Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 066 – Luglio 2004 – Anno Sesto

1. Cuori, Curve e Cupole

"La guerra è obsoleta,

oppure è l'uomo ad esserlo"

In quest'inizio di Luglio dovrebbe ormai essere evidente per tutti: le giornate si stanno accorciando, e di conseguenza l'estate (quantomeno quella astronomica, non necessariamente quella percepita) è ufficialmente cominciata. Non abbiamo intenzione di spacciare questa notizia per uno scoop degno del Pulitzer; piuttosto, ci piace l'idea di ritrovare nelle ovvietà più spudorate qualche briciolo di eccezione. Tanto per cominciare, fate una prova e chiedete in giro: scoprirete che la percentuale delle persone che in buona fede credono che in estate le giornate si allunghino, anziché accorciarsi, è tutt'altro che pari a zero. Tra queste, alcune credono in buona fede che il periodo di luce diurna d'estate continui a crescere e che l'inversione di tendenza cominci solo con l'autunno; altre, più semplicemente, sono pigre. E la loro pigrizia le induce a rifiutare la distinzione tra due concetti che dal punto di vista logico convivono benissimo ("d'estate le giornate sono lunghe" e "d'estate le giornate si accorciano"), e li fanno collassare in un unico concetto di comodo ("d'estate le giornate sono lunghe, insomma si allungano").

È probabile che in quest'inganno cadano pochi lettori di RM, se non altro perché fin dai primi rudimenti dell'analisi si impara a distinguere rapidamente tra una funzione e la sua derivata prima; ma è ancora più probabile che sbaglino ancor meno quelle persone che lavorano all'aperto, o che all'aperto si trovano spesso, magari per i quotidiani spostamenti casa-lavoro durante le ore prossime al sorgere e al tramontare del Sole. In alcuni casi il detto "vale più la pratica della grammatica" ha la sua buona ragion d'essere. In qualche caso specifico, comunque, la pratica vale ben poco: la poco stupefacente affermazione che ha aperto questo articolo è semplicemente falsa per l'1,34% dei summenzionati lettori di RM[1], perché per questo ridotto ma significativo sottoinsieme le giornate si stanno invece finalmente allungando, visto che abitano nell'emisfero australe. I nomi dei mesi non cambiano, e neppure quelli delle stagioni, ma lo loro relazione sì: e per una buona parte della popolazione mondiale Luglio è mese dai giorni brevi, appena liberatosi dalla morsa del solstizio d'inverno.

Per il boreale 98,66%, invece, siamo ufficialmente in estate: e l'estate è stagione caratterizzata da una certa pigrizia intellettuale; è probabile che ci sia una sorta di "imprinting" del periodo scolastico che rimane attivo anche quando si sono superati i sessant'anni; a Luglio ed Agosto non si studia, non si va a scuola, si va al mare, e sotto l'ombrellone non si ha granché voglia di risolvere problemi. Gli accessi al sito di RM cadono regolarmente, le iscrizioni pure; le riviste in edicola escono con copertine più colorate del solito, e inevitabilmente promettono all'interno un test per migliorare la conoscenza di sé stessi. I test dei settimanali sono una perfetta sintesi della pigrizia estiva: annunciano di ottemperare (certo parzialmente) al grande comandamento socratico "Conosci Te Stesso" facendo solo la minuscola fatica di barrare una decina di caselle in corrispondenza di altrettante domande. In genere, però, la maggior parte dei test delle riviste non incrementano di molto la reale conoscenza di sé stessi, perché, dopo aver risposto "SI" ad una serie di domande del tipo "Sareste disposti a ballare la ciaccona nudi nel cerchio di centrocampo prima della finalissima dei Campionati Europei di Calcio?", il responso del test vi informa che "Non siete troppo timidi". Altri test si basano invece sulla specializzazione stessa della rivista, assumendo di conseguenza nei lettori un certo grado di familiarità con gli argomenti trattati da giornale. Il caso delle riviste specialistiche ci tocca in fondo da vicino, e anche noi potremmo una volta o l'altra proporvene uno: tanto per darvi l'idea di come potrebbe essere strutturato, osservate attentamente la foto qui a fianco, che ritrae l'umbra[2] più famosa del mondo, e pensate rapidamente a quale sia il particolare della foto che più vi attrae. Mentre elaborate la risposta, considerate però anche quale sia il tipo di giornale che vi propone la domanda[3]: se questa

[1] Tutti i dati relativi ai lettori di RM si riferiscono solo all'insieme dei lettori registrati: siamo certi che RM sia in realtà seguito da un numero strabiliante di lettori che timidamente evitano di compilare il form di registrazione, ma per inserire questi nel campione statistico avremmo bisogno di una buona dose di arti divinatorie, e all'Università che abbiamo frequentato si sono rifiutati di insegnarcele.

[2] Fiero delle sue radici umbre, Doc non perde occasione per provare ad inoculare nel lettore l'impressione di essere il corrispondente maschile della Bellucci. Non credetegli minimamente *[AR & RdA]*.

