutto perché abbiamo un numero d'ordine superiore a 65000 (<http://mathforum.org/library/view/65210.html>), e poi perché siamo classificati come rivista buona per lettori dai sei ai dodici anni. Stavamo quasi per intristirci, per questo, quando abbiamo poi realizzato che cotanta

Quello cui ci ha portato questa curva, durante la nostra meditazione da spiaggia, è sorprendente: abbiamo cominciato con un singolo punto (dimensione zero) all'interno del quadrato, abbiamo costruito una curva (dimensione uno) che istericamente riproduce curve e meandri, fino a riempire integralmente il quadrato iniziale, che è notoriamente una figura piana (dimensione due). Ora, non abbiamo intenzione di tirare troppo per le lunghe il passaggio da dimensione zero a dimensione uno: il primo ciclo di ricorsione, quello che trasforma il punto iniziale in una spezzata di tre segmenti è infatti un passaggio costruttivo e non qualitativo: ma la linea che continua ad addensarsi e moltiplicarsi, senza però mai interrompersi, fino a trasformarsi in figura piana è un vero passaggio dalla dimensione uno alla dimensione due. Altra considerazione sorprendente è che il salto dimensionale si ottiene proprio con un metodo che è evidentemente un progenitore dei metodi generanti i frattali, oggetti di dimensione frazionaria. Quand'è che abbiamo guadagnato un'intera dimensione? La risposta è probabilmente nascosta, come al solito, nell'infinito: occorre reiterare i cicli di frantumazione della curva infinite volte, se vogliamo arrivare al quadrato.

Ciononostante, in un tentativo ingenuo di semplificazione, si può anche rinunciare all'unica linea involuta e ritrovare lo stupefacente mistero anche nelle cose che si insegnano ai ragazzini delle elementari. Come si trova l'area del rettangolo? Ovvio, base per altezza. Nelle figure dei sussidiari delle elementari il sacro metodo della moltiplicazione della base per l'altezza è sempre raffigurato suddividendo accuratamente il rettangolo campione in quadrati unitari: lo scolaro allora conta "quanti quadrati" compongono la base (tralasciando, con la complicità del maestro, il notevole fatto che la "base" del rettangolo è cosa ben diversa dall'insieme della prima riga dei quadrati unitari), e quanti compongono l'altezza; procede poi con la moltiplicazione e si rallegra per aver scoperto una bella scorciatoia rispetto al conteggio pedestre di tutti i quadrati unitari contenuti nel rettangolo. Il passo concettualmente significativo successivo lo si incontra solo molto più tardi, quando l'usuale metodo della base per l'altezza si trasforma in un integrale definito. Adesso è necessario abbandonare i quadratini unitari che tappezzavano le figure del sussidiario, e fare i conti con i Δx e con i dx . Il principio sembra in fondo lo stesso: alzi la mano chi ha suo tempo non ha riconosciuto con gioia e soddisfazione che

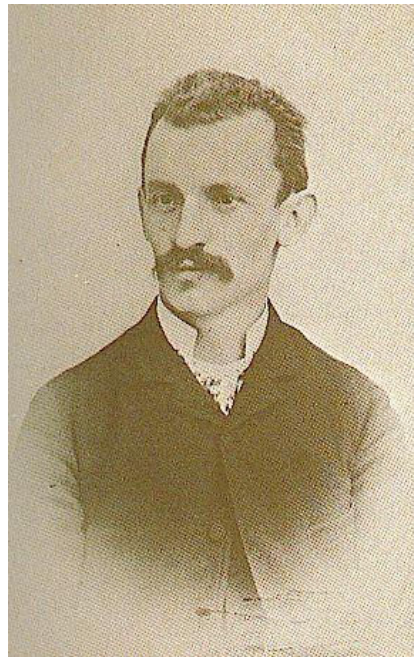
l'astruso $\int_a^b f(x)dx$ altro non era che un "base per altezza" con manie di grandezza. I

nodi cominciano però a venire al pettine: il dx somiglia troppo allo zero, e fin dalla sua comparsa è stato sottoposto a critiche feroci ("come può una somma di zeri dar un totale diverso da zero?", urlava il vescovo Berkeley nei padiglioni auricolari di Newton e Leibniz); del resto, se mediamente una volta al secolo gli integrali e gli assiomi del calcolo vengono riscritti, qualcosa delle critiche berkeleyane è probabilmente restata a far da tarlo nei cervelli dei matematici. Ciò nondimeno, il calcolo differenziale funziona; si sommano linee di spessore zero e si ottengono aree e, pur con tutte le limitazioni teoriche e filosofiche del caso, i grattacieli stanno in piedi anche e soprattutto grazie a conteggi che sfruttano le regole del suddetto calcolo. Peccato che la stabilità dei grattacieli non ci aiuti molto a capire quali siano le magie che ci fanno fluire da punto a linea, da linea ad area. Se il punto sia o meno una sineddoche della linea, è ancora questione del tutto aperta.

Le sineddochi si trovano anche negli atlanti geografici e nelle piantine delle città: nel torinese non è insolito che le case sparse e le cascine siano talvolta sineddoticamente chiamate "Tetti", facendo poi seguire la parola dal nome della famiglia proprietaria:

classificazione poteva al massimo essere un problema per voi che leggete RM, non per noi che lo scriviamo...

“Tetti Pautasso” e “Tetti Neirotti” non sono toponimi inventati, ma autentici riferimenti geografici subalpini. La cosa non sorprende, visto che “tetto” per “casa” è sineddoche usatissima in ogni variante della lingua italiana. Più curioso è che nei dintorni di Cuneo la sineddoche toponomastica rimanga viva, ma ridotta al singolare. “Tetto” è più che sufficiente per i cuneesi, che rinunciano di buon grado al più impegnativo plurale. In questa caduta dal plurale al singolare¹² potrebbe esserci nascosta una economia storicamente più povera di quella della capitale piemontese, o forse solo una minore disponibilità all’aggregazione sociale; o forse, ancora più semplicemente, un’ulteriore segno di modestia degli abitanti di Cuneo, da tempo immemorabile abituati a fare la parte delle cenerentole¹³ nei luoghi comuni piemontesi. “Tetto Galant”, toponimo e sineddoche che ha generato il titolo e il *fil rouge* di questo compleanno, è tuttora una frazione di Spinetta, che a sua volta può essere considerata poco più di una frazione di Cuneo. A Tetto Galant, il 27 Agosto 1858, nasceva Giuseppe Peano.



L’Italia sarebbe nata solo un paio di anni dopo, e il piccolo Giuseppe, campagnolo e provinciale, cominciava la sua istruzione facendo ogni giorno a piedi i cinque chilometri che separano Tetto Galant da Cuneo, dove si trovavano le scuole più vicine. Dovette aspettare i tredici anni di età e la benevolenza di uno zio prete, se riuscì ad arrivare a Torino, dove completò la sua istruzione secondaria (in quello che è tutt’ora il Liceo Ginnasio più

¹² Se un amico vi illustra con fare malinconico il suo progetto di aprire un grandioso albergo nelle Fiji, immaginando tutti i dettagli dalle fondamenta in cemento armato alle Jacuzzi in ogni camera; dalla selezione del personale fino all’intenzione di condurre in porto una joint-venture con una compagnia aerea low cost per ottimizzare i viaggi dei clienti; se infine termina con la solita frase “Non sono le idee che mi mancano, è il soldo”, state attenti, perché ha appena usato una sineddoche. Non vi sta chiedendo “un ventesimo di lira” (pari ad Euro 0,000258228), ma intende dire che gli mancano “molti” soldi: come nota correttamente il GC, l’utilizzo del singolare in sostituzione del plurale è una delle forme più classiche di sineddoche, e quindi nel caso del cuneese “Tetto” siamo in presenza d’una sineddoche al quadrato, quantomeno se la commisuriamo al torinese “Tetti”.

¹³ Talvolta si riesce ad imparare qualcosa sull’umana natura (e sui meccanismi di feedback vizioso) quando uno meno se lo aspetta: in qualità di osservatore imparziale (leggasi studente fuori sede), rimasi a suo tempo assai colpito dal fatto che i torinesi tendevano a sacramentare e ad usare particolare prudenza ogni qualvolta incrociavano per strada una vettura targata CN. La leggenda metropolitana statuiva infatti che i cuneesi patentati fossero un pericolo ben più grave della proverbiale “donna al volante”, quando si avventuravano su quattro ruote lungo gli splendidi viali della capitale piemontese. In qualità di razionale e cinico positivista, tendevo però a rifiutare e a biasimare l’atteggiamento discriminatorio e vagamente razzista dei torinesi contro i guidatori di Cuneo: rimasi quindi assai meravigliato dalla oggettiva constatazione che, leggenda o non leggenda, le macchine targate Cuneo si macchiavano spesso e volentieri di manovre ampiamente al di fuori dal novero di quelle previste dal Codice della strada, e talvolta forse annoverate direttamente nel Codice Penale. Com’era possibile, tutto ciò? Stava già per crollava la mia fiducia nella democratica distribuzione statistica, o quantomeno quella nelle autoscuole di Cuneo; ma risolsi il mistero un giorno che mi azzardai a far provare la macchina appena comprata (Fiat 500 blu, quindici anni, quattro proprietari precedenti) ad un amico cuneese. Non fece in tempo a partire che si lanciò subito in una mezza dozzina di fantasiose manovre da contravvenzione multipla; terrorizzato e schiacciato nel sedile del passeggero, lo richiamai all’ordine: lui sorrise e cercò di tranquillizzarmi, quando improvvisamente sbarrò gli occhi, colto da subitaneo dubbio, e mi chiese: “Com’è targata questa macchina?” – “Come diavolo vuoi che sia targata? Siamo a Torino, è targata TO”, risposi. Istantaneamente, si trasformò in un educatissimo e provetto pilota, conducendo con perizia e rigore certissimo l’utilitaria: “Scusa” – disse subito dopo – “sono così abituato alla mia macchina targata Cuneo che non mi ricordavo più che questa non lo era... capirai, con una macchina targata TO non posso mica fare quelle cose lì: i torinesi non se le aspettano mica, se non hai la targa giusta”.

rinomato della città, il Cavour) per poi entrare all'Università. La facoltà di Matematica dell'Università di Torino¹⁴ annoverava nel 1876 matematici prestigiosi e celebri, come Basso, D'Ovidio, Erba, Faà di Bruno, Genocchi e Siacci. Giuseppe, che fin da bambino aveva mostrato predisposizione per la matematica, studiò sotto questi professori e si laureò "summa cum laude" il 16 Luglio 1880. L'anno accademico successivo, 1880-1881, lo vede già dall'altra parte della cattedra, come assistente di D'Ovidio. In seguito, passò a fare da assistente a Genocchi, fino a sostituirlo quando il non più giovane professore passò a miglior vita. Nel 1890, infine, vinse il concorso che lo nominò professore straordinario di Calcolo Infinitesimale all'Università di Torino.

Una carriera universitaria brillante, ma non tale ancora da far pensare d'avere di fronte un gigante della matematica. Eppure, il cuneese dà prestissimo segno di acume insolito e profondo: il testo del corso tenuto da Genocchi è il Serret, e nel 1882 Peano vi individua un errore: avverte Genocchi del fatto, e si sente rispondere dal vecchio professore che ne era già a conoscenza, grazie ad una segnalazione avuta l'anno precedente da un collega tedesco. Il vecchio docente intuisce l'eccezionalità del suo assistente: quando, due anni dopo, Giuseppe redige un nuovo testo per il corso di Calcolo Infinitesimale basato sulle lezioni di Genocchi, lo dà alle stampe a nome del Genocchi stesso, lasciando i suoi contributi nascosti dalla piccola precisazione "pubblicato con aggiunte del Dr. Giuseppe Peano". Ma Genocchi non ci sta, e scrive: "...devo dichiarare di non aver avuto parte alcuna nella compilazione del summenzionato libro, e che tutto si deve al giovane ed eccezionale Dr. Giuseppe Peano...".

Peano non è oggi famoso per i suoi lavori nel campo dell'analisi: eppure, se si va a spuntare i diciannove titoli che Alfred Pringsheim elenca come i testi fondamentali del Calcolo nell'Enciclopedia delle Scienze Matematiche vi si trovano ben due testi di Peano: e gli altri diciassette raccolgono autori come Cauchy ed Eulero. È invece famoso per il suo contributo dato ai fondamenti della logica matematica: nel 1900, il quarantaduenne Peano partecipa al celeberrimo Congresso di Parigi, quello in cui Hilbert presenta l'agenda matematica del ventesimo secolo sotto forma di ventitré problemi: da parte sua, il cuneese era già da tempo intrigato con il secondo quesito della lista hilbertiana, quello che chiedeva di dimostrare la consistenza degli assiomi dell'aritmetica. A quello stesso congresso partecipò anche un giovanotto inglese di ventotto anni, che scrisse poi nelle sue memorie: *"Il Congresso segnò la svolta della mia vita intellettuale, perché lì incontrai Peano. Lo conoscevo già di nome e avevo già letto alcuni suoi lavori, ma non mi ero ancora preso la briga di imparare la sua notazione. Notai che nelle riunioni del congresso egli era sempre di gran lunga più preciso di ogni altro, e che inevitabilmente finiva con l'aver la meglio in ogni discussione che affrontava. Col passare dei giorni, conclusi che questo doveva dipendere dalla sua logica matematica; compresi allora che la sua notazione era quel potente strumento di analisi logica che io ero andato a cercare per anni..."*.

L'inglese si chiamava Bertrand Russell¹⁵. Si potrebbe aprire ora una parentesi sul potere democratizzante della scienza, vista l'ammirazione che trasuda da parte del rampollo di una delle più potenti famiglie dell'Impero Britannico (il nonno di Russell è stato per qualche tempo la personalità politica più influente del pianeta) nei confronti dell'erede di una genia orgogliosamente contadina (forse sbagliamo, ma ci

¹⁴ Che oggi ha sede nello storico Palazzo Campana, nel cuore di Torino: così non era però ai tempi di Peano, poiché Palazzo Campana (ex Casa Littoria) ospita lavagne piene di integrali e derivate solo a partire dal 1945. Chi scopre quale fosse la sede di facoltà nel 1876 (e ce lo comunica, prove alle mano) vince un abbonamento gratuito a RM.

¹⁵ ...e non crediamo ci sia bisogno di ricordare chi sia. Per i più distratti, comunque, c'è sempre la scappatoia di andarsi a prendere in archivio il compleanno di Maggio 2003: "Nemesi", RM52.

piace immaginare il nonno di Peano come una delle persone più influenti della sua aia, e nient'altro). È però più interessante notare come Russell abbia in poche righe ben sintetizzato quella ci sembra essere la caratteristica più forte di Giuseppe Peano, sia nel bene che nel male. Prima di avventurarci a disvelare quale sia questa misteriosa caratteristica, occorre rammentare ancora alcune peculiarità del nostro: tanto per cominciare, aveva una capacità eccezionale nello scoprire gli errori e le debolezze logiche nelle dimostrazioni. Una dote naturale, ma elevata in sommo grado: il metodo sembra fosse semplicemente quella di sottoporre la tesi alla verifica nei casi limite, o in quelli eccezionali, ma si sa benissimo che questo è molto più facile a dirsi che a farsi. Dote ammiratissima, ma che gli procurò anche qualche inevitabile inimicizia da parte dei colleghi colti in flagranza d'errore. Non minore era la sua assoluta dedizione al rigore matematico: a ben vedere questo può considerarsi un aspetto complementare, se non addirittura coincidente, con la sua capacità di individuare gli errori. La ricerca della chiarezza, dell'esattezza e della completezza lo portarono ad affrontare i fondamenti della matematica, che è il settore dove diede il meglio di sé. Il Peano che strappa ammirazione a Russell ha già stilato i cinque famosi "Assiomi di Peano" che tentano di stabilire i fondamenti dell'aritmetica: erano stati pubblicati nel 1889 nella memoria *"Arithmetices principia, nova methodo exposita"*¹⁶, scritta integralmente in latino (e questa è cosa significativa, a nostro parere). Peano ha già scoperto nel 1890 la sua curva, la stupefacente curva capace di riempire il piano di cui abbiamo parlato poco sopra, e la scoperta non è un vezzo o un passatempo intellettuale: la curva di Peano è una scoperta fondamentale per la teoria degli insiemi, come dichiarò Hausdorff, un passo ulteriore nella direzione aperta da Cantor con le sue biiezioni; una curva continua in grado di riempire lo spazio non si pensava potesse esistere, e Cantor, cui non faceva certo difetto la fantasia matematica creativa, non riuscì ad immaginarla. Il Peano che va al Congresso di Parigi nel 1900 ha già fondato la "Rivista di Matematica", e ha già rivelato uno dei suoi progetti più ambiziosi: la raccolta di tutti i teoremi matematici in un'unica opera, scritti tutti mediante la notazione della logica simbolica. Pensava, credeva fortemente che il poter raccogliere tutto lo scibile matematico in un testo che usasse una notazione efficiente avrebbe ridotto tutte le difficoltà dell'insegnamento e dello studio della matematica. Il "Formulario Mathematico" fu il risultato di questo sforzo ciclopico, e fu probabilmente l'opera alla quale Peano stesso teneva di più: ma questo non bastò a trasformare il "Formulario" nell'opera d'universale utilizzo che Peano sperava: lo adottò come libro di testo, ma gli studenti, che pure adoravano Peano per la sua sensibilità e capacità didattica, non riuscivano proprio a digerire il formalismo del testo. I colleghi italiani e stranieri ammirarono lo sforzo e l'idea dell'opera, ma non la degnarono di troppa attenzione, forse anche a causa della lingua in cui era scritta. E per una volta, non si tratta qui di un caso della scarsa cittadinanza internazionale della lingua italiana, perché il cuneese aveva scritto il Formulario nella sua Interlingua, chiamata a volte anche "latino sine flexione", che restò la sua ossessione per il resto della sua vita. Il più grande progetto di Peano restò infatti la fondazione di una lingua universale, semplice da imparare e tale da non dare adito ad ambiguità. Gli *"Arithmetices Principia"* cominciano così: *"le domande riguardanti i fondamenti della matematica, sebbene recentemente assai dibattute, restano ancora senza risposte soddisfacenti. L'ambiguità del linguaggio è la causa principale dei problemi del filosofo. È per questo che è della massima importanza esaminare attentamente tutte le parole che usiamo"*. Dopo il 1900, Peano

¹⁶ Opera che sembra essere reperibile (noi non ce l'abbiamo, però): Giuseppe Peano, "Arithmetices Principia", edizioni Aragno, Euro 12,40. Di certo inclusa anche nel monumentale CD-ROM "L'Archivio di Giuseppe Peano", edito dal Dipartimento di Matematica, che costa 50 Euro tondi. Non abbiamo neanche questo, ma conosciamo un RMer che si è detto disposto a prestarcelo, se glielo chiedessimo.

si dedica quasi esclusivamente al Formulario e all'Interlingua, e non produce più memorie matematiche di rilevanza assoluta.

Il segreto è dunque nel linguaggio, sembra volerci dire Giuseppe: i problemi nascono dal linguaggio ambiguo, e di conseguenza la soluzione dei problemi deve trovarsi nella creazione di un linguaggio non più ambiguo. A differenza di altri, che combattono la stessa battaglia (Frege, Russell, Whitehead) mirata alla creazione ex-novo dei principi fondamentali della matematica, Peano è così convinto dell'importanza del linguaggio da ritenere che debba trascendere i puri limiti della logica, e si getta totalmente nel progetto di una lingua comune a tutta la razza umana. Come se prima ancora della lingua matematica ritenesse fondamentale rifondare la lingua comune, per rimuovere alla radice le possibili ambiguità.



A Giuseppe Peano probabilmente non piacevano le figure retoriche come le sineddochi: sono artifici poco rigorosi, che prestano il fianco a confusioni e possono alimentare i fraintendimenti. Ma riusciva ad essere un buon insegnante, e viene da chiedersi come potesse coniugare la sua ossessione per il rigore matematico con i compromessi che la didassi spesso comporta. Scrisse un libretto che non dovrebbe mancare nella biblioteca di ogni amatore di giochi matematici¹⁷, e lo scrisse proprio per rendere più attraente la matematica ai ragazzini¹⁸. Per quanto tutt'altro che rigorosi, a noi piace celebrarlo per quel che possiamo, e anche ricordare come altri gli abbiano reso merito. Cuneo, sua città natale, gli ha dedicato un bel monumento: bello soprattutto perché non è una statua o un busto, ma un monumento più astratto, in cui è protagonista la curva del matematico, e non la sua faccia. Altri lo celebrano in maniera meno ufficiale ma forse persino più creativa: Henry Segerman, della Stanford University, esercita una forma d'arte non troppo famosa, ma assolutamente affascinante per chiunque subisca il fascino di quelle cose che ostinatamente rimangono a metà strada tra scienza e arte: ammiratore degli ambigrammi di Hofstadter, Henry Segerman produce dei sorprendenti "autologlifici"¹⁹.

Per rendere l'idea di come funzionino, guardate questi esempi sorprendenti: per goderseli occorre conoscere un po' di matematica, e se non vi stupiscono possono essere una buona scusa per un ripasso: vi ricordate come è fatta (e a cosa serve) la formula di Stirling? Non c'è dubbio alcuno, invece, sulla Congettura di Goldbach: siamo certi che ogni lettore di questo giornalino si

601+23=624
 F12358B2C3₄₅₅₈₉
 $\int \sqrt{\pi n} (in79) \approx s!$

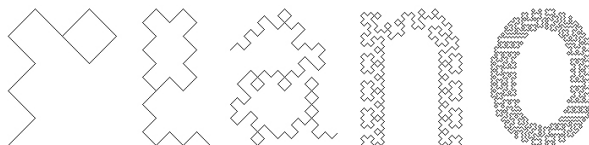
¹⁷ Giuseppe Peano, "Giochi di Aritmetica e Problemi Interessanti", Sansoni. Siamo molto preoccupati, perché il titolo non compare più nei cataloghi online... speriamo siano sbagliati i cataloghi.

¹⁸ Riepiloghiamo: ha fondato una "Rivista di Matematica", ha scritto un libro di giochi e problemi matematici... ecco un curriculum che potremmo forse prendere in considerazione, il giorno che decidessimo di allargare l'organico della Redazione di RM...

¹⁹ Traduzione assolutamente inventata, per assonanza con "geroglifici". L'originale è "Autoglyphs", e Segerman li dichiara parenti stretti delle "parole autologiche" (come "pentasillabo", che è parola formata da cinque sillabe, e a differenza di "monosillabo", che di sillabe ne ha ben più di una, ed è pertanto "eterologica". Una domanda classica in merito è: la parola "eterologica" è eterologica? Non vale chiedere aiuto al ventottenne inglese che citiamo qualche pagina indietro...). Segerman definisce gli autologlifici come "immagini autologiche".

ricorda dell'ancora indimostrata sentenza che dichiara ogni numero pari essere ottenibile dalla somma di due soli numeri primi. Certo, trasformare l'integrale di Stirling nella parola "Stirling" richiede qualche forzatura; certo, il buon Segerman avrà cercato a lungo i numeri che meglio riuscivano a trasformarsi, al tempo stesso, sia in uno degli infiniti casi che confermano la Congettura sia nel nome "Goldbach" stesso; ma proprio per questo si rimane ancora di più a bocca aperta nello scoprire che Fibonacci aveva la sua immortale serie così chiaramente stampata già nelle lettere del suo nome. Nel consigliarvi fare un giro per andare a vedere gli altri contenuti nella pagina web di Segerman²⁰ (anche per ringraziarlo di averci dato il permesso di pubblicare su RM questi che vedete in queste pagine, ma soprattutto perché ne vale la pena: provate ad immaginare un autoglifico per la parola "Entropia", e poi correte a vedere se l'idea realizzata da Henry sia proprio quella a cui avete pensato voi), prendiamo tempo per lasciarvi qualche secondo per pensare come possa essere l'autoglifico dedicato a Peano. Ma non troppo, perché quest'articolo ha già raggiunto una lunghezza eccessiva, e quasi certamente il vostro occhio è già arrivato a sbirciarlo qua di lato. Creazione che coniuga splendidamente il nome del protagonista di quest'articolo, la sua celebre curva, e la capacità di giocare con i concetti della matematica. Non abbiamo nessuna speranza di fare di

meglio, e quindi ci limitiamo a rubargli l'idea. Del resto, noi non potremmo far altro che provare ad inventare qualche sciocco gioco di parole, di quelli poco divertenti, e pensiamo sia meglio sorvolare in merito: o magari




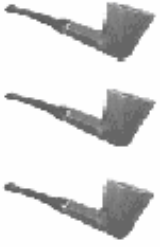




cercare un ultimo esempio di sineddoche, un incastro strano, per poter legare un'ultima volta il grande matematico cuneese alle farneticazioni di una rivista notoriamente poco rigorosa e, nomen omen, anche un po' rude. Ma, ripetiamo, non abbiamo più nè tempo né spazio, e pertanto chiudiamo senza ulteriori dilazioni questo comPIEAnNO.



²⁰ <http://www.stanford.edu/~Segerman/autoglyphs.html>

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Ardite speculazioni terriere			
La barca di Rudolph			

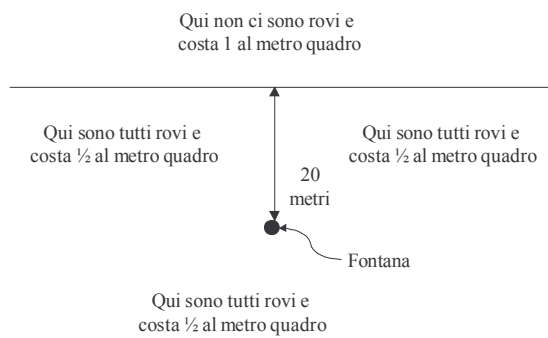
2.1 Ardite speculazioni terriere

Trattasi di comprare un appezzamento di terreno in prossimità della casa al Paesello (il mio, non quello di mia moglie... insomma, non quello degli aeroplanini, l'altro) e di cintarlo; peccato che, come in ogni problema che si rispetti, questo terreno abbia delle caratteristiche piuttosto particolari.

Tanto per cominciare, c'è una fontana; data l'inalienabilità delle acque demaniali (mi pare si dica così... insomma, non è ne vostra nè di nessun altro) la fontana deve essere sul recinto [...fontana considerata per semplicità puntiforme (RdA)], in modo tale che possiate usarla tutti.

Inoltre, non aspettatevi che io, Fred e Alberto si piazzino più di **100** metri di recinto; infatti, abbiamo solo quella, come rete metallica.

L'ultimo problema è che, attorno alla fontana e per **20** metri verso nord, è pieno di rovi e so già chi dovrà toglierli (e se non sapete cosa sono "grembiule e guanti da rovi", ritenetevi molto fortunati... Io l'ho scoperto in tenera età). Fortunatamente, visto lo stato miserevole di questa parte, il venditore ci fa lo sconto: la parte di terreno con i rovi ci costerà (al metro quadro) **la metà** di quello senza rovi.



Forse è meglio se vi faccio un disegnano...
Lo trovate qui di fianco.

È abbastanza chiaro? sotto la riga orizzontale costa la metà, sopra costa normale, dovete passare per la fontana²¹...

E, logicamente, volete **massimizzare l'area**.

²¹ Evidentemente, come in ogni problema di questo tipo, Terra piatta infinitamente estesa in tutte le direzioni.

Ora, io e il villico venditore saremmo interessati alla **forma** e al **prezzo** dell'area che acquisteremo...

2.2 La barca di Rudolph

L'ormai globalmente noto Rudolph degli aeroplanini... Ve l'ho mai detto che ha una barca? Tranquilli: è una, non la (s)monta e l'unico numero che ha è la targa. Ora, l'ultima volta che ci ha portato a fare un giro, si è presentato un interessante problema.

Stavamo tranquillamente procedendo in linea retta verso est alla velocità di **20** nodi (no, non "all'ora": un nodo è già un miglio - nautico - all'ora), quando una seconda barca (amici del Rudolph) che si trovava **50** miglia a nord, decide di venirci incontro alla velocità di **30** nodi, *mantenendo sempre la prua²² puntata verso la prima barca*.

Che percorso fa la seconda barca, e dopo quanto tempo ci incontriamo?

3. Bungee Jumpers

Olimpiade Matematica Olandese, 18/09/1992, Secondo Round, Problema 5

Si considerino gli n -agoni regolari aventi perimetro pari a **4**. Sia la distanza dal centro dell' n -agono ad un suo vertice r_n , e sia la distanza dal centro al lato a_n .

1. Determinare a_4, r_4, a_8, r_8 .
2. Fornire un'interpretazione per i valori di a_2, r_2 .
3. Provare che è $a_{2n} = \frac{1}{2}(a_n + r_n)$ e $r_{2n} = \sqrt{a_{2n}r_n}$.
4. Determinare $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, data la definizione:

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = 1$$

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(u_{n-2} + u_{n-1}) & \text{per } n \text{ pari} \\ \sqrt{u_{n-1} * u_{n-2}} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

2004-07-01 16:34	PMP - [067] – Q&D, 2
2004-07-01 17:03	PMP - [067] – 3
2004-07-03 12:14	Zar - [067] – 3
2004-07-05 13:05	Zar - [067] – 3
2004-07-05 20:15	u_toki - [067] – 3
2004-07-06 22:56	Ping Pong - [067] – 3
2004-07-07 23:54	Alberto - [067] – 1 e 3

Citiamo solo la prima di innumerevoli...

...e un'errata corregge poche ore dopo.

...uno dei famosi disegni di Zar.