[3] E questo è un consiglio di carattere assolutamente generale: un gran bel libro, pubblicato una trentina d'anni fa da Laterza, si intitolava "Come si legge un giornale", e l'autore era Paolo Murialdi, storico del giornalismo. Senza arrivare agli estremi di Bertrand Russell, che auspicava l'insegnamento all'esercizio

fosse una rivista specializzata in "Cosmetici e Make-Up", non potrebbero stupirci risposte che dichiarano magari che il particolare di maggior impatto siano quelle graziose forcine nere per l'acconciatura, o forse la tonalità elegante e discreta del rossetto. Chiusi nella nostra redazione, noi dovremmo essere invece propensi ad aspettarci che quattro risposte su cinque verterebbero invece sul décolleté o qualche altro aspetto dichiaratamente femmineo del soggetto, mentre solo un paio su dieci porrebbero l'attenzione su aspetti quali il vestito, i gioielli o la linea del rimmel. Ma ho detto "dovremmo essere", e il condizionale non è affatto casuale. La sommaria previsione discenderebbe infatti da una brutale, scontata e poco sofisticata applicazione delle percentuali che ripartiscono per sesso i lettori di RM: i maschietti sono infatti l'80,40%, e le femminucce assommano al 19,60%[4]. Propagando pedestremente queste percentuali ai luoghi comuni come "i maschi pensano solo a quella cosa lì" e "le femmine hanno per la testa solo i vestiti e la moda", ne potrebbero scaturire le previsioni citate. Ma se un lettore per conoscere un giornale deve per prima cosa conoscerne l'editore, la prima cosa che deve fare una redazione è provare a conoscere i suoi lettori. Siamo infatti certi che qualcuno dei nostri si interrogherebbe sulla recondita ragione per la quale una rivista di matematica ricreativa debba mai proporre una questione così poco matematica (l'aspetto "ricreativo" è ragionevolmente compiuto, grazie alla foto); qualcuno ci rimuginerebbe certo un po' sopra, e non dubitiamo che alla fine ci giungerebbero un certo numero di risposte del tipo: "la cosa che più mi ha colpito è la splendida catenaria disegnata dalla collana della signora ritratta".

Siamo sufficientemente smaliziati da intuire benissimo che tale risposta sarebbe una spudorata menzogna. Nessuno sarebbe colpito "soprattutto" dalla catenaria, ma è quasi certo che qualcuno barerebbe quel tanto che basta a risponderci in tal guisa. Del resto, è pur vero che la catenaria è curva bella e diffusa, e meriterebbe di assurgere agli onori della cronaca più spesso di quanto non faccia di solito. Da bravi inquilini del terzo millennio, siamo ormai abituati a vedere nei nostri paesaggi migliaia di angoli retti e di archi di cerchio, tutti generati dall'azione dell'uomo: sono familiari al punto di dimenticarci ormai quanto siano in realtà poco diffusi nei paesaggi naturali. Certo, un bel tramonto sul mare ci mostra trionfalmente una perfetta circonferenza eclissata da un orizzonte perfettamente rettilineo, ma se non fosse per gli umani manufatti, ben poche altre sarebbero le occasioni di notare tanta geometrica perfezione. Le coniche sono rintracciabili facilmente, specie le ellissi che si stampano sulle nostre retine ogni volte che vediamo dei cerchi da una prospettiva diversa dalla normale, ma visto che dell'artificialità dei cerchi abbiamo già detto sopra, di ellissi puramente naturali ci rimangono forse le orbite planetarie e poche altre, e osservare direttamente la forma ellittica dell'orbita di un pianeta non è cosa che capita tutti i giorni. Galileo ci ha insegnato per tempo a riconoscere le parabole nel moto dei proiettili, ma anche il riconoscimento del moto d'un proiettile non è esperienza immediata. Invece, anche il più vecchio degli uomini scimmia sperduto nella giungla preistorica della Rift Valley aveva migliaia di catenarie sotto gli occhi, qualche milione di anni fa. Una qualsiasi liana incastrata tra due alberi della foresta equatoriale disegna una catenaria perfetta: e la rugiada mattutina che appesantisce i segmenti di ragnatela che miliardi di ragni costruiscono senza soste disegna altrettanti miliardi di visibilissime catenarie. L'uomo contemporaneo è circondato da

dell'incredulità nella lettura dei quotidiani già per i ragazzi delle elementari, Murialdi rammenta ai lettori che la prima e più importante cosa da sapere nel predisporsi a leggere un giornale è il nome del proprietario del giornale stesso.

[4] E adesso potete dimostrare di essere buoni ed attenti lettori di matematica ricreativa. Non avete certo i dati per sapere con certezza quanti siano ad oggi in tutto gli abbonati ad RM, ma potete fare degli ottimi tentativi per indovinarlo: se qualcuno indovina il numero esatto, vince una citazione nella prossima Newsletter.

catenarie formate dai cavi elettrici che pendono pigramente dai tralicci; per non parlare dell'uomo contemporaneo estivo e fortunato, che magari passa il mese di Luglio in barca a vela e può bearsi della catenaria formata dal profilo delle vele gonfiate dal vento. E se quest'uomo fortunato decidesse di attraccare sulla Costa Brava, potrebbe anche decidere di prendersi un giorno o due di riposo dai sestanti e dagli spinnaker per andare a vedere alcune delle più famose opere di Antoni Gaudì.