²² Nota per gli Ammiragli della Marina Mongola: sarebbe il davanti.

2004-07-08 15:15	jvanbie - [067] – 2	
2004-07-09 16:16	u_toki - [067] – 2	
2004-07-15 21:24	u_toki - [067] – 1	...prima parte.
2004-07-16 14:36	jvanbie - [067] – 3	
2004-07-16 18:44	Enrico - [067] – 1 e 3	
2004-07-16 18:47	u_toki - [067] – 1	...seconda parte.
2004-07-19 02:18	Torkitorio - [067] – Q&D	
2004-07-19 02:19	Torkitorio - [067] – 2	
2004-07-23 22:42	u_toki - [067] – 1	...terza parte,

E di sicuro anche questa volta ne abbiamo persa qualcuna verso la fine, ma la Redazione potrebbe decidere di menzionare i ritardatari il mese prossimo.

4.1 [011]

4.1.1 Problema da un altro Rudolph

*...nunc ad me redeo libertino patre natum,
quem rodunt omnes libertino patre natum...*

Orazio

Caronte ci ha mandato una soluzione degli aeroplanini! Il tempo di digerirla, e la troverete in Bookshelf.

4.2 [066]

Vi meritate una spiegazione.

Rudy, da ottimo Grande Capo qual è, ha lanciato il sasso ed ha nascosto la mano, che vuol dire che dopo aver proposto ben tre problemi rognosi se n'è andato in vacanza, senza darci le soluzioni se non a grandi linee e il Doc, da buon politico qual è, si è eclissato adducendo importanti questioni lavorative nonché la necessità di lavorare a certe curve tridimensionali.

Così vi trovate qui soluzioni raccolte da Alice, tra una vacanza e l'altra, che non garantisce niente, tranne una cosa: niente scuse il prossimo numero. Tutte queste linee d'introduzione sono scusa sufficiente. Allora andiamo a cominciare.

Una cosa interessante è che nessuno dei protagonisti delle tre storie ha affrontato o commentato i problemi a lui dedicati, ma ci aspettiamo cattivissimi commenti in tempo per il prossimo numero...

4.2.1 PMP

Le sequenze di PMP sono state affrontate da **Alberto**, **Enrico** e **u_toki**. Secondo Rudy, testuali parole, **Alberto** "è un amante del brivido: costruisce sequenze 'sbagliate' e poi le corregge 'al volo'". Vediamo cosa ci ha mandato:

Definizione: Una sequenza di ordine n è una successione di n simboli. Posto di usare due soli simboli $s_i = S, L \quad \forall i | 1 \leq i \leq n$, la sequenza viene indicata con

$s_1 s_2 \dots s_n$.

Definizione: Una sottosequenza di ordine $m < n$ è una sottosuccessione di m simboli in una sequenza data.

Definizione: Una sottosequenza di ordine m è 3-consecutiva se occupa la posizione $(s_{i+1} \dots s_{i+m})(s_{i+m+1} \dots s_{i+2m})(s_{i+2m+1} \dots s_{i+3m})$ all'interno della sequenza di ordine n , in modo che risulti $0 \leq i < n - 3m$ e $s_j = s_{j+m} = s_{j+2m} \quad \forall j \mid i+1 \leq j \leq i+m$.

Problema: Quante sono le sottosequenze 3-consecutive di ordine m in una sequenza di ordine n ?

Soluzione: n sarà del tipo $3\nu + r$, con $r=0,1,2$ quindi la sottosequenza di massimo ordine nella sequenza di ordine n è la sottosequenza di ordine ν che può occupare esattamente $r+1$ posizioni.

Dalla seguente tabella si deduce il numero di sottosequenze 3-consecutive al variare dell'ordine nella sequenza principale.

Quindi le sottosequenze 3-consecutive di ordine $1 \leq m \leq \nu$ sono complessivamente in numero di

$$k = \sum_1^\nu k_i = \nu n - [2 + 5 + 8 + \dots + (3i - 1) + \dots + (3\nu - 1)]$$

Il termine in parentesi quadra è una progressione aritmetica di ragione $d=3$, termine iniziale $a_1 = 2$ e ν -esimo termine $a_\nu = 3\nu - 1$ perciò la somma dei primi ν

termini sarà $S_\nu = \frac{a_1 + a_\nu}{2} \nu = \frac{\nu(3\nu + 1)}{2}$. Tenendo conto

che $n = 3\nu + r$ abbiamo $k = \frac{\nu(3\nu + 2r - 1)}{2}$.

m	k_m
1	$n-2$
2	$n-5$
3	$n-8$
4	$n-11$
...	...
i	$n-3i+1$
...	...
$\nu-1$	$n-3(\nu-1)+1$
ν	$n-3\nu+1 = r+1$

Se l'impresa è cominciata alle 12:00 del 22 dicembre 2001 ed un simbolo in più viene aggiunto ogni minuto allora, alla fine di luglio del 2004 (termine oltre il quale non si accetta l'invio di altre soluzioni!), la sequenza principale sarà di ordine $n=1.137.600$ (il 2004 è bisestile...) perciò $k=313.547.531.40$ sottosuccessioni, che sono un po' troppe da analizzare tutte a tavolino...

Non so dimostrare se, a lungo termine, il metodo che propongo per costruire una sequenza generi o no sottosequenze 3-consecutive. Vedete un po'...

Nota: nel seguito B1, B2, ... sta per "blocco-1", "blocco-2", ...; un blocco è costituito da cinque simboli.

Partiamo da B1 = SLSLS. Ora non posso certo aggiungere la L altrimenti si forma la sottosequenza 3-consecutiva (SL)(SL)(SL).

Ripeto B1 per tre volte: (SLSLS)(SLSLS)(SLSLS). Così ho costruito una sottosequenza 3-consecutiva e allora devo scartare la S finale e sostituirla con una L, ottenendo infine la sequenza (SLSLS)(SLSLS)(SLSLL) nella quale pongo B2 = SLSLL.

Ripeto ora tre volte la sequenza B1-B1-B2:

(B1-B1-B2)(B1-B1-B2)(B1-B1-B2). Così, però, vien fuori una sottosequenza 3-consecutiva e allora devo scartare la L finale di B2 e sostituirla con una S. Ma questo muta B2 in B1 e genera una sottosequenza 3-consecutiva negli ultimi tre blocchi.

Quindi devo mutare il blocco B2 = SLSLL nel blocco B3 = SLSSL e avrò la sequenza (B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3) che ripeterò per 3 volte.

Ora, per evitare sottosequenze 3-consecutive, devo modificare opportunamente l'ultimo blocco (cioè B3). Non posso sostituirlo con B1 e nemmeno con B2, pertanto lo muterò nel blocco B4 = SLLSL. Fatto ciò continuo a ripetere per tre volte la sequenza totale ottenuta.

Si osservi che l'ultimo blocco non può restare il B4 e nemmeno essere cambiato nel blocco B3, B2 o B1, pena il generarsi di sottosequenze 3-consecutive di simboli ripetuti, ed evidenziate rispettivamente in (a), (b), (c), (d):

(a) (B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B4)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B4)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B4)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B4)

(b) (B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B4)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B4)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B4)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)

(c) (B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B4)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B4)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)

(d) (B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B4)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B4)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B2)-(B1-B1-B3)

Devo quindi utilizzare un altro blocco finale B5. E così via...

Tuttavia non sono sicuro che sia sempre possibile trovare un opportuno blocco finale di simboli per aggiustare le cose. Anzi, l'intuito mi suggerisce di no...

Circa la prima estensione (quella eretica...) diciamo che ad ogni anno n resta associato l' n -esimo numero della serie di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... , convenendo che il primo termine della serie sia associato ad $n=-1$ ed il secondo ad $n=0$, senza che si attribuisca ad essi un qualche significato particolare.

Difatti il primo anno si possono scegliere due sequenze da un elemento (S, L); il secondo anno vi sono tre sequenze da due elementi (SL, LS, LL); il terzo anno vi sono poi cinque sequenze da tre elementi (LLL, LLS, LSL, SLS, SLL) etc.

Quindi
$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$
 che, per $n=2005$, ci fornisce (calcolato con

Derive-XM):

4685260029805594787134715955287734888301659866757966612106860725093333
 8025150662196445042393682993546898356896464346048214111545098503421477
 5156666293267190042877415063492952122547566638439838316444109102922721
 4801958662356960124480555760999171228517314993278878751914212010006167
 1455759635656953660995586804142989200178971496381031035783701810508180
 109386510974966175633982948458557222003800352979942704043730514564505,

che è dell'ordine di 10^{418} .

Sull'altra estensione del problema, in riferimento ad un certo anno n , e quindi all' n -esimo termine della serie di Fibonacci ..., F_{n-2} , F_{n-1} , F_n , dobbiamo osservare quanto segue:

a) Innanzitutto è inutile costruire le statue perché la variante eretica consiste unicamente nel pronunciare ogni anno il numero giusto di sequenze (e qui mi ritorna in mente una scena del film *Pi, il teorema del delirio*).

b) Se proprio vogliamo costruire le statue bisogna stabilire se: 1) costruire tutti i pezzi necessari e sufficienti a formare tutte le possibili sequenze, 2) costruire ogni anno tutte le possibili sequenze, 3) data la sequenza dell'anno scorso, garantirsi il numero di pezzi necessario per costruire la sequenza dell'anno attuale.

Nel caso 3) basta costruire una statua (della Luna) se la sequenza dell'anno precedente terminava in S, o due statue, (una del Sole e una della Luna) se la sequenza dell'anno precedente terminava in L.

Nel caso 1) si va dalla sequenza L, L, L, ... col massimo numero di statue della Luna, alla sequenza S, L, S, L, ... col massimo numero di statue del Sole; quindi ogni anno occorre avere n statue della Luna ed $n/2$ o $(n+1)/2$ statue del Sole (a seconda che n sia pari o dispari rispettivamente).

Nel caso 2) bisogna specificare che cosa significa “costruire ogni anno tutte le possibili sequenze”. Cerchiamo di chiarirlo con un esempio.

Per $n=3$ (il terzo anno) abbiamo $F_n = 5$. Le possibili sequenze sono le seguenti:

SLS, SLL, LSL, LLS, LLL. Per costruirle tutte (e, diciamo così, impacchettarle una per una) occorrono 5 statue del Sole e 10 statue della Luna.

Per $n+1=4$ (l'anno successivo) abbiamo $F_{n+1} = 8$. Questa volta le possibili sequenze sono: SLSL, SLLS, SLLL, LSLS, LSLL, LLSL, LLLS, LLLL e per costruirle tutte (una per una) occorrono 10 statue del Sole e 22 statue della Luna.

In generale, da un anno al successivo, occorre costruire $F_{n+1} \cdot (n+1) - F_n \cdot n$ statue in più, ma non so dire quante in più di tipo S e quante di tipo L.

Se con la frase “costruire ogni anno tutte le possibili sequenze” si intende invece calcolare come aumentano le statue ad ogni stadio della sequenza, allora la questione è più semplice e ci si può aiutare con un grafo ad albero (di uso classico quando intervengono problemi come questo sulla serie di Fibonacci).

All'anno n ho F_n possibili sequenze. Di queste, F_{n-2} terminano in S ed F_{n-1} terminano in L. È chiaro che al passo successivo, cioè all'anno $n+1$, le sequenze che terminano in S saranno F_{n-1} mentre quelle in L saranno $F_{n-2} + F_{n-1} = F_n$, cosicché le possibili sequenze totali divengono $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$.

c) Poiché $F_{n-1} > F_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, la Corporazione degli Argentieri movimentata senz'altro, durante l'anno, un maggior numero di statue rispetto alla Corporazione degli Orefici, anzi il rapporto (Argentieri/Orefici) delle statue

movimentate, anno dopo anno, tende al valore $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$; tuttavia è noto

che l'oro è più denso dell'argento ($\varphi_{Au} = 19,3 \text{ g/cm}^3$, $\varphi_{Ag} = 10,5 \text{ g/cm}^3$) perciò, supponendo che i due tipi di statue prodotte dalle due Corporazioni abbiano lo stesso volume V_0 , il rapporto (Orefici/Argentieri) delle masse fisicamente spostate è

$\frac{F_{n-2}V_0\varphi_{Au}}{F_{n-1}V_0\varphi_{Ag}}$, che tende a 2,9741...; quindi gli Orefici fanno quasi 3 volte più fatica

degli Argentieri...

d) Al passo k di una delle F_n possibili sequenze di statuine per l'anno n , vi sono

F_{k-2} statuine del sole ed F_{k-1} statuine della Luna, e si sa che $\frac{F_{k-2}}{F_k} + \frac{F_{k-1}}{F_k} = 1$.

Pertanto gli Orefici avranno una probabilità di costruire la k -esima statuetta che, all'aumentare di k e/o di n , tende a $2 - \varphi$ (38,19%), mentre gli Argentieri una probabilità tendente a $\varphi - 1$ (61,80%), dove φ è il rapporto aureo. Morale: gli Orefici durano più fatica ma hanno maggiori probabilità di lavorare meno...

Enrico, che è un nuovo lettore a cui diamo il benvenuto, è decisamente di meno parole, anche se risolve solo la seconda parte.

Il primo problema con le statuette non sono riuscito a risolverlo. Ho provato a stimare il numero di sequenze "buone" e quelle "nobbuone", e ho trovato che il rapporto "nobbuone"/"buone" tende a zero quando N (lunghezza della sequenza di statuine) cresce. Allora mi sono convinto che, a meno di errori, ci dovrebbe essere il sistema di andare avanti all'infinito, ma non sono riuscito a trovare una regola che mi garantisse questo. Ma forse non ho trovato il paracarro adatto...

Il secondo problema con le statuette invece è molto semplice. Sia $b(n)$ il numero di sequenze buone (cioè senza due S adiacenti) di lunghezza n . Distinguo quelle che finiscono per S e quelle che finiscono per L, e denoto il loro numero con $s(n)$ e $l(n)$ rispettivamente.

Ovviamente $b(n) = s(n) + l(n)$.

Adesso aggiungo una statuetta, ed ottengo

$s(n+1) = l(n)$ (cioè posso aggiungere una S solo ad una sequenza che finisce per L)

$l(n+1) = l(n) + s(n) = b(n)$ (posso sempre aggiungere una L)

sommando le due relazioni ottengo

$b(n+1) = b(n) + l(n)$

ed usando la seconda relazione

$b(n+1) = b(n) + b(n-1)$

Cioè i $b(n)$ sono i numeri di Fibonacci!

Ovviamente poiché $b(1) = 2$ e $b(2) = 3$, si ha che $b(n) = F(n+2)$

L'anno prossimo bisogna dire

$F(2007) = 12266170004162392544124395995794940365235912710375726813438043$
 $4879889540582265747852201934943503611524153417148315081646078218056198$
 $4376150473951298987692168763988390770295658690454132244851389620199197$
 $2582330415974741981973374360323780539809985426454976716922681921206328$
 $6435413265258792397284884249472984739441364816493228960503275110568155$
 $9212272295843733240246560877709161990731596115534573038126560713761158$
 41231138

Il calcolo di questo numero è semplice, visto che la definizione ricorsiva si implementa in 2 secondi in qualsiasi linguaggio(...)