Le opere di Gaudì sono in genere così complesse e poco lineari da piacere molto a coloro che ritengono la matematica una scienza arida e noiosa: sono coloro che trovano noiosi gli archi a tutto sesto del romanico, e ai quali in poco tempo viene a noia anche il gotico alto e sottile. Quando si trovano di fronte ai mille artifici dell'architettura di Gaudì, all'alternarsi continuo di curve e dettagli mai uguali, si sentono finalmente liberati dalla schiavitù delle linee rette e degli archi di cerchio, e inneggiano all'estetica "naturale". Non c'è assolutamente nulla di male in quest'atteggiamento: vorremmo solo che ci si rendesse conto però che Gaudì faceva un uso spropositato della matematica per ottenere lo stile così caratteristico nelle sue opere. Un'analisi anche solo superficiale rivela una pletora di ellissi e di iperboli nelle sue linee slanciate e rampanti: una miriade di parabole allungate e di spirali logaritmiche, di cilindri, d'elicoidi e di paraboloidi. E, soprattutto, di catenarie.

La catenaria non è una curva d'analisi elementare come il cerchio o le coniche: la sua equazione[5] la palesa subito come non algebrica, vista la predominate presenza di ***e***; ed è lecito chiedersi come possa un architetto fare uso esteso di questa curva, che richiede una fatica analitica maggiore dei cari vecchi archi di cerchio. La risposta sta proprio nella naturalezza della catenaria stessa: esistono foto[6] che ritraggono lo studio di Gaudì e che svelano l'arcano: il genio catalano tirava un robusto cavo sotto il soffitto, da una parete all'altra, poi procedeva ad appendere pesanti fili metallici al cavo così sotteso: fili su fili, fili appesi ad altri fili, a comporre un'imprevista ragnatela di metallo. L'intenzione era ovvia: una volta appurato che gli archi a forma di catenaria svolgono alla perfezione il loro compito architettonico di ripartire i carichi, anziché impazzire nel disegnare archi catenari su carta, Gaudì li faceva disegnare alla forza di gravità. Il cavo teso tra una parete e l'altra rappresentava di fatto la base, l'orizzonte, il piano terrestre sul quale si sarebbe elevata la costruzione; e i fili di metallo che diligentemente si disponevano a forma di catenaria disegnavano i tratti degli archi portanti che l'architetto di Raus intendeva disegnare su carta. Il "disegno" era ovviamente sottosopra, ma questo non doveva essere un grosso problema, alla fin fine: la piccola difficoltà era certo grandemente compensata dalle possibilità che il modello a fili pesanti consentiva. Bastava spostare un filo, cambiare la posizione di un nodo, e la struttura cambiava in un istante: ma non c'era bisogno di fare alcun calcolo, per vedere l'aspetto che assumeva l'intera costruzione a valle di ogni piccola modifica.

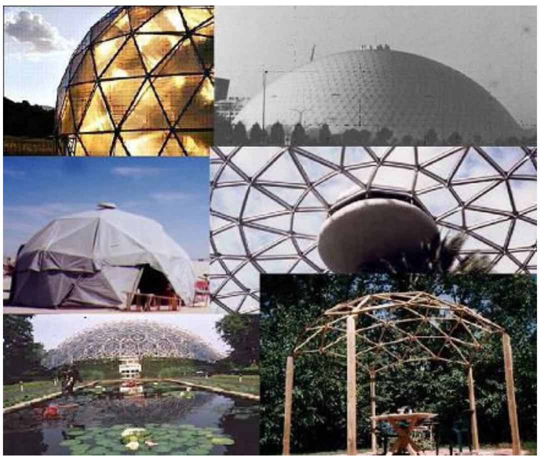
---

[5] $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right) = \frac{a}{2}\cosh\frac{x}{a}$

[6] Foto che eravamo riusciti a trovare in rete, ma che abbiamo dimenticato di salvare e archiviare: una mezza giornata passata successivamente alla loro disperata ricerca ha dato esito tragicamente negativo.

Non è insolito ritrovare nelle arti classiche importanti contributi della matematica: a cavallo tra il Quattrocento e il Cinquecento si ritrovano artisti che con pari dignità sono ricordati nei musei e nei trattati di matematica: Luca Pacioli era considerato un maestro dagli artisti, e Piero della Francesca studiò la prospettiva senza distinguere l'interesse artistico da quello puramente matematico. Albrecht Durer fece due viaggi in Italia: il primo nel 1494, perché era un pittore e sapeva che per migliorare la sua arte doveva recarsi presso i maggiori maestri del suo tempo, che erano per la gran parte italiani; il secondo viaggio lo intraprese nel 1505, quando era ormai artista celebrato in tutto il mondo, e sapeva che nessuno avrebbe più potuto insegnargli nulla nell'arte del pennello: ma voleva migliorare in matematica, e anche i migliori matematici erano italiani, a quei tempi. È però anche vero che la pittura contemporanea sembra sopravvivere ragionevolmente bene, anche senza troppi aiuti della matematica moderna. L'architettura è però arte con più vincoli delle classiche consorelle pittura e scultura: deve coniugare al meglio l'estetica con la funzionalità, la gradevolezza delle costruzioni con la loro solidità e sicurezza, l'integrazione dell'edificio nel tessuto urbano e l'integrazione di bagni e fognature anche in opere dalle pretese più mistiche. Una costruzione può forse nascondere abilmente le leggi della statica che la rendono possibile, così come fanno proprio anche le opere di Gaudì, ma non può certo farne a meno. Altre volte ancora, invece, una costruzione non è altro che matematica.