Per finire, vi diamo tutto il lavoro di **u_toki**, arrivato in diverse mail malgrado il caldo e gli esami.

Prima idea

Non so per quale motivo, vuoi per intuito, vuoi per ispirazione divina (Hokuto?), ho pensato a questo modo di disporre le figurine: supponiamo di avere creato già una

stringa (o sequenza) di figurine e consideriamo questa stringa come un tutt'uno (in realtà questa stringa deve essere già "bella"; è per questo che sotto sono partito proprio dall'inizio, cioè dalla prima figurina!); allora, con le figurine che inserirò dopo, creerò una seconda stringa che sia complementare (o coniugata) alla precedente e che affiancherò a questa. Vediamo come funziona questo metodo.

- Inizio con una figurina a caso, per esempio S; avrò allora la stringa $s1$: $s1=S$
- Dopodiché considero la stringa $s2$ complementare di $s1$; con complementare intendo che le figurine che formano $s2$ sono, di volta in volta, le complementari delle figurine di $s1$: dove in $s1$ c'è S, in $s2$ ci sarà L, dove in $s1$ c'è L, in $s2$ ci sarà S; quindi $s2=L$
- Formo, affiancandole, pertanto la stringa formata da $s1$ e $s2$: $s1\&s2=SL$
- La complementare di $s1\&s2$ è $s3=LS$. Quindi alla sequenza di figurine che ho già, aggiungerò (in due passaggi) prima una L e poi una S ricavando $s1\&s2\&s3=SLLS$
- Eccetera.

In pratica:

	Stringa complementare
S	L
S L	L S
S L L S	L S S L
S L L S L S S L	L S S L S L L S
S L L S L S S L L S S L S L L S	

In questa maniera non può mai capitare che appaia la sequenza ripetuta SSS o LLL (facile da vedere). Inoltre ad occhio ho notato che nessuna sottostringa si ripeteva mai 3 volte di seguito.

“Benone!” ho pensato. E come glielo dimostro a quelli di RM?

Osservazione curiosa ma che poi è stata fondamentale

Il passaggio da una stringa a quella successiva si può vedere anche così: ogni S la sostituisco con la coppia SL, ogni L la sostituisco con la coppia LS; diciamo che S “genera” SL e L “genera” LS. In questo modo ricavo una stringa che è doppia, in lunghezza, della precedente, e la cui prima metà coincide esattamente con essa (e quindi è costruibile aggiungendo una figurina alla volta! Cioè non sto barando!)

Questo mi permette di ragionare “all'indietro”, dividendo a blocchi di due una data stringa (partendo ovviamente dall'inizio). Una stringa di lunghezza data da un numero pari, quindi, termina o con LS (generato da un L precedente) o con SL (generato da un S precedente), mai con SS o LL che non sono generabili.

Ragioniamo un po' sulle possibili sequenze ripetute. Vedremo che le successioni che si creano col metodo sopra illustrato, NON possono avere triple ripetizioni consecutive di una qualche sequenza.

Posso tranquillamente supporre che se, aggiungendo una figurina, si crea una tripla ripetizione di una data sequenza, allora non aggiungo più figurine! (D'altronde dovrebbe finire l'Universo, se ciò accade. Tocchiamo ferro!). Quindi la prima tripla ripetizione è anche l'unica! Pertanto se, in un ragionamento a partire dall'esistenza di una (la prima e unica!) tripla ripetizione, giungo alla conclusione

che una tripla ripetizione si sarebbe GIA' dovuta verificare, allora sono giunto ad un assurdo.

Categoria 1-Triple ripetizioni di sequenze ripetute che NON contengono due figurine uguali affiancate

Cioè non è presente né SS né LL, quindi S ed L si alternano.

Nota: suppongo che la coppia SS (LL) non sia presente all'interno della sequenza che si ripete! Può, invece, tranquillamente essere presente nell'abbinamento di due di tali sequenze (vedi sotto, per esempio, il caso 1-B)

1-A: Tripla ripetizione SLSLSL (discorso analogo per LSLSLS) [UNICA ripetizione di questa categoria in cui la sequenza ripetuta ha lunghezza pari!]

Se la stringa complessiva, chiamiamola X, ha lunghezza pari, allora, "portando indietro" X, ottengo una stringa che termina con SSS. Ma ciò è impossibile!

Se invece X ha lunghezza dispari, ho due casi:

a)La figurina che precede la tripla ripetizione è L: ma allora una tripla ripetizione (LSLSLS) si sarebbe già verificata e l'ultima L non l'avrei neanche potuta mettere.

b)La figurina che precede è S: allora posso considerare la stringa X' data X meno la sua ultima figurina (che è L); X' ha lunghezza pari e termina con SSLSLS; se tolgo anche le ultime 4 figurine di X', trovo X'' che ha ancora lunghezza pari e termina con SS: ma questo è impossibile perché SS non è generabile!

1-B: Triple ripetizioni di sequenze di lunghezza dispari (Per esempio SLS-SLS-SLS; LSLSL-LSLSL-LSLSL; ecc.)

Lettera iniziale e lettera finale della sequenza ripetuta coincidono, quindi abbinando due di tali sequenze si forma per forza di cose una coppia SS o una coppia LL.

Se la stringa complessiva X ha lunghezza pari, allora considero la stringa X' che è uguale a X ma si ferma alla prima figurina nella terza ripetizione (negli esempio sopra: SLS-SLS-S, LSLSL-LSLSL-L, ecc.). Avendo tolto, da X, un numero pari di figurine, anche X' ha lunghezza pari. Ma X' termina o con SS o con LL, non generabili, è ciò è impossibile.

Se la stringa complessiva X ha lunghezza dispari, allora considero la stringa X'' che è uguale a X ma si ferma alla prima figurina nella seconda ripetizione (negli esempio sopra: SLS-S, LSLSL-L, ecc.). Avendo tolto, da X, un numero dispari di figurine, X'' ha lunghezza pari. Ma X'' termina o con SS o con LL, non generabili, è ciò è impossibile.

2-Triple ripetizioni di sequenze ripetute che contengono due figurine uguali affiancate

Posso tranquillamente supporre che la stringa ripetuta R abbia almeno una volta, al suo interno, la coppia SS [analogo con LL]. R la scrivo così: $R=xSSy$, dove x e y sono a loro volta stringhe (eventualmente anche vuote), quindi la mia stringa complessiva X termina con $xSSy-xSSy-xSSy$.

2-A: X ha lunghezza pari

y non può avere lunghezza pari, altrimenti la stringa X' uguale a X ma che si ferma a $xSSy-xSSy-xSS$ avrebbe lunghezza pari e terminerebbe con SS non generabile. Quindi sia y di lunghezza dispari.

a) x abbia lunghezza pari

Se da X tolgo il blocco finale $y-xSSy$, che ha lunghezza pari, trovo una stringa X' che ha lunghezza pari e termina con SS : assurdo.

b) x abbia lunghezza dispari

La sequenza $R=xSSy$ ha lunghezza pari.

Chiamo Y la stringa uguale a X SENZA la tripla ripetizione di R . Y ha lunghezza pari, quindi, se torno indietro, trovo una certa stringa W che genera Y .

Quindi l'aggiunta, a Y , di una stringa di lunghezza pari, come lo è R , implica che R , presa a sé stante, è a sua volta generabile da una stringa, diciamo W' . Quindi la stringa $Y\&R$ è generata dalla stringa $W\&W'$.

Ma allora $Y\&R\&R\&R$ è generata da $W\&W'\&W'\&W'$, cioè la mia tripla ripetizione sarebbe già avvenuta (le tre W'), e così non è!

2-B: X ha lunghezza dispari

y non può avere lunghezza dispari, altrimenti la stringa X' uguale a X ma che si ferma a $xSSy-xSSy-xSS$ avrebbe lunghezza pari e terminerebbe con SS non generabile. Quindi sia y di lunghezza pari.

a) x abbia lunghezza pari

Innanzitutto osserviamo che la prima figurina di x deve essere diversa dall'ultima di y : infatti, posto $x=Sa$ e $y=bS$ (con a e b stringhe) risulta che X termina con $SaSSbS-SaSSbS-SaSSbS$ e, togliendo il blocco finale $aSSbS$ otterrei una stringa di lunghezza pari che termina con SS , non generabile. [Idem se $x=La'$, $y=b'L$].

Quindi sia $x=Sx'$, $y=y'L$ [discorso analogo invertendo L e S]; allora X termina con $R=Sx'SSy'L-Sx'SSy'L-Sx'SSy'L$.

Chiamo Y la stringa uguale a X SENZA la tripla ripetizione di R . Y ha lunghezza dispari. Mi chiedo quale sia l'ultima figurina di Y :

- non può essere S , altrimenti, aggiungendo a Y la prima S di R , mi darebbe una stringa $Y\&S$ di lunghezza pari che termina con SS , impossibile.

- non può essere neanche L , altrimenti avrei una tripla ripetizione precedente a quella di R , e cioè: $LSx'SSy'-LSx'SSy'-LSx'SSy'$.

b) x abbia lunghezza dispari

Se da X tolgo il seguente blocco finale $y-xSSy$, che ha lunghezza dispari, trovo una stringa X' che ha lunghezza pari e termina con SS : assurdo.

Conclusione: Seguendo il metodo introdotto all'inizio, posso creare una successione di figurine senza correre il rischio che una qualunque sequenza si presenti tre volte di fila!

Seconda parte, sempre u_toki .

Per tentativi: Non parto subito con la dimostrazione formale, perché per arrivarci ho iniziato procedendo per tentativi. Allora:

Stringhe di lunghezza 1: S , L . Ce ne sono 2.

Stringhe di lunghezza 2: SL , LS , LL . Ce ne sono 3

Stringhe di lunghezza 3: SLS, SLL, LSL, LLS, LLL. Ce ne sono 5

Stringhe di lunghezza 4: SLSL, SLLS, LSLS, SLLL, LSLL, LLSL, LLLS, LLLL. Ce ne sono 8.

Già qui mi sembrava di notare qualcosa di famoso; ho provato allora anche:

Stringhe di lunghezza 5: SLSLS, SLSLL, SLLSL, SLLLS, LLSLS, LSLLS, LLSLS, SLLLL, LSLLL, LLSLL, LLLSL, LLLLS, LLLLL. Ce ne sono 13.

È evidente! Aggiungiamoci anche la stringa “vuota”, che è unica. Se scrivo la successione del numero di stringhe di lunghezza, progressivamente, 0, 1, 2, 3, ecc. Ottengo 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... La successione di Fibonacci! [Vabbè: in quella di Fibonacci l'1 compare due volte all'inizio] L' n -esimo termine della successione è dato dalla somma del termine $(n-1)$ -esimo più il termine $(n-2)$ -esimo.

Ragionamento formale

Sia $s(n)$ il numero di stringhe di lunghezza n che posso creare (rispettando le richieste). Supponiamo di voler creare una stringa di lunghezza n (≥ 2); chiaramente, prima di poter mettere l' n -esima figurina della stringa, devo avere creato una stringa di lunghezza $n-1$. La figurina che mi accingo ad aggiungere può essere tranquillamente L, mentre può essere S solo se l'ultima figurina della stringa lunga $n-1$ era una L.

Questo vuol dire che da una *generica* stringa di lunghezza $n-1$ posso:

- Ricavare 2 stringhe diverse di lunghezza n se l'ultima figurina della stringa lunga $n-1$ era una L.
- Ricavare solo 1 stringa di lunghezza n se l'ultima figurina della stringa lunga $n-1$ era una S.

Quindi se fra tutte le $s(n-1)$ stringhe lunghe $n-1$, un numero $s(n-1|S)$ di esse termina con S e le rimanenti $s(n-1|L)$ di esse terminano con L, il numero $s(n)$ sarà dato da:

$$s(n) = s(n-1|S) + 2s(n-1|L) = s(n-1|S) + s(n-1|L) + s(n-1|L) = s(n-1) + s(n-1|L).$$

Quanto vale $s(n-1|L)$? Consideriamo una *generica* stringa lunga $n-2$: qualunque sia la sua ultima figurina [il discorso vale anche nel caso che la stringa di lunghezza $n-2$ sia la stringa “vuota”], io posso aggiungere una L; quindi a tutte le stringhe di lunghezza $n-2$ posso aggiungere una L ricavando una stringa lunga $n-1$; e questo è l'unico modo per creare una stringa lunga $n-1$ che termini per L. In sintesi il numero di stringhe lunghe $n-1$ terminanti per L coincide col numero di tutte le stringhe lunghe $n-2$, cioè: $s(n-1|L) = s(n-2)$.

Sostituendo nell'espressione precedente ricavo: $s(n) = s(n-1) + s(n-2)$.

Risposta al problema: Il problema mi chiede quale sarà il numero che dirò il prossimo anno; mi basterà fare la somma di quello detto l'anno scorso più quello detto quest'anno e sarò a posto!

Ed infine la terza parte:

Allora: la tribù sta creando la successione di figurine col metodo illustrato precedentemente (vd qualche mia mail fa); Orefici e Argentieri si chiedono: ci sono più S oppure più L?

Partiamo dall'inizio e consideriamo blocchi successivi di due figurine:

SLLSLSSLLSSLSLLS...

Mi dà SL LS LS SL LS SL SL LS ...

Ogni coppia di lettere contiene sempre una S ed una L; questo è anche deducibile al fatto che la successione è “autogenerante”: ricordate? Da una stringa (di lunghezza una potenza di due) posso ricavarne una di lunghezza doppia, con la prima metà coincidente a quella di partenza, semplicemente sostituendo ogni S con SL e ogni L con LS. Quindi la successione ha praticamente uno stesso numero di S e di L.

Dato un numero k , che figurina sarà quella di posizione k ?

Chiamo A la successione “salva-universo” che si ottiene iniziando con S. Chiamo B la successione “salva-universo” che si ottiene iniziando con L. Chiaramente sono l’una la complementare dell’altra.

A - Sia k una potenza di 2: $k=2^x$

A1) Per la stringa A se l’esponente x è pari, la k -esima figurina sarà S ; se invece x è dispari, la k -esima figurina sarà L.

Questo si vede facilmente ricordando che il metodo di “sostituire ogni S con SL e ogni L con LS” è equivalente ad affiancare ad una stringa (lunga una potenza di 2) la stringa complementare. Quindi se una stringa (lunga una potenza di 2) termina con S (L) allora la stringa (doppia) successiva all’affiancamento della complementare terminerà con L (S risp.). E dato che la stringa iniziale, cioè quella per $k=1$, cioè per $x=0$ pari, termina con S, la stringa doppia, $k=2$, $x=1$ dispari, terminerà con L, quella doppia di questa, $k=4$, $x=2$ pari, con S e così via.

NOTA1: la $(k+1)$ -esima figurina è sempre L. Infatti la $(k+1)$ -esima figurina non è altro che la prima figurina della complementare che affianco alla stringa di lunghezza una potenza di 2, e questa prima figurina è quindi sempre complementare della prima figurina in assoluto della successione, che è S.

A2) Per la stringa B se l’esponente x è pari, la k -esima figurina sarà L ; se invece x è dispari, la k -esima figurina sarà S.

NOTA2: la $(k+1)$ -esima figurina è sempre S.

NOTA3: in pratica l’esponente pari mi conserva la figurina di partenza, mentre l’esponente dispari mi fa passare al complementare.

B - k non sia una potenza di 2.

Consideriamo la successione A. k sarà compreso strettamente fra due successive potenze di 2, diciamo $2^n < k < 2^{n+1}$. Limitiamoci allora a considerare le prime 2^{n+1} figurine di A: la stringa A’ che ottengo è divisibile in 2 parti A1 e A2 lunghe entrambe 2^n e tali che:

- sono l’una la complementare dell’altra
- A1 coincide con le prime 2^n figurine di A (diciamo che A è la successione di riferimento), A2 coincide con le prime 2^n figurine di B

La k -esima figurina di A corrisponde alla $[k-2^n]$ -esima figurina di A2 cioè con la $[k-2^n]$ -esima figurina di B. Posso quindi ricondurmi a un caso “minore” (k è diminuito) però passando alla successione B!

Sia $k_2 = [k-2^n]$.

Se k_2 è una potenza di 2 allora ragiono come nel caso A.

Se k_2 non è una potenza di due, allora, in modo analogo a prima, posso considerare la stringa A”, contenuta in A2, che è lunga una potenza di 2 e questa potenza di 2 è la minima che supera k_2 ; A” sarà scomponibile in due metà A3 e A4 l’una complementare dell’altra tali che A3 inizia come B e A4 inizia come A e la nostra figurina sarà la k_3 -esima figurina in A4. Eccetera.

In pratica ogni stringa lunga una potenza di 2 mi riduce il problema con l'accortezza di cambiare ogni volta la successione di riferimento. Procedendo in questo modo, per forza di cose troverò un certo K che sarà una potenza di due.

Occorre quindi sapere quante volte devo cambiare la successione di riferimento e qual è l'esponente da dare a 2 per avere K . Ma per sapere ciò mi basta guardare la rappresentazione di k in notazione binaria! Leggendo da sx verso dx, ogni 1 mi fa cambiare successione, tranne l'ultimo che mi dice, a seconda della sua posizione, se l'esponente finale è pari o dispari (se 1 è ultima cifra, sta per 2^0 , cioè esponente pari e di conseguenza le altre posizioni). Quindi:

Successione A - Conto il numero di cifre 1:

- se è dispari, allora ho un numero pari di cambi e quindi l'ultima successione di riferimento è ancora A e ricado nel caso A1
- se è pari, allora ho un numero dispari di cambi e quindi l'ultima successione di riferimento è B e ricado nel caso A2

Successione B - Conto il numero di cifre 1:

- se è dispari, allora ho un numero pari di cambi e quindi l'ultima successione di riferimento è ancora B e ricado nel caso A2
- se è pari, allora ho un numero dispari di cambi e quindi l'ultima successione di riferimento è A e ricado nel caso A1

Vediamo un esempio con la successione A: Sia $k=13$. Scriviamo k in notazione binaria: $k=1101$. Ci sono 3 cifre 1, quindi un numero pari di cambi e quindi ricado nel caso A1. L'ultimo 1 corrisponde a esponente pari e quindi, per A1, la mia figurina è S.

Tanto per cominciare, sarebbe stato carino se tra tutti avessero deciso se va calcolato $F(2005)$ o $F(2007)$; secondariamente, farei notare a margine che si dice, nel testo, alle ore 12 del 22 dicembre 2001 date inizio all'immane impresa... Quindi, non era il caso di stracalcolare i Fibonacci... bastava $F(5)$ o $F(7)$...

4.2.2 Dario Bressanini (quasi)

Non molti si sono appassionati a questo problema. Il massimo che abbiamo ricavato da **PMP** sta tutto in una frase:

Per la prima parte del problema 2, non ho finito i conti ma direi che basta suddividere quasi equamente (viene concesso l'arrotondamento all'euro) i 17000 euro nelle undici società. Basta che quattro di loro decuplichino il totale e otteniamo 680000/11 euro.

Ci ha lavorato anche **juanbie**, producendo il seguente risultato:

primo caso

Per diminuire il rischio basta dividere il capitale per più aziende, infatti "puntando" 10.000€ su un'azienda e 7.000€ su un'altra, si avrebbe il 64% di probabilità di far crescere i 17.000€ oltre i 70.000€, come dimostra la tabella qua sotto (in migliaia di €).

Con questa tecnica avremo il
 16% di probabilità che il nostro capitale cresca fino a 170.000€
 24% che cresca fino a 100.000€
 24% che cresca fino a 70.000€
 36% che si perda tutto (purtroppo c'è anche questo)
 quindi se la matematica non è un'opinione $16+24+24=64\%$

		DIECI MILA €									
S		100	100	100	100	0	0	0	0	0	0
E	70	170	170	170	170	70	70	70	70	70	70
T	70	170	170	170	170	70	70	70	70	70	70
T	70	170	170	170	170	70	70	70	70	70	70
E	70	170	170	170	170	70	70	70	70	70	70
M	0	100	100	100	100	0	0	0	0	0	0
M	0	100	100	100	100	0	0	0	0	0	0
I	0	100	100	100	100	0	0	0	0	0	0
L	0	100	100	100	100	0	0	0	0	0	0
A	0	100	100	100	100	0	0	0	0	0	0
€	0	100	100	100	100	0	0	0	0	0	0

secondo caso
 investendo 1.500€ per ciascuna delle 11 aziende verrebbe fuori:

$$8511/10^{20} \% = 16.7\% \quad (1500*10*11)+500= 165500€$$

$$(8510 * 15 * 11)/10^{20} \% = 32.5\% \quad (1500*10*10)+500=150500€$$

$$(859 * 152 * 55)/10^{20}\% = 28.7\% \quad (1500*10*9)+500=135500€$$

$$(858 * 153 * 165)/10^{20}\% = 15.2\% \quad (1500*10*8)+500=120500€$$

$$(857 * 154 * 330)/10^{20}\% = 5.36\% \quad (1500*10*7)+500=105500€$$

$$(856 * 155 * 1721)/10^{20}\% = 4.9\%$$

SE NON SI CAPISCE: la prima formula serve per calcolare la percentuale di quel caso: probabilità che un'azienda fruttati con esponente la quantità di aziende che hanno fruttato, per la probabilità che un'azienda non fruttati con esponente la quantità di aziende che non hanno fruttato, il tutto diviso 10 alla 20 per tenere un valore percentuale. La formula affianco serve per calcolare quanto ci rimane in mano in quel caso: soldi ricavati da un'azienda che ha fruttato (1500*10) per il numero di aziende che hanno fruttato, al tutto si sommano 500€ che non abbiamo investito.

Il nostro fertilissimo *u_toki* giunge più o meno alle stesse conclusioni:

1° CASO

Dato che la probabilità che una azienda vada male è $60\%=0,6=3/5$ e dato che gli andamenti finanziari delle varie aziende sono fra loro indipendenti, se considero due aziende (A e B) allora la probabilità che entrambe vadano male ("A ko, B ko") è data da $(3/5)*(3/5)=9/25=0,36=36\%$. Questo vuol dire che la probabilità che almeno una (fra le due) vada bene (e quindi, investendo su di loro, la probabilità di decuplicare il mio investimento) è pari al 64%. ("A ok, B ok", oppure "A ok, B ko", oppure "A ko, B ok").

Se io investo 6.000€ su un'azienda e altri 6.000€ su un'altra azienda, allora ho appunto il 64% di probabilità di ritrovarmi con 60.000€. [Non serve neanche investire tutti i 17.000€].

2° CASO

Per poter ottenere 100.000€, mi basterebbe che mi si decuplicassero almeno 10.000€; quindi decido di investire almeno 10.000€. Come investirli?

Anche qui, non ha senso investirli tutti su una stessa azienda. E non posso neanche usare la strategia del 1° caso su 2 aziende: la probabilità di successo

sarebbe sì 97,75%, data da $1-(3/20)*(3/20)$, ma purtroppo mi servirebbero almeno 20.000€ (10.000 per ciascuna azienda) e non li ho.

Quindi almeno 10.000€ del mio investimento devo suddividerli su almeno 2 aziende, e sperare che tutte queste vadano bene. Preciso una cosa: non sto chiedendo che tutte le aziende su cui investo vadano bene, ma che vadano bene almeno quelle su cui ho spartito almeno 10.000€.

Vediamo due esempi:

Esempio 1: 5.000€ su azienda A, 5.000€ su azienda B, 1.000€ su azienda C. In questo caso raggio i 100.000€ sia nel caso “A ok, B ok, C ok”, sia nel caso (meno restrittivo) “A ok, B ok, C ko”. Il lato negativo, qui, sta nel fatto che la probabilità di raggiungere i 100.000€ è bassa: infatti

$$P(“100.000”) = P(“A ok, B ok, C ok”) + P(“A ok, B ok, C ko”) = \\ = (17/20)*(17/20)*(17/20) + (17/20)*(17/20)*(3/20) = \dots \text{calcoli} \dots = 72,25\%$$

Esempio 2: 5.000€ su azienda A, 5.000€ su azienda B, 7.000€ su azienda C. In questo caso raggio i 100.000€ in 4 casi:

1. “A ok, B ok, C ok”
2. “A ok, B ok, C ko”
3. “A ok, B ko, C ok”
4. “A ko, B ok, C ok”

Purtroppo anche qui la probabilità finale non raggiunge quel 95% che mi sono prefissato:

$$P(“100.000”) = P(“tutte ok”) + 3 * P(“2 ok, 1 ko”) = \\ = (17/20)*(17/20)*(17/20) + 3 * (17/20)*(17/20)*(3/20) = \dots \text{calcoli} \dots = 93,925\%$$

L’Esempio 2 “per un pelo” non ci è andato bene! In codesto esempio, i casi che mi andavano bene erano sia quello “tutte ok”, sia tutti quelli “1 ko, il resto ok”. Posso quindi impostare una strategia di investimenti in modo tale che, oltre al caso “tutte ok”, almeno anche tutti i casi “1 ko, il resto ok” portino i fatidici 100.000€; è possibile, chiaramente, che anche qualcuno dei casi “2 ko, il resto ok” oppure “3 ko, il resto ok” ecc. siano favorevoli: ma se raggio già il 95% accontentandomi dei casi “1 ko, il resto ok”, allora gli altri sarebbero semplicemente delle ciliegine sulla torta da 100.000€.

Il mio investimento sia come segue: se investo su N aziende, allora sulle prime N-1 aziende investo un capitale pari a $10.000/(N-1)$ €, mentre sull’N-esima investo i restanti 7.000€. E’ facile vedere che, per $N \geq 3$, ottengo i 100.000€ sia che vadano bene tutte le N aziende, sia che vadano bene N-1 qualunque di esse. [Il caso N=2 invece non è positivo, come banalmente si verifica]. In particolare l’Esempio 2 di sopra corrisponde al caso N=3.

Purtroppo, qualunque sia il valore di N, questa strategia non è soddisfacente! Non sto a riportare tutta la casistica, mostro qua un esempio:

Esempio 3: 2.500€ ciascuna sulle aziende A, B, C, D e 7.000€ sull’azienda E.

N° aziende su cui investo	N° di aziende che vanno bene	casi totali	casi sfavorevoli	probabilità caso	probabilità sfavorevole
5	0	1	1	0,00008	0,00008
	1	5	5	0,00043	0,00215

	2	10	10	0,00244	0,02438
	3	10	4	0,01382	0,05527
	4	5	0	0,07830	0,00000
	5	1	0	0,44371	0,00000
				probabilità sfavorevole totale	0,08188

Allora:

- Il numero delle aziende su cui investo è 5.
- Ci sono poi le varie possibilità che ad andare bene siano 0, 1, 2, 3, 4 o tutte e 5 le aziende.

- Ciascuna di queste possibilità può presentarsi in $\binom{N}{K}$ modi diversi; per esempio se le aziende che vanno bene sono 2, allora possono essere A&B, A&C, A&D, A&E, B&C, B&D, B&E, C&D, C&E, D&E (10 casi).

- I casi sfavorevoli sono quelli che non mi permettono di raggiungere i 100.000€; in generale il loro numero dipende dal modo in cui si distribuisce il capitale investito; col mio investimento, si può facilmente vedere che i valori sono quelli riportati: per esempio, se ad andare bene sono 3 aziende, io raggiungo il mio obiettivo se fra queste 3 c'è almeno E: A&B&E, A&C&E, A&D&E, B&C&E, B&D&E, C&D&E sono tutti casi favorevoli (dopo la decuplicazione mi ritrovo con 120.000€), mentre non lo sono A&B&C, A&B&D, A&C&D e B&C&D.

- La “probabilità caso” indica la probabilità che K (prefissate) aziende su N vadano bene, probabilità che è data dalla formula:

$$P(N, K) = \frac{3^{N-K} \cdot 17^K}{20^N}$$

- La probabilità sfavorevole è il prodotto nel numero dei casi sfavorevoli per la “probabilità caso”

Quello che ci interessa alla fine è la somma delle probabilità sfavorevoli, cioè la “probabilità sfavorevole totale”, che è maggiore dell'8%. Quindi la probabilità di raggiungere i 100.000€ è meno del 92%.

Con i vari valori di N ho trovato che la probabilità sfavorevole totale era sempre superiore al 5%. Quindi cambio strategia, richiedendo che siano favorevoli almeno tutti i casi:

- “tutte ok”
- “1 ko, il resto ok”
- “2 ko, il resto ok”.

Il mio investimento sia come segue: se investo su N aziende, allora sulle prime N-2 aziende investo un capitale pari a 10.000/(N-2)€, mentre sull'(N-1)-esima e sull'N-esima divido in parti uguali a 3.500€ i restanti 7.000€, purchè il valore così ottenuto sia almeno pari a 10.000/(N-2)

Le scelte N=3 (3.500<10.000) e N=4 (3.500<5.000) si escludono facilmente. Invece N=5 è quello che cercavo!

Esempio 4: $(10.000/3)€ \approx 3334€$ ciascuna sulle aziende A, B, C, e 3.500€ sulle aziende D ed E.

N° aziende su cui investo	N° di aziende che vanno bene	casi totali	casi sfavorevoli	probabilità caso	probabilità sfavorevole
5	0	1	1	0,00008	0,00008
5	1	5	5	0,00043	0,00215
5	2	10	10	0,00244	0,02438
5	3	10	0	0,01382	0,00000
5	4	5	0	0,07830	0,00000
5	5	1	0	0,44371	0,00000
				percentuale sfavorevole totale	0,02661

La probabilità di insuccesso è circa del 2,6%, cioè ho una probabilità di oltre il 97% di ottenere 100.000€.