Esattamente cinquant'anni fa, Richard Buckminster Fuller brevettò la cupola geodesica. Ormai è diventato oggetto comune e forse neanche più sorprendente, visto che si ritrova nelle forme più svariate: come copertura gigantesca di grossi padiglioni da esposizione, ma anche come semplice tenda per campeggiatori: diffusa come copertura di serre di grandi dimensioni, ma perfino nei gazebo da giardino. Nato il 12 Luglio 1895 negli Stati Uniti d'America, Richard Buckminster Fuller è il matematico cui dedichiamo la celebrazione di questo mese: ma chiamarlo matematico è probabilmente improprio. Si definiva "architetto, ingegnere, inventore, filosofo, autore, cartografo, geometra, futurista, insegnante e poeta"; ciononostante i matematici non disdegnano di vederlo inserito nel loro stesso novero, forse perché era geniale e originale, e queste sono doti che i matematici in genere apprezzano. Cupola geodesica a parte, Buckminster Fuller era soprattutto un ricercatore convinto che la tecnologia fosse uno strumento potente e in grado di risolvere tutti i problemi dell'uomo, se ben applicata. Era forse un approccio ingenuo, caratteristico di molti suoi connazionali che, specialmente negli anni Cinquanta del secolo scorso, pensavano davvero di trovarsi già dentro il futuro. Certo però non mancava di entusiasmo e di buoni sentimenti: il momento topico della sua vita è quello in cui, nel 1927, pensa seriamente al suicidio, dopo aver perduto

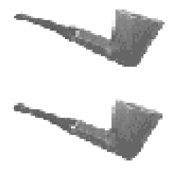
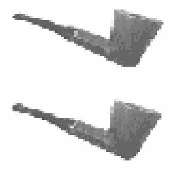
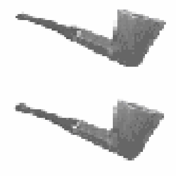
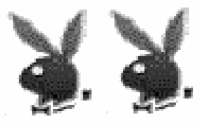


l'amata figlioletta di appena quattro anni d'età. Superata la crisi depressiva, mette in atto una sorta di rivoluzione mentale e di intenti: così come era stato studente irrequieto e poco disciplinato (due volte espulso da Harvard), diventa adesso professore e professore emerito. Fu davvero architetto e ingegnere (fece parte del Royal Institute of British Architects, che lo onorò con la Royal Gold Medal nel 1968); fu davvero inventore (25 brevetti negli Stati Uniti, compreso quello di una strana automobile a tre ruote); fu davvero autore e filosofo e futurista (scrisse 28 libri, e fu reso celebre dalla sua affermazione "sono un passeggero dell'Astronave Terra"); fu davvero geometra (per arrivare all'idea della cupola geodesica studiò la geometria Energetica-Sinergetica, un sistema vettoriale basato sul tetraedro che garantisce la massima resistenza con il minimo carico strutturale); fu davvero poeta (nel 1962 Harvard, che già lo vide studente così poco disciplinato, gli conferì una cattedra in Poesia).

Questo mese, gli USA lo celebrano con un francobollo che ricorda il cinquantenario del brevetto della cupola geodesica. Il suo cranio calvo è trasformato dal disegno commemorativo in una cupola ambientata in un paesaggio futuristico che non è già più il futuro che immaginerebbero i giovani di quest'inizio millennio: è piuttosto il futuro delle copertine dei libri di fantascienza, il futuro prossimo come poteva essere immaginato da un quindicenne negli anni Cinquanta.

Noi non possiamo emettere un francobollo per rendere merito ad uomo dalla mente così sorprendentemente poliedrica: siamo solo dei matematici dilettanti, che tengono in gran conto la cultura e soprattutto quella cultura che non si lascia incatenare in compartimenti stagni. Per questo ci è simpatico questo insolito genio, che non trascurava di inserire il titolo "insegnante" tra i molti che si riconosceva. Possiamo solo eleggerlo a nostro insegnante virtuale, e promettere di tenere in buon conto alcune delle sue affermazioni più significative, come quella che abbiamo scelto come introduzione a quest'articolo.

2. A Momentary Lapse of Reason

	PMP	**Dario Bressanini**	**Caronte**
Rudy d'Alembert			
Piotr R. Silverbrahms			

Vi meritate una spiegazione.

Tanto per cominciare, a Rudy e a Doc piacevano i Pink Floyd.

A questo aggiungete che Alice è in ferie, e senza presenze femminili in Redazione questi due loschi figuri diventano decisamente pigri. E fa caldo[7].

"...blemi?" "...Mah...".

Il fresco del Paesello (e il vento) hanno messo ordine tra i pensieri e i foglietti, e ci siamo ricordati che alcuni lettori tempo fa ci avevano proposto dei problemi. Tra pigrizia e memoria storica, abbiamo deciso di pubblicarli.

"Oeu, Rudy, ma perché tre?"

Beh, cosí *tutti* hanno *almeno* due problemi...

"Cosí ti salvi le storie attorno, eh?"

Nah. Per noi, ognuno di questi ha una storia (dietro, non attorno). E ve la raccontiamo.

Tutto ció giustifica ampiamente il titolo della rubrica, secondo noi.

2.1 PMP

Quando ci è arrivato questo, era accompagnato dal commento: "*Facendo ordine nei miei appunti universitari, ho trovato il testo di un simpatico problemino che avevo risolto...*".