Nota finale.

L'Esempio 4 ha dato i suoi frutti; ma anche un investimento diverso avrebbe potuto portare allo stesso risultato, per esempio dividendo i 17.000€ in modo uguale e investendo 3.400€ su ciascuna azienda. Infatti, in realtà, a me basta dividere almeno (e non esattamente) 10.000€ su $N-2$ aziende e dividere il rimanente in due parti, non necessariamente uguali, e investirle sulle ultime due aziende, purché entrambe queste due parti siano maggiori o uguali al capitale investito sulle altre.

Anche **Torkitorio** ci fornisce tabelle e si propone come consulente finanziario.

Premetto col dire che se io investo i soldi affidandoli a n società, poiché la probabilità di successo è identica per tutte la soluzione più conveniente è quella di dividere il capitale in egual misura tra le n società.

Detto questo se le società a cui affido i soldi sono n e il numero di loro che riesce a decuplicare il capitale è pari a k avrò che il capitale finale C_f è pari a

$$C_f = \frac{10k}{n} 17.000$$

Inoltre, affinché sia $C_f \geq 60.000$, il valore di k deve essere superiore o uguale a un certo valore minimo k_v tale che

$$C_f = \frac{10k_v}{n} 17.000 = 60.000$$

da cui $k_v = 0.353 n$

Avendo a che fare con numeri interi affinché sia $k \geq k_v$ dovrò tener conto dei valori di k_v come nella seguente tabella

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k_v	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4

Passando ora alle probabilità calcolo che ogni singola combinazione in cui k società su n chiudono l'investimento in positivo ha una probabilità pari al seguente

prodotto: $P_v^k P_p^{n-k}$, dove $P_v = 0,4$ è la probabilità di successo ($v = vincere$) e $P_p = 0.6$ è la probabilità di sconfitta ($p = perdere$).

Questo prodotto va poi moltiplicato per il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ in modo da tener conto di tutte le combinazioni possibili. In sostanza avrò che la possibilità globale che k società su n mi diano un ricavo è

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} P_v^k P_p^{n-k}$$

Una volta fissato n , quindi, per sapere quale sia la probabilità di ottenere dall'investimento almeno 60.000 euro dovrò sommare tutte le $P_{n,k}$ per k che va da k_v ad n , in quanto a questi valori di k corrisponde la sicurezza di ricavare almeno 60.000 euro:

$$P_{v,n} = \sum_{i=k_v}^n P_{n,i}$$

Facendo i conti col sempre amato excel (e ricorrendo al triangolo di Fontana (Tartaglia per gli amici)) si ottengono i valori in tabella

	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		k _v
n	0	1													0
1	1	1													1
2	1	2	1												1
3	1	3	3	1											2
4	1	4	6	4	1										2
5	1	5	10	10	5	1									2
6	1	6	15	20	15	6	1								3
7	1	7	21	35	35	21	7	1							3
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1						3
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					4
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1				4
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			4

	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		somme %
n	0	100%													
1	60,000%	40,000%													40,000%
2	36,000%	48,000%	16,000%												64,000%
3	21,600%	43,200%	28,800%	6,400%											35,200%
4	12,960%	34,560%	34,560%	15,360%	2,560%										52,480%
5	7,776%	25,920%	34,560%	23,040%	7,680%	1,024%									66,304%
6	4,666%	18,662%	31,104%	27,648%	13,824%	3,686%	0,410%								45,568%
7	2,799%	13,064%	26,127%	29,030%	19,354%	7,741%	1,720%	0,164%							58,010%
8	1,680%	8,958%	20,902%	27,869%	23,224%	12,386%	4,129%	0,786%	0,066%						68,461%
9	1,008%	6,047%	16,124%	25,082%	25,082%	16,722%	7,432%	2,123%	0,354%	0,026%					51,739%
10	0,605%	4,031%	12,093%	21,499%	25,082%	20,066%	11,148%	4,247%	1,062%	0,157%	0,010%				61,772%
11	0,363%	2,661%	8,868%	17,737%	23,649%	22,072%	14,715%	7,007%	2,336%	0,519%	0,069%	0,004%			70,372%

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	somme
n	Capitale medio												
0													
1	€ -	€ 68.000											
2	€ -	€ 40.800	€ 27.200										€ 68.000,00
3	€ -	€ 24.480	€ 32.640	€ 10.880									
4	€ -	€ 14.688	€ 29.376	€ 19.584	€ 4.352								
5	€ -	€ 8.813	€ 23.501	€ 23.501	€ 10.445	€ 1.741							€ 59.187,20
6	€ -	€ 5.288	€ 17.626	€ 23.501	€ 15.667	€ 5.222	€ 696						
7	€ -	€ 3.173	€ 12.690	€ 21.151	€ 18.801	€ 9.400	€ 2.507	€ 279					
8	€ -	€ 1.904	€ 8.883	€ 17.767	€ 19.741	€ 13.160	€ 5.264	€ 1.170	€ 111				€ 57.213,13
9	€ -	€ 1.142	€ 6.091	€ 14.213	€ 18.951	€ 15.793	€ 8.423	€ 2.808	€ 535	€ 45			
10	€ -	€ 685	€ 4.112	€ 10.965	€ 17.056	€ 17.056	€ 11.371	€ 5.054	€ 1.444	€ 241	€ 18		€ 52.238,48
11	€ -	€ 411	€ 2.741	€ 8.223	€ 14.619	€ 17.056	€ 13.645	€ 7.580	€ 2.888	€ 722	€ 107	€ 7	€ 56.624,30

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	Capitale finale											
0												
1	€ -	€ 170.000										
2	€ -	€ 85.000	€ 170.000									
3	€ -	€ 56.667	€ 113.333	€ 170.000								
4	€ -	€ 42.500	€ 85.000	€ 127.500	€ 170.000							
5	€ -	€ 34.000	€ 68.000	€ 102.000	€ 136.000	€ 170.000						
6	€ -	€ 28.333	€ 56.667	€ 85.000	€ 113.333	€ 141.667	€ 170.000					
7	€ -	€ 24.286	€ 48.571	€ 72.857	€ 97.143	€ 121.429	€ 145.714	€ 170.000				
8	€ -	€ 21.250	€ 42.500	€ 63.750	€ 85.000	€ 106.250	€ 127.500	€ 148.750	€ 170.000			
9	€ -	€ 18.889	€ 37.778	€ 56.667	€ 75.556	€ 94.444	€ 113.333	€ 132.222	€ 151.111	€ 170.000		
10	€ -	€ 17.000	€ 34.000	€ 51.000	€ 68.000	€ 85.000	€ 102.000	€ 119.000	€ 136.000	€ 153.000	€ 170.000	
11	€ -	€ 15.455	€ 30.909	€ 46.364	€ 61.818	€ 77.273	€ 92.727	€ 108.182	€ 123.636	€ 139.091	€ 154.545	€ 170.000

L'ultima tabella riporta i prodotti tra i valori di $P_{n,k}$ e i corrispettivi valori di C_f . Nell'ultima

colonna a destra della tabella di $P_{n,k}$ è riportato il valore di $P_{v,n} = \sum_{i=k_v}^n P_{n,i}$.

Le caselle in verde sono quelle a cui corrisponde $C_f \geq 60.000$ (ad eccezione dell'ultima tabella in cui sono evidenziate le righe degli investimenti "validi").

Ne deduco che gli investimenti che soddisfano le condizioni sono 2, 5, 8, 10, 11 società, che portano rispettivamente a

2	64	%	per almeno 85.000 euro
5	66,3	%	per almeno 85.000 euro
8	68,5	%	per almeno 85.000 euro
10	61,8	%	per almeno 85.000 euro
11	70,4	%	per almeno 85.000 euro

Fra questi il migliore sembra essere quello per 2 società, perché ci da un ricavo medio globale pari a 68.000 euro (40.800 + 27.200), mentre le somme dei capitali medi delle altre possibilità sono inferiori.

Analogo ragionamento si fa per il caso che da 17.000 euro porta a 100.000 con una probabilità del 95% . Ho impostato il foglio di excel e mi è stato sufficiente variare solo alcuni dati. Il risultato è (vi risparmio le tabelle) 5, 6, 8, 9, 10, 11 società con

5	97,3	%	per almeno 102.000 euro
6	95,3	%	per almeno 113.333 euro
8	97,9	%	per almeno 106.250 euro
9	96,6	%	per almeno 113.333 euro
10	99	%	per almeno 102.000 euro

11 98,4 % per almeno 108.182 euro

l'investimento migliore è quello per 10 società che da il maggiore capitale medio globale pari a 143.687 euro.

Forse finalmente abbiamo trovato il modo di diventare ricchi. Ci manca solo il capitale iniziale, se riuscissimo a vendere almeno una maglietta...

4.2.3 Caronte

A quanto pare è stato Caronte a concentrare la maggior parte degli sforzi dei lettori. **PMP, Zar, u_toki, Ping Pong, jvanbie, Enrico.** Complimenti a tutti.

Del nostro PMP abbiamo al solito una stringata introduzione:

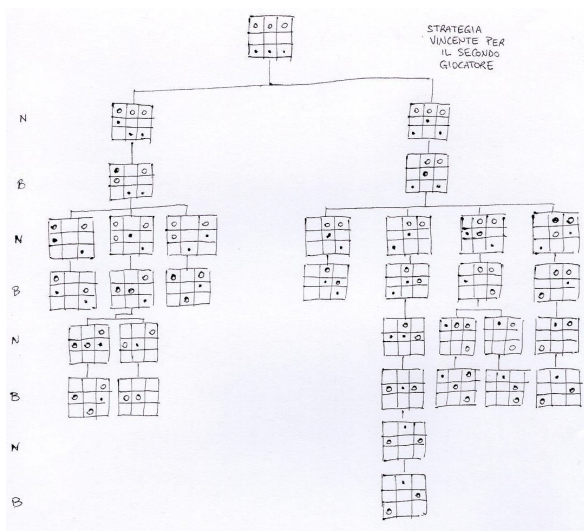
Nella scacchiera 2*N il secondo giocatore dovrebbe sempre vincere.

La sua strategia è infatti banale: se il primo muove in avanti in una colonna, lui muove avanti nell'altra colonna in modo da lasciare le due coppie di pedine alla stessa distanza. Se invece il primo muove all'indietro in una colonna, lui muove avanti *nella stessa colonna* in modo da lasciare le due coppie di pedine alla stessa distanza.

Questa distanza non può mai aumentare, e può solo ridursi: quando è arrivata a zero, il primo giocatore non può fare altro che arretrare, mentre il secondo lo incalza.

Direi che la strategia va bene per una qualunque scacchiera 2k*N. per le scacchiere (2k+1)*N, il primo giocatore vince banalmente schiacciando una delle pedine altrui alla prima mossa e usando poi la strategia per le scacchiere pari. Quindi presumo che non fosse questo il problema, ma la versione 3*3. Sono quasi certo che Martin Gardner lo trattò.

No, non ci ha più detto niente, dev'essere in vacanza, come tutti gli altri. Di **Zar** riportiamo solo quello che ci ha mandato sulla scacchiera 3x3, per amor di tradizione un disegnino fatto a mano, qui di lato, mentre diamo spazio ad **u_toki**:



Come negli scacchi (1), chiamerò B (=”bianco”) e N (=”nero”) i due giocatori.

Come negli scacchi (2), in una generica scacchiera HxK [uso la H, invece che la N del testo, dato che con la N indico già il “nero”], le H colonne le chiamo con le lettere a,b,c...(da sx a dx), mentre le K righe le chiamo con i numeri 1,2,3,...,K (dal basso verso l'alto). In questo modo ogni casella della scacchiera viene identificata da una coppia (lettera;numero).

Inoltre, come negli scacchi (3), il B sta in basso (riga 1) e il N in alto (riga K).

Infine, come negli scacchi (4), il B muove per primo.

SCACCHIERA 2xK

Posizione iniziale: B in (a,1) e (b;1); N in (a;K) e (b;K)

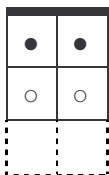


Fig.1
Posizione di vittoria del B

Posizione finale con vittoria di B: B in (a,K-1) e (b;K-1); N in (a;K) e (b;K) (Fig.1)

Posizione finale con vittoria di N: B in (a,1) e (b;1); N in (a;2) e (b;2) (Fig.2)

In una colonna x, diciamo che le pedine sono “a distanza 1” o “a contatto” (o che fra le pedine di una colonna c’è “contatto”) quando la pedina B è nella casella (x;k) e la pedina N nella casella (x, k+1). Per esempio, nelle posizioni finali di cui sopra le pedine sono a contatto in *entrambe* le colonne.

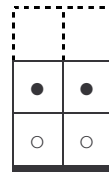
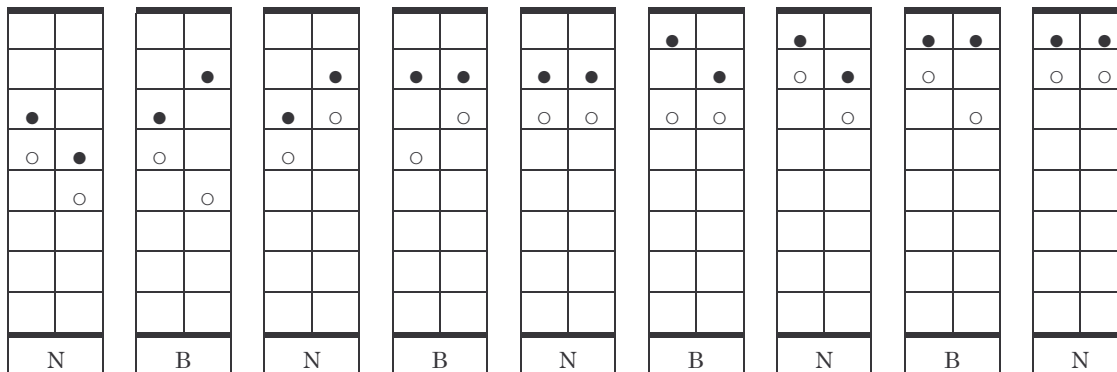


Fig.2
Posizione di vittoria del N

Il fatto di creare, con una mia mossa, un contatto fra pedine in una colonna, obbliga il mio avversario a poter andare solo indietro con la sua pedina in quella colonna: quindi se riesco a far sì, con una mia mossa, che in *entrambe* (!) le colonne ci sia contatto fra le pedine, ho vinto! Infatti alla mossa all’indietro di “tot” caselle del mio avversario nella colonna x risponderò muovendo in avanti di “tot” caselle la mia pedina della colonna x, ripristinando il contatto etc. (Un esempio in Fig.3, con vittoria del B. La lettera in basso indica a chi tocca la mossa).



Il problema, però, per far sì, con *una* mia mossa, che in *entrambe* le colonne ci sia contatto, richiede necessariamente che una colonna il contatto lo abbia già! E l’unico modo è che tale contatto sia stato creato dal mio avversario con la mossa precedente.

Quindi il mio scopo è obbligare il mio avversario a creare per primo un contatto in una certa colonna.

Dato che, muovendo all’indietro, un contatto non si può creare, l’unico modo per obbligare a crearne uno è portare *entrambe* le pedine del mio avversario nella loro casella di partenza e le mie a due caselle di distanza, cioè:

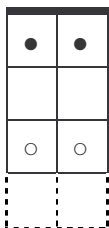


Fig.4
Posizione vincente per B (mossa al N)

- se io sono B: le pedine N devono stare in (a;K) e (b;K), le B in (a;K-2) e (b;K-2), e tocca muovere a N (Fig.4)

- se io sono N: le pedine B devono stare in (a;1) e (b;1), le B in (a;3) e (b;3), e tocca muovere a B (Fig.5)

In realtà, per arrivare a questa situazione, è sufficiente che le pedine di *entrambe* le colonne, siano già “a distanza 2” all’interno della scacchiera (cioè non necessariamente in uno dei due bordi): a quel punto, se il mio avversario avanza crea un contatto; se invece arretra di “tot” caselle in una colonna, allora io avanzo, sempre di “tot” caselle, lungo quella stessa colonna ripristinando la “distanza 2”: prima o poi le sue pedine si

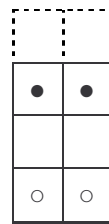


Fig.5
Posizione vincente per N (mossa al B)

troveranno nella loro casella di partenza (come in Fig.4 o Fig.5). Quindi siamo passati dallo scopo di creare “distanza 1” allo scopo di creare “distanza 2”.

Questo ragionamento si può allargare: “a distanza 3”, “a distanza 4” ecc.: se la distanza fra le pedine è la stessa in entrambe le colonne e la mossa è al mio avversario, ho una strategia vincente:

- se il mio avversario arretra in una colonna, io avanzo in quella colonna (dello stesso numero di caselle), ripristinando la distanza. Continuando ad arretrare, prima o poi le sue pedine saranno nella casella di partenza e potranno solo avanzare;

- se invece avanza in una colonna, io avanzo nell'altra (dello stesso numero di caselle). In questo modo la distanza fra le pedine della colonna a è la stessa fra le pedine della colonna b, benché diminuita rispetto a due mosse prima.

Quindi: se dopo una mia mossa, cioè se tocca al mio avversario muovere, in entrambe le colonne le pedine sono alla stessa distanza, allora ho la vittoria assicurata!

Ma nella posizione di partenza del gioco, le pedine nelle due colonne sono entrambe alla stessa di stanza ($=K-1$)! E toccando al B muovere, si conclude che N può sempre vincere!

SCACCHIERA $H \times K$, con H pari

Il N sa di poter vincere se $H=2$. Quindi, essendo H pari, N “suddivide” la scacchiera $H \times K$ in tante ($=H/2$) sottoscacchiere $2 \times K$, e gestisce ogni sottoscacchiera col metodo visto sopra. Infatti, in generale, le mosse lungo una certa colonna sono indipendenti da quelle lungo un'altra colonna. Questo permette al N di accoppiare le colonne a 2 a 2; le mosse lungo una coppia non influenzano quelle lungo un'altra coppia e, con la strategia vista prima, N vince in ciascuna sottoscacchiera

Vediamo un esempio pratico: supponiamo che la scacchiera iniziale sia la classica scacchiera 8×8 . Allora il N considera le quattro sottoscacchiere date dalle colonne (a,b) (c,d) (e,f) (g,h) [potrebbe anche abbinarle in altro modo, ma questo è il più immediato]. In entrambe le colonne di ciascuna sottoscacchiera, le pedine sono alla stessa distanza e, toccando muovere al B, il N può vincere in ognuna di esse.

Alla prima mossa, supponiamo che B muova in avanti (unico verso possibile) la pedina della colonna c; allora N risponde muovendo in avanti (dello stesso numero di caselle) la sua pedina della colonna d: in questo modo nella sottoscacchiera data dalle colonne (c,d) N ha ripristinato l'uguaglianza delle distanze fra le pedine di entrambe le colonne. Lungo la colonna g (altro esempio), ad una mossa in avanti del B, N risponderà avanzando (stesso numero di caselle) in h; ad una mossa all'indietro di A, N risponderà avanzando (sempre stesso numero di caselle) in g.

SCACCHIERA $H \times K$, con H dispari

Alla prima mossa, B muove la sua pedina dell'ultima colonna [anche qui, dico “ultima” solo per comodità: avrei potuto scegliere una colonna qualunque] dalla riga 1 alla riga $k-1$: in questo modo si crea un contatto e, trovandosi nella sua casella di partenza, la pedina del N non si può muovere. [osservo che se $H=1$ il B ha già vinto! Ok, è una banalità, ma noi matematici siamo puntigliosi]

A questo punto il B può tranquillamente ignorare quest'ultima colonna e limitarsi quindi a considerare la scacchiera formata dalle prime $H-1$ colonne; ma $H-1$ è pari, e la mossa è al N, cioè siamo nella situazione del caso precedente solo a colori invertiti! Il B suddivide la scacchiera “rimasta” in tante ($=(H-1)/2$) sottoscacchiere e così via!

RIASSUMENDO:

In questo bel gioco, indipendentemente dal numero (≥ 3) di righe, se il numero di colonne è dispari allora il B ha una strategia vincente; se il numero di colonne è pari, allora è il N ad avercela!

Chi invece non ci ha mandato nemmeno un disegno è **Ping Pong**:

Procediamo per gradi. Consideriamo una scacchiera a una colonna: quando le due pedine si “fronteggiano”, se tocca all’avversario muovere, io vinco; quindi, se la distanza fra le pedine è 1 (una casella, ovviamente), deve toccare a me, se 2 a lui, e così via. Quindi, se voglio vincere in una scacchiera $1*N$, se N è pari deve iniziare l’altro, se N è dispari devo iniziare io. Torniamo alla $2*8$. Inizia l’altro. Se io muovo di volta in volta nella stessa colonna in cui muove l’altro, la situazione è la stessa di due scacchiere $1*8$, e quando una colonna “collassa” (cioè le due pedine si fronteggiano) toccherà a lui muovere nell’altra colonna con distanza pari fra le pedine, e vincerò io. Se invece lui muove nella colonna 2 e io nella 1, e poi continuo muovendo nelle colonne in cui lui avanza, manterremo sempre una distanza dispari fra le pedine, e, quando collasserà una colonna, nell’altra toccherà a me muovere, quindi vincerò; notando che la distanza sarà sempre o pari o dispari per entrambe, si vede che l’unica strategia per vincere, qui, è far iniziare l’altro. Inoltre: l’avversario ha mosso nella colonna 2 e io nella 1: in pratica, ci ritroviamo con una scacchiera $2*7$, in cui tocca all’altro muovere, e come abbiamo visto vinco io. Iterando il ragionamento, per simmetria possiamo concludere che, in ogni scacchiera $2*N$, chi inizia perde (sempre).

Vogliamo ora generalizzare ancora di più. Prendiamo un attimo una scacchiera a tre colonne: $3*N$, con $N=2n$. Quando una colonna collassa, le altre due distanze che rimangono potranno essere o entrambe pari o dispari, oppure una pari e una dispari. Dal momento che le distanze diminuiscono di due caselle alla volta, se le due che restano sono uguali toccherà muovere a chi ha iniziato, se sono invece diverse toccherà all’altro: entrambe queste situazioni portano a due colonne con distanza pari o dispari in cui tocca muovere a chi ha iniziato, che necessariamente quindi perde. Ma se $N=2n+1$, le cose s’invertono: è facile vedere che, se una colonna collassa, e le altre distanze sono miste, toccherà a chi ha iniziato, e viceversa. In altre parole, una scacchiera $3*N$ si comporta come una $1*N$.

Prendiamo una $4*N$. Inizia l’avversario. Immaginiamo che egli muova nelle colonne 2,3,4 e io tre volte nella 1; dopodiché facciamo collassare la 1. Perché ciò avvenga sono necessarie $(N-5)$ mosse: se N è pari, l’ultima mossa sarà dell’avversario, e toccherà a me muovere in una scacchiera con tre colonne e un numero dispari di righe; se N è dispari l’ultima mossa sarà mia e toccherà a lui muovere in una scacchiera a tre colonne e righe pari. In entrambi i casi vinco io. Ora, quando una colonna collassa, le tre distanze che restano possono essere uguali (nel senso di tutte pari o dispari), o due di un tipo e una di un altro. Nel primo caso si sfrutta il ragionamento precedente; nel secondo caso, i turni saranno invertiti: in ogni caso (se uno ha pazienza, si faccia una tabella) si finirà con due colonne, distanze entrambe pari o dispari, turno di chi ha iniziato.

Proseguendo con questo tipo di ragionamento, la generalizzazione cercata è la seguente:

Consideriamo una scacchiera $K*N$:

a) $K = \text{pari}$ >>> chi inizia perde

b) $K = \text{dispari}$ b1) $N = \text{pari}$ >>> chi inizia perde

 b2) $N = \text{dispari}$ >>> chi inizia vince

Che ci sembra piuttosto definitivo.

5. Quick & Dirty

Qual è il giorno più lungo dell'anno?

In risposta a questa domanda se ne sono sentite abbastanza da riempire un calendario, di cui alcune extra-planetary:

Il giorno di Venere (243 giorni il periodo di rotazione).

Il giorno di Mercurio (ma è un casino: andrebbe rapportato all'anno, e secondo alcuni il giorno mercuriano dura $3/2$ dell'anno, secondo altre solo $2/3$. Se fosse vera la prima, un giorno che dura un anno e mezzo è forse record).

E altre molto carine o semi-scientifiche:

Il giorno che va dal 21 Marzo al 23 settembre, per i tizi del polo nord o il giorno che va dal 23 settembre al 21 Marzo, per i tizi del polo sud. Che è anche nessuno, per i tizi inchiodati sulla linea dell'equatore...

Quello che si ottiene partendo a mezzanotte dalla linea di cambiamento di data e volando verso ovest per quarantotto ore a una velocità tale da compiere un periplo della terra.

Il **ventun giugno**, al solstizio d'estate, quando il sole sorge prima e tramonta dopo²³.

Il **ventinove febbraio**, perché è "un po' più di un quarto di giorno ogni quattro anni" (e se questa vi sembra tirata per i capelli, aspettate la prossima).

Il **ventiquattro febbraio**, per lo stesso motivo qui sopra e perché Rudy ci ha detto [RM043 (RdA)] che è quello, il giorno che si aggiunge negli anni bisestili.

Il **trentun dicembre**, perché da un po' di tempo è invalsa l'abitudine di aggiungere qualche secondo (i "leap seconds") per far quadrare i conti.

Il **primo gennaio**, per lo stesso motivo qui sopra solo che tutti hanno aperto lo spumante senza tenerne conto.

Il **ventiquattro settembre**, perché è quello che ti ci vogliono più lettere a scriverlo.

Il **ventotto agosto**, perché è quello più lungo scritto in numeri romani (dobbiamo dire che queste ultime due sono quelle che ci sono piaciute di più, anche perché sono le uniche cui non avevamo proprio pensato).

E avanti così...

Il giorno più lungo è quando togliete l'Ora Legale: infatti, dura venticinque ore.

6. Pagina 46

Parte (1)

Sia o il centro dell' n -agono regolare e sia $\overline{A_1 A_2}$ un lato del medesimo poligono.

Si ha che è $A_1 \hat{O} A_2 = \frac{2\pi}{n}$ e $O \hat{A}_1 A_2 = O \hat{A}_2 A_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right)$; allora,

²³ O, se vivete in Australia (salutateci Paolo il Pinguino), il ventun dicembre... A parte il fatto che la frase in sé è sbagliata: secondo le mie tabelle (Italia, Torino), il giorno in cui il Sole sorge prima è il sedici giugno, il giorno in cui tramonta dopo è il ventisei [RdA].

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 A_2}| &= \sqrt{r_n^2 + r_n^2 + 2r_n^2 \cos \frac{2\pi}{n}} \\ &= \sqrt{2r_n^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \sqrt{4r_n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}} = 2r_n \sin \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

Il perimetro dell' n -agono regolare è $2nr_n \sin \frac{\pi}{n} = 4$, da cui

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{2}{n \sin \frac{\pi}{n}} \\ a_n &= r_n \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) \\ &= r_n \cos \frac{\pi}{n} \\ &= \frac{2}{n} \cot \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

In particolare, si ha:

$$\begin{aligned} r_4 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & a_4 &= \frac{2}{4} \cot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \\ r_8 &= \frac{2}{8 \sin \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{8}} \end{aligned}$$

Ora, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8}$, ci dà:

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

da cui si ha:

$$r_8 = \frac{1}{4} \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

e

$$a_8 = r_8 \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \sqrt{2}$$

in quanto $\cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$

Parte (2)

Evidentemente, $a_2 = 0$ e $r_2 = 1$, in quanto il 2-agono è una linea retta in cui O è nel mezzo del segmento $\overline{A_1 A_2}$.

Parte (3)

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
a_n + r_n &= r_n \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \\
&= 2r_n \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \\
&= \frac{4}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \\
&= \frac{4}{2n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \\
&= \frac{2}{n} \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

E quindi, $\frac{1}{2}(a_n + r_n) = \frac{1}{n} \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) = a_{2n}$, e inoltre:

$$\begin{aligned}
a_{2n} r_n &= \frac{1}{n} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} * \frac{2}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n^2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= \frac{1}{n^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}
\end{aligned}$$

Da cui $\sqrt{a_{2n} r_n} = \frac{1}{n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = r_{2n}$.

Parte (4)

Si noti che $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}$. Inoltre, per $n \geq 2$, abbiamo che u_n è la media geometrica o aritmetica di u_{n-1} e u_{n-2} e in entrambi i casi è compreso tra questi valori. Si verifica facilmente per induzione che u_0, u_2, u_4, \dots formano una sequenza crescente, e u_1, u_3, u_5, \dots formano una sequenza decrescente con $u_{2l} \leq u_{2s+1}$ per tutti gli $l, s \geq 0$.

Sia allora $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k} = P$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1} = I$, e $P \leq I$. Inoltre, dalla $u_{2n} = \frac{1}{2}(u_{2n-1} + u_{2n-2})$

abbiamo che $P = \frac{1}{2}(I + P)$, e quindi deve essere $I = P$ e questo prova l'esistenza del limite richiesto dal problema.

Con $a_2 = 0$ e $r_2 = 1$, imponiamo $\bar{u}_{2k} = a_{2^{k+1}}$ e $\bar{u}_{2k+1} = r_{2^{k+1}}$, per $k = 0, 1, 2, \dots$.