Ora, noi l'avevamo risolto *[nota storica: Rudy ha avuto l'idea risolutiva in pieno tornante, guidando. La cosa si è conclusa con l'abbattimento di un paracarro (di quelli in plastica, fortunatamente) con danni irrilevanti all'auto. Riteniamo la cosa sia ormai caduta in prescrizione, quindi potete anche farvi aiutare dall'ANAS]*, poi abbiamo seminato il foglietto tra altri centomila appunti. Siete invitati a risolverlo, a perderlo (dopo averci mandato la soluzione) e, tra qualche anno, a mandarlo ad un'altra rivista di

[7] Tant'è che per avere l'energia sufficiente a mettere in sieme questo numero mi sono trasferito al Paesello (quello dei Rudolph), dove quando tutta l'Italia lamenta calura e siccità di solito piove a dirotto, bisogna accendere la luce e mettere il maglioncino leggero *[RdA]*.

matematica. Questo problema ha un destino; quando verrà definitivamente perso, l'Universo finirà.

Quello che ci era arrivato è questo:

> Molte sono le religioni che associano la fine del mondo al termine di una fase in cui si riesce a completare un immane lavoro. Certo ricordate i monaci tibetani che trascrivono i nove miliardi di nomi di Dio, come anche raccontato da Arthur Clarke; inutile poi rammentare che la Torre di Hanoi, nella versione "king size" con sessantaquattro dischi d'oro, è il lavoro di generazioni di monaci buddisti che devono spostare i dischi da un piolo all'altro perché l'universo possa finalmente avere termine[8].
>
> Meno nota, forse perché né i Conquistadores né i missionari sono mai riusciti ad arrivare fin là, è l'operazione che stanno compiendo gli appartenenti ad una tribù amazzonica. Essi costruiranno delle figurine d'oro e di argento, che raffigurano rispettivamente il Sole e la Luna, e le pongono in un lungo serpentone. L'universo, a detta loro, finirà quando saranno costretti ad avere tre copie consecutive della stessa sottosuccessione. Ad esempio, dopo SS (due copie del Sole), non se ne può mettere una terza: se poi si avesse la successione SSLSSLSS, il mondo sarebbe in pericolo, perché un nuovo Sole darebbe il gruppo SSS e una nuova Luna il gruppo SSL)(SSL)(SSL). Se la successione fosse SSLSSLLSS, invece, si potrebbe tranquillamente aggiungere una Luna.
>
> L'imperativo morale di questa tribù non consente loro di fare finta di nulla e fermare le operazioni: ogni minuto una nuova figurina deve essere aggiunta. Alle ore 12 del 22 dicembre 2001, solstizio inverno del 2001, il loro sacerdote darà il via all'immane impresa[9].
>
> Sapendo che la tribù ci tiene alla propria vita e quindi cercherà di non infilarsi in vicoli ciechi, per quanto tempo ancora il nostro universo esisterà?

Come vi dicevamo, lo abbiamo risolto; c'è da dire che Rudy ha trovato (come ama dire) una risposta bellissima con una soluzione schifosa. Però, ha pensato (meditando sul paracarro abbattuto) ad un'interessante estensione:

> ...Secoli dopo, appurato che ormai non c'era più sugo (trovata la regola, più nessuno aveva paura del Giudizio Universale), in quel felice villaggio dell'Amazzonia nacque un'eresia, sostenente che il problema era un altro.
>
> Scopo dell'Uomo nell'Universo era contare ***quante*** sequenze di statuette di una data lunghezza si potevano costruire; la regola, però, era che in queste sequenze *non potevano esserci due statue del Sole vicine*. Statue della Luna adiacenti quante volete, ma due Soli vicini, no.
>
> Il Mistero principale di questa eresia consisteva nel definire, ogni ***n***-esimo anno, quante sequenze di lunghezza ***n*** erano possibili. Se nel Mistero fosse stato recitato il numero sbagliato, il mondo sarebbe finito. Il *D'Alaim* (sarebbe uno stregone) Bert aveva recitato i numeri sinora, ma cominciava ad averne le ipersfere topologicamente compatte (leggasi "piene le scatole").
>
> Tocca a voi. Che numero dite l'anno prossimo?

E, giorni dopo, un'estensione all'estensione... Però qui dobbiamo confessare che alla soluzione non ci abbiamo pensato molto, anzi proprio per niente (dovevamo scrivere il prossimo numero di una prestigiosa rivista di Matematica!).

---

[8] Per non parlare del fatto che il 21 (o il 23) dicembre 2012 terminerà il primo Grande Conteggio (lo "tzolkin") dei Maya; il dover ricominciare a contare da "0.0.0.0.0" sembra a molti un'ottima occasione per la fine del mondo.

[9] …e così potete farvi un'idea di quanto siamo abili a conservare i problemi che ci mandate...

> Nel villaggio le statuette d'argento possono essere fatte solo dalla Corporazione degli Argentieri e quelle d'oro solo dalla Corporazione degli Orefici. A matematica questi non sono un gran che, e nanche a voglia di lavorare. I rappresentanti di entrambe le Corporazioni (portando esempi probanti per valori particolari) sostengono che sono *loro* a dover fare la maggior quantità di lavoro. Chi dei due lavora di più?

Sempre con le due Corporazioni: secondo voi è possibile calcolare (volendo pianificare il lavoro), chi deve fare la ***k***-esima statuetta? Mi raccomando, attenti ai paracarri.

2.2 Dario Bressanini (quasi)

Nome e cognome, visto che tutti (se avete letto bene) sapete che lavora (anche) per una certa insignificante rivistucola. Ora, per una serie di eventi dai quali si potrebbe tranquillamente trarre una telenovela in ambito matematico, il Nostro si è lasciato sfuggire il fatto che un altro tizio che lavora per la stessa rivista è una persona piuttosto insopportabile[10].

Comunque, tutto da buttare non è (il tizio, non Dario)... Prima di dimenticarlo definitivamente, cerchiamo di salvare il salvabile. Ecco, questo spunto ci sembra l'ultima cosa carina che ha fatto. Parafrasiamo un attimo, tanto per cambiare.

> Successivamente agli incredibili guadagni ottenuti dalla vendita di magliette, saliere e tovaglie, ci siamo ritrovati con un discreto capitale (diciamo ***17000*** Euro) da gestire; il nostro (ir)Responsabile Finanziario ha proposto di investire in azioni.
>
> A seguito di una veloce analisi di mercato, sono state individuate ***11*** società con probabilità ragionevoli di farci diventare ricchi; ognuna di loro, infatti, ha il ***40%*** di probabilità di *decuplicare* il capitale investito e il 60% di probabilità di "bruciare" tutto (niente vie di mezzo: o la va, o la spacca).
>
> Ora, la nostra richiesta è che venga creato un piano di investimenti che ci dia almeno il ***60%*** di probabilità di far crescere il fondo sino a ***60000*** Euro. Come deve allocare il fondo il nostro pescecane borsistico?

È abbastanza evidente che puntare tutto su una società non funziona; in questo modo avremmo solo il ***40%*** di probabilità di diventare ricchi. Ecco, la prima domanda sarebbe su come suddividere il fondo in questo caso.

> Successivamente a questo azzeccatissimo intervento finanziario, le ***11*** aziende di cui sopra si sono ritrovate in pieno "toro" (si vede, che ormai bazzichiamo agilmente il linguaggio di borsa?), e adesso hanno un'incredibile ***85%*** di probabilità di *decuplicare* gli investimenti. Evidentemente, anche noi siamo diventati più avidi, ed ora il nostro promotore finanziario si trova davanti alla richiesta di trasformare ***17000*** Euro in ***100000*** con una probabilità del ***95%***.

In questo caso, come suddividete l'investimento? E *quanto* investite[11]?

2.3 Caronte

Non è stato un Comitato di Redazione.

Tanto per comiciare, mancava Alice, e poi abbiamo più volte sottolineato che il JAFO ai CdR praticamente non ha diritto di parola.

Siamo andati a cena con Caronte! Risultato:

1. Ci ha offerto la cena;

---

[10] ...e noi siamo ***quasi*** d'accordo. In cinque anni, ci ha fornito sì e no tre spunti per dei problemi decenti.

[11] Giusto per aiutarvi: forse vi stiamo aiutando troppo...

2. Ci ha promesso una soluzione "delle sue" ad un noto problema;
3. Noi (Rudy e Doc) avremo spiccicato sì e no una trentina di parole in tutta la sera

E tutte e tre le cose ci hanno reso molto felici[12].

Siccome precedentemente i nostri rapporti erano improntati ad una certa qual formalità, ci siamo raccontati cosa abbiamo fatto nella vita passata e presente; dati i nostri rapporti attuali, abbiamo fatto il possibile per buttarla "sul matematico" (per questo Doc e Rudy si sono limitati nello sproloquio). Caronte ci ha raccontato un problemino che, dice, "mi ha fatto vincere molti aperitivi" (offerti ai presenti, dice lui).

> Avete una scacchiera della quale potete usare *solo due colonne* (insomma una scacchiera 2x8. Mettiamoci d'accordo per tutto il problema: prima le colonne, poi le righe), con due pedine in prima e in ottava; potete muovere, ad ogni turno, una delle vostre pedine *avanti o indietro* di quante caselle volete; *non potete saltare* le pedine avversarie e *non potete mangiare*. Perde il primo che non può muovere nessuna delle sue pedine.
>
> Trovate una strategia di vittoria.

L'espansione "zero" *[e questo è un* grosso *aiuto (RdA)]* è di passare ad una scacchiera ***2xN***, e successivamente ad una scacchiera ***NxK*** *["N" colonne, "K" righe, casomai non si capisse (RdA)]*.

Però, sta arrivando l'estate, mentre scriviamo queste righe *[è il venti giugno e piove (RdA)]*; quest'anno niente "Summer Contest" (non abbiamo trovato niente di divertente), ma qualcosa di pesantino vorremmo rifilarvelo.

> Doc, per evidenti motivi[13], ha immediatamente trovato una strategia, e poi ha cominciato a parlare d'altro. Rudy, come sempre più interessato ai problemi che alle soluzioni, ha cercato delle generalizzazioni. E, chiaramente, ha solo una vaga idea della soluzione.
>
> Questa volta, avete una scacchiera ***3x3***, con tre *pedoni* (degli scacchi) per ogni riga di fondo. I pedoni muovono come i pedoni degli scacchi, tranne il fatto che anche la prima mossa deve essere di una sola casella, e arrivati "in ottava" (che qui sarebbe la "terza") si fermano lí e non possono più muovere; prendono[14] come i pedoni degli scacchi, ma logicamente è vietata la presa "en passant".
>
> Quello che ci piacerebbe sapere, è se esiste una strategia di vincita anche per questo gioco.

"E perché non ve lo risolvete da soli?" Perché Rudy si è posto subito un'altra domanda.

> ...e se la scacchiera è ***Nx3***?

Come diceva James Thurber, "Allevare un segugio è estremamente snervante: quando lo chiami, non gli importa assolutamente nulla di dove tu sia; quello che lo affascina, è *come tu sia arrivato lì...*".

3. Bungee Jumpers

Dalla *Sesta Olimpiade Matematica Irlandese*:

[12] Per quanto riguarda la prima, gli abbiamo strappato la promessa che la prossima volta tocca a noi; e se la terza vi lascia perplessi, sappiate che le capacità oratorie di Caronte hanno fatto sì che Doc fumasse ***una sola sigaretta in tre ore!*** Incredibile.

[13] E questo è un aiuto enorme *[PRS]*.

[14] Alberto sostiene che non si dice "mangiano"; "mangiano" solo nella dama! Qui, "prendono"!. Quasi quasi, preferivo se non si riappassionava, agli scacchi

La linea $\boldsymbol{l}$ è tangente al cerchio $\boldsymbol{S}$ nel punto $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ sono punti su $\boldsymbol{l}$ dalle due parti di $\boldsymbol{A}$ tali che le rette tangenti a $\boldsymbol{S}$ passanti per $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ si incontrano in $\boldsymbol{P}$. Trovare il luogo geometrico di $\boldsymbol{P}$, se $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ variano su $\boldsymbol{l}$ in modo tale che $|AB| * |AC| = \text{costante}$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

2004-05-28 19:13	[064] – P2 – Orso 3000	È solo una *risposta!*
2004-06-01 15:56	[065] – P1 – Mistral	
2004-06-01 22:14	[065] – P2 – Zar	
2004-06-02 22:50	[065] – P2 – PMP	
2004-06-04 10:45	[065] – P2 – PingPong	
2004-06-04 18:53	[065] – P1 – PMP	Colto da grafomania... Più di tre righe!
2004-06-05 13:44	[065] – P1 – Jvanbie	
2004-06-05 11:29	[065] – P1 – U_Toki	
2004-06-11 17:04	[065] – P1 – Torkitorio	
2004-06-15 22:37	[065] – P1 – Marcello	
2004-06-21 16:46	[065] – P1 – Guido	

Prima di tutto, un sentito ringraziamento: sapendo che Alice era in ferie e quindi le Soluzioni e Note sarebbero state in carico a quel pigrone di Rudy, avete mandato la metà delle soluzioni solite.

4.1 [064]

4.1.1 Attenti alla simmetria!

Vi raccontiamo cos'è successo.

Ci era arrivata, per questo problema, la soluzione di ***Sam***; abbiamo (velocemente) verificato i passaggi, visto che il risultato era uguale al nostro, apprezzato il fatto che seguisse un metodo completamente diverso e pubblicato.

Il guaio è che il calcolo del prodotto (finito):

$$2^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\sin\left(\frac{i*\pi}{n}\right)=2^{n-1}*\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right) \qquad \text{[004.001]}$$

ci siamo limitati a *verificarlo* per un centinaio di valori di $\boldsymbol{n}$.

Ora, ***Zar*** ci ha chiesto se avevamo la dimostrazione di questo passaggio; in alcuni testi di matematica abbiamo trovato *l'enunciato* della formula, ma dimostrazione nisba; quindi abbiamo chiesto a Sam, che al momento sta occupandosi di matematica nei due luoghi in merito più seri d'Italia (uno è la ***Sagra del Pesce Algebrico!*** Non ve la sarete mica dimenticata, vero?!? A Caldè sul Lago Maggiore, 8-9 Agosto. Per quanto riguarda l'altro posto, complimenti & profonda invidia dalla Redazione tutta).

Mentre stavamo per andare in macchina (nel senso che avevamo appena finito di scrivere una parte che non leggerete mai) è arrivata la risposta: la trovate qui sotto, messa in bella.

Sia

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right). \qquad [004.002]$$

Si sa che è:

$$\begin{aligned} \sin t &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\ &= \frac{e^{it}}{2i} * \left(1 - e^{-2it}\right) \end{aligned} \qquad [004.003]$$

da cui:

$$P = \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{2i}\right)^{n-1} * \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{-\frac{2i\pi k}{n}}\right). \qquad [004.004]$$

Sappiamo anche che $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.

Inoltre, $e^{-\frac{2i\pi k}{n}}$ sono le radici ***n-esime*** dell'unità.

Quindi, sono soluzioni di $x^n - 1 = 0$, se escludiamo la soluzione per ***k=n*** che vale ***1***.

Si ha allora:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{-\frac{2i\pi k}{n}}\right) &= \frac{x^{n-1}}{x - 1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k \end{aligned} \qquad [004.005]$$

Quindi, se ***x=1***, si ha

$$P = \frac{n}{2^{n-1}} \qquad [004.006]$$

...che è esattamente quello che ci serviva. Grazie, Sam!

4.2 [065]

4.2.1 Tutta colpa di Doc...

Rudy deve confessarvi una cosa: questo problema gli è sempre piaciuto pochino (tant'è che se lo teneva in archivio da qualche anno), e solo il parlare di punteggi da parte di Doc ha fatto sì che si decidesse a pubblicarlo. È molto contento che vi sia piaciuto, quindi. Adora essere contraddetto quando dice che una cosa scritta da lui non gli piace *[e questo succede continuamente con i Paraphernalia Mathematica, che i due terzi restanti della Redazione sono, per questo motivo, costretti a leggere e ad incensare... (PRS & AR)].*

Dicevamo, è piaciuta talmente che addirittura ***PMP*** è diventato prolisso, e ci ha inviato un interessante ragionamento.

Il problema è uno di quelli da trattare nel caso generale, così si fanno un po' meno di conti dopo. Iniziamo con le cose facili, e cioè con l'algoritmo del MCD di Euclide. Da lì scopriamo subito alcune cose interessanti, di cui non mi metto a scrivere la dimostrazione perché sarebbe un insulto all'intelligenza del lettore:

1. I due valori ***a*** e ***b*** ($a > b$, senza perdita di generalità) devono essere coprimi, altrimenti ci sarebbe una quantità infinita di numeri non generabili.
2. Il valore ***ab*** è il più piccolo che può venire generato in due modi distinti.
3. Tutti i valori maggiori di ***ab*** sono generabili.
4. Il più grande valore non generabile è $(a-1)(b-1)-1$.

Beh, di [4] non me ne faccio nulla, ma era giusto per dire qualcosa.

Qui ci permettiamo di dissentire: a parte che è molto graziosa, rende meno traumatico il controllo dei numeri non possibili; infatti, ci basta controllare fin lì! E, forse, avrebbe instillato qualche ragionevole dubbio a ***Mistral***, che ci ha mandato una soluzione molto carina ma che arriva al risultato sbagliato.

Passiamo alle cose un po' più difficili. Per capire come mi muovo prendo un esempio pratico: ***a=12***, ***b=7***. Guardiamo le tabelline dei numeri generabili come ***ha+kb***, ***0<=h<b***, ***0<=k<a*** *[PMP, estendiamo la tabella per motivi didattici: abbastanza da includere (come fai correttamente notare al punto [2] i valori* ***ab*** *ripetuti: si vede facilmente che non esistono valori minori ripetuti (RdA)]*: La barra indica che da lì in poi i valori sono superiori ad *ab*=84. Il bello è che, visto che la tabella ha esattamente *ab* numeri e questi sono tutti distinti, se prendessimo i valori modulo *ab* avremmo esattamente tutti quelli da 0 ad *ab-1*; quindi questi "valori superiori" corrispondono esattamente ai valori non generabili. Perfetto. Quanti sono? La formula è:

0	12	24	36	48	60	72	**84**
7	19	31	43	55	67	79	91
14	26	38	50	62	74	86	98
21	33	45	57	69	81	93	105
28	40	52	64	76	88	100	112
35	47	59	71	83	95	107	119
42	54	66	78	90	102	114	126
49	61	73	85	97	109	121	133
56	68	80	92	104	116	128	140
63	75	87	99	111	123	135	147
70	82	94	106	118	130	142	154
77	89	101	113	125	137	149	161
84	96	108	120	132	144	156	168

$$\sum_{m=0}^{a-1} \left\lfloor \frac{mb}{a} \right\rfloor \qquad \textbf{[004.007]}$$

cioè la somma delle parti intere di 0/12, 7/12, 14/12, 21/12, ... 77/12.

Visto che la funzione "parte intera" è sempre un po' rognosa, iniziamo a sommare senza di essa:

$$\sum_{m=0}^{a-1} \frac{mb}{a} = \frac{b}{a} \sum_{m=0}^{a-1} m = \frac{b}{a} * \frac{a(a-1)}{2} = \frac{b(a-1)}{2}. \qquad \textbf{[004.008]}$$

Noi abbiamo però sommato dei resti in più. Sempre per l'algoritmo di Euclide, questi resti sono, anche se in ordine sparso, 0/12, 1/12, 2/12, 3/12, ... 11/12. La loro somma è

$$\frac{1}{a} * \frac{a(a-1)}{2} = \frac{a-1}{2} \qquad \textbf{[004.009]}$$

quindi il valore della `[007]` sarà dato dalla differenza tra la `[008]` e la `[009]`, e cioè:

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2} \qquad \texttt{[004.010]}$$

Finita la digressione teorica, torniamo al nostro problema. Se abbiamo ***35*** valori non possibili,

$$(a-1)(b-1)=70 \qquad \texttt{[004.011]}$$

da cui avremo come possibili valori per $(a-1)$, $(b-1)$, ***a*** e ***b*** quelli indicati nella tabella a fianco.

$(a-1)$	$(b-1)$
70	1
35	2
12	5
10	7

a	***B***
71	2
36	3
13	6
11	8

La seconda soluzione ***(36;3)*** si butta via perché ***a*** e ***b*** non sono coprimi; la prima soluzione ***(71;2)*** si butta via perché $58=29*2$ e quindi è generabile; la terza soluzione ***(13;6)*** si butta via perché $58=4*13+6$; ci rimane la quarta soluzione che è la nostra risposta.

E il nostro PMP preferito ci prende anche per i fondelli:

> Spero che per una volta ti piaccia quanto (nel senso di quantità) ho scritto.
>
> Per la cronaca, fino alla [4] ci sono arrivato subito, la somma con i valori interi l'ho trovata stamattina, e stasera l'ho calcolata: mentre scrivevo il mail mi sono accorto che il rettangolone dava automaticamente i valori non generabili :-)

jvanbie (non abbiamo ancora capito quali lettere vanno maiuscole, e in questo campo sembrate piuttosto permalosetti) ci manda la risposta (corretta) e questa nota:

> questa soluzione l'ho ricavata in modo così strano che ci metterei tanto a scrivere il