Dalla parte (3), $\bar{u}_0 = a_{2^1} = a_2 = 0$ e $\bar{u}_1 = r_{2^1} = r_2 = 1$.

Inoltre, per $n = 2k + 2$,

$$\begin{aligned} \bar{u}_{2k+2} &= a_{2^{k+1+1}} \\ &= a_{2 \cdot 2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2}(a_{2^{k+1}} + b_{2^{k+1}}) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{u}_{2k} + \bar{u}_{2k+1}) \end{aligned}$$

Ossia è $\bar{u}_n = \frac{1}{2}(\bar{u}_{n-2} + \bar{u}_{n-1})$ e, per $n = 2k + 3$:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{2k+3} &= \bar{u}_{2(k+1)+1} \\ &= r_{2^{k+1+1}} \\ &= r_{2(2^{k+1})} \\ &= \sqrt{a_{2(2^{k+1})} * r_{2^{k+1}}} \\ &= \sqrt{a_{2^{k+1+1}} * r_{2^{k+1}}} \\ &= \sqrt{\bar{u}_{2(k+1)} * \bar{u}_{2k+1}} \end{aligned}$$

Da cui si ha che $\bar{u}_n = \sqrt{\bar{u}_{n-1} * \bar{u}_{n-2}}$. Allora, \bar{u}_n e u_n soddisfano la stessa ricorsione e segue che $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} r_{2^{k+1}}$.

Ora, dalla soluzione della parte (3),

$$r_n = \frac{2}{n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \frac{2}{\pi}$, in quanto $\frac{\pi}{n} \rightarrow 0$. Da cui,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{2}{\pi}.$$

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Un paio di oggetti curiosi

Cominciamo con una citazione in un campo che non c'entra niente.

“Bob, ma esiste ‘L’Ultima Barzelletta?’
 “Sì, è quella sulle Palline da Golf Verdi”
 “Ce la racconti?”

“No; qualunque comico sa che **deve** esistere, ma non sa quale sia”
 Bob Hope

Ecco, proprio questo.

L'estensore di queste note, tempo fa, si è scontrato con l'equivalente matematico-ricreativo delle Palline da Golf Verdi; un aggeggio del quale *senti* che può esserci sotto qualcosa di buono, ma non hai la più pallida idea di cosa sia.

L'aggeggio è rimasto per lungo tempo nel dimenticatoio (basti dire che se si fosse sviluppato normalmente sarebbe dovuto comparire da queste parti della rivista verso il numero venti), ma alcuni recenti sviluppi nella matematica hanno portato avanti di qualche passo in questa direzione; va detto che all'epoca il nostro principale problema era trovare problemi (e scusate il *non-bisticcio*), e sentivamo che qui c'era materiale interessante.

L'argomento era la **Funzione Toziente** di Eulero; e già il cognome dovrebbe dire che c'è sotto più di quanto sembri.

Consideriamo un numero N ; quella a cui vorremmo rispondere è la fondamentale domanda:

Quanti numeri tra 1 e $N-1$ non hanno fattori comuni con N ?

Va bene, non ve ne frega niente. Allora ve lo spiego lo stesso. Questo valore è detto il *toziente* di N , e si indica con $\phi(N)$.

Eulero, tra l'altro, è riuscito a trovare un risultato piuttosto interessante; se indichiamo con le parentesi tonde il Massimo Comun Divisore,

$$m \mid (a^{\phi(m)} - 1) \iff (m, a) = 1 \quad [007.001]$$

Ossia m divide a elevato al toziente di m meno uno se m e a sono primi tra loro.

E allora?

Beh, per esempio, credo vi ricordiate che i fattori di 100 sono 2 e 5; con un po' di tentativi (dopo vi spiego un metodo migliore: per adesso, prendete i numeri da uno a cento e togliete i pari e i multipli di cinque che vi restano), potete accorgervi che il toziente di 100 è 40.

Supponiamo ora a sia un qualsiasi numero non divisibile per 2 o per 5 (insomma, un dispari che non finisce per 5: ad esempio, 314159265358979).

Quali sono le ultime due cifre della sua quarantesima potenza?

Non solo niente Excel, ma neanche carta e matita: basta ricordarsi che:

$$100 \mid (314159265358979^{40} - 1)$$

Però, se 100 divide un numero, quel numero finisce con due zeri; allora il numero finisce per 01. Spero non me ne vorrete se vi lascio nell'ignoranza delle restanti cifre...

Se vi piacciono le definizioni formali, in Teoria dei Numeri la funzione toziente è definita come quella funzione per cui:

$$\phi(n * m) = \phi(n) * \phi(m) \quad \forall n, m : (n, m) = 1 \quad [007.002]$$

Ossia, è la funzione moltiplicativa *se e solo se* i fattori sono coprimi; a prima vista sembra un modo balordo di definirla, ma ha decisamente la sua potenza estetica.

Che, oltretutto, mostra una certa utilità; dal Teorema Fondamentale dell’Aritmetica, sappiamo che lo sviluppo in fattori primi di un numero è unico, e questi fattori sono evidentemente primi tra loro.

Se esprimiamo la cosa in un formalismo matematico, si ha che deve essere, per ogni m appartenente ai naturali, se P rappresenta l’insieme dei primi,

$$m = \prod_i p_i^{e_i} \quad (p_i \in P, e_i \in N^+) \quad [007.003]$$

e quindi si ha, per il toziente:

$$\begin{aligned} \phi(m) &= \prod_i (p_i - 1) p_i^{e_i - 1} \\ &= m * \prod_i \left(1 - \frac{1}{p_i} \right) \end{aligned} \quad [007.004]$$

Che è piuttosto comoda; infatti, la produttoria è estesa a tutti e soli i fattori di m . Ci permette anche di ricavare qualche interessante caratteristica, tipo il fatto che se p è primo, $\phi(p) = p - 1$ e che $\phi(2^k) = 2^{k-1}$. Questi due valori, tra l’altro, rappresentano il limite *minimo* e *massimo* della funzione toziente in un intervallo “abbastanza grande”; il valore minimo sarà per la più piccola potenza di 2 nell’intervallo, il valore massimo sarà per il più grande primo nell’intervallo; in mezzo, però (e questo lo potete verificare calcolando qualche valore) la funzione saltella come una pallina (da golf, appunto) impazzita.

Va detto che qualche regolarità ce l’ha anche lei; per esempio, tranne che per i valori 1 e 2 , il toziente di un numero è sempre *pari*. Inoltre, giusto per rendere più intrigante l’aura di mistero che lo pervade, si può dimostrare che è:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\phi(n)}{n} \right) = \frac{6}{\pi^2} \quad [007.005]$$

e quel numeraccio l’avete già incontrato (non solo, ma ci tende pure piuttosto velocemente).

“E tu da ‘sta roba vorresti ricavare un gioco?” Beh, sì, anche se non ho la più pallida idea di come fare; però...

Prendete un *n-agono* “ragionevole” (non necessariamente regolare, ma almeno convesso); adesso, cercate di tracciare al suo interno tutte le “Stelle” che potete fare senza staccare la matita dal foglio.

Credo sia abbastanza immediato il vedere che se andate p angoli dopo, la stella vi riesce solo se $p-1$ (ossia il numero di punti saltati) è coprimo con n , ossia se $(n, p-1) = 1$; il che dovrebbe farvi venire il sospetto che c’entri il toziente.

Vero; a parte i casi banali in cui salto zero ($p=1$) e in cui salto $n-1$ ($p=n$) e per i quali ottengo il poligono o sempre lo stesso punto, il numero delle stelle non è altro che il toziente di n ; siccome però le due stelle con p e con $n-p$ sono in realtà la stessa stella, sto contandole due volte; quindi, il *numero delle stelle* in un *n-agono* è:

$$\frac{\phi(n) - 2}{2} \quad [007.006]$$

Ora, voi sapete benissimo che queste formule a me sono estremamente simpatiche²⁴, ma in loro c'è sempre qualcosa di più di quello sembra.

Provate con l'esagono.

Allora, il toziente di **6** è **2**, menoduezerodivisoduezero. Già; **non è possibile** disegnare, all'interno dell'esagono, una stella senza alzare la matita dal foglio. Carino, vero?

E non è finita qui: esiste un **n** per cui all'interno dell'**n-agono** si possano disegnare esattamente **6** stelle? Conticini alla mano, vi accorgete subito che bisogna trovare:

$$n : \phi(n) = 14 \quad [007.007]$$

ma, se fate un po' di calcoli (possibilmente andando a rivedervi i limiti massimi e minimi del toziente in un intervallo) vi accorgete che *nessun numero ha toziente 14*. E quindi, niente da fare.

Non crediate sia l'unico: anche **26** e **34** condividono la stessa "simpatica" proprietà, significando che non esistono poligoni in cui si possano disegnare esattamente **12** o **16** stelle.

Ora, qualcuno ha un'idea di quali debbano essere le caratteristiche di un numero per **non essere mai toziente**? Provate, e se trovate qualcosa fateci sapere; pubblicheremo di sicuro.

Ora, parliamo un attimo d'altro.

Può darsi che oggetti come la Congettura di Collatz (RM 66: nota anche come "**3x+1**") o il Toziente di Eulero vi sembrino abbastanza inutili e che sia piuttosto difficile, attraverso di loro, raggiungere la gloria imperitura in Matematica; soprattutto perché ci sta lavorando sopra o ci ha lavorato un mucchio di gente abbastanza tosta (ho detto Eulero, mica tre sciamannati qualunque!). In questo caso, forse potrebbe interessarvi un grazioso oggettino comparso di recente²⁵.

Definiamo la funzione **f(n)** sui naturali in questo nodo:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in P \\ a * f(b) + f(a) * b & \text{se } n = a * b \\ 0 & \text{se } n = 1 \end{cases} \quad [007.008]$$

Ora, se date un'occhiata alla seconda (e indicate la funzione con l'apice, come si fa normalmente) forse vi diventa chiaro perché questi aggeggi siano noti come **Derivata dei Numeri**.

Non chiedetemi a cosa serva; il primo dubbio che sorge è che sia una cosa che non sta in piedi. Eppure, l'operazione di derivazione così come è definita è *ben formata*; infatti, data

la regola sopra, si può verificare che, se $n = \sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, allora è $n' = n \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{p_i}$ (e

personalmente consideriamo la similitudine tra questa forma e quella esplicita del toziente estremamente sospetta); non solo, ma la derivata prima di un numero sembra crescere (se parliamo di un numero composto) suppergiù come il numero (calcoli un po'

²⁴ Per il semplicissimo fatto che permettono di risolvere problemi del tipo "In quanti modi si può..."; quando cerco di contare i modi di solito ne perdo qualcuno per strada, quindi una formula che mi permetta di avere il valore subito mi piace sempre da matti.

²⁵ Il riferimento più remoto che siamo riusciti a trovare è un articolo del Novembre 2003 e, in generale, sembra vi si stiano applicando seriamente due persone (più il Relatore della Tesi di Ph.D. di uno dei due, ma non siamo sicuri questo conti molto).

più precisi mostrano che è sempre $n' \leq \frac{n * \log_2(n)}{2}$, ma questi sono dettagli), mentre per

i primi abbiamo già visto che vale **1**. Inoltre con semplici calcoli (che dovrete aver già fatto, parlando d'altro) la cosa è estendibile anche ai razionali; infatti, possiamo scrivere:

$$a' = \left(b * \frac{a}{b}\right)' = b * \left(\frac{a}{b}\right)' + \left(\frac{a}{b}\right) * b' \Rightarrow$$

$$b \left(\frac{a}{b}\right)' = a' - \left(\frac{a}{b}\right) * b' \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{ba' - ab'}{b^2} \tag{007.009}$$

...che, a occhio e croce, dovrebbe ricordarvi qualcosa dalle parti di Analisi I.

Evidentemente, sono possibili anche estensioni agli ordini superiori, ma qui la cosa si fa un po' complessa... Non per i calcoli (fatto uno, fatti tutti) ma per il comportamento. Qui da qualche parte trovate una tabella delle derivate di ordine superiore di un po' di numeri; fateci sapere se vi sembra una cosa sensata, che vi disdiciamo l'abbonamento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	1	1	4	1	5	1	12	6	7	1	16	1	9	8	32	1	21
0	0	0	4	0	1	0	16	5	1	0	32	0	6	12	80	0	10
0	0	0	4	0	0	0	32	1	0	0	80	0	5	16	176	0	7
0	0	0	4	0	0	0	64	0	0	0	176	0	1	32	368	0	1

Qualcuno aumenta indefinitamente, altri crollano a zero dopo pochi passi, il **4** che gioca a far l'esponenziale... Insomma, un comportamento un po' caotico. Tant'è che, per quanto riguarda i primi, esiste quello che uno di noi ha chiamato il Teorema della Balordaggine, che rappresenta sostanzialmente la licenza per saltare da tutte le parti:

$$\forall (x > 3) \in P \Rightarrow \left(\left(\frac{p}{p+1} \right)' < 0 \right) \wedge \left(\left(\frac{p}{p-1} \right)' > \frac{1}{2} \right) \tag{007.010}$$

Quasi come il toziente. E, in effetti, è molto probabile che tra i due ci siano più relazioni di quanto sembra, anche se a prima vista un certo qual grado di parentela lo si vede, con tutto quel lavorare con i fattori di un numero.

Utilità?

Dipende; ad esempio, sembra una domanda abbastanza stupida chiedersi se è vero o no che

$$\forall b \in N^+, \exists n \in N : n' = 2b \tag{007.011}$$

“potesse fregarci di meno...” Sì? La derivata del prodotto di due primi è la somma dei due primi, e a questo punto dimostrare la Congettura di Goldbach sembra decisamente più a portata di mano.

Ve ne dò un altro, di problemino da queste parti; consiste nel trovare le soluzioni (razionali) dell'equazione differenziale $x' = a$. Al momento, il problema dell'esistenza della soluzione per ogni a è (vedi problema precedente) irrisolto; la cosa divertente, è che per una categoria estremamente particolare di numeri cominciamo ad avere degli indizi; infatti, se consideriamo quella che di solito si chiama l'equazione omogenea associata

(sempre nel campo dei razionali per tutto quello che compare, tranne i p_i che sono primi),

$$x' = 0 \Leftrightarrow \left(x = \prod_i p_i^{a_i p_i} \right) \wedge \left(\sum_i a_i = 0 \right) \quad [007.012]$$

...insomma, tanto per cominciare un “*se e solo se*”, che ha una sua potenza espressiva; e poi, la condizione è che *gli esponenti siano divisibili per il fattore primo...* Siamo in piena follia.

A complicare la faccenda, **Westrick** (sarebbe uno dei due che lavorano da queste parti) ha dimostrato che $x' = ax$ ha una soluzione *se e solo se* a è esprimibile come un razionale con *denominatore senza quadrati* nella sua scomposizione in fattori primi (e se la soluzione è diversa da zero, allora ne esistono infinite).

Meditate, gente, meditate.

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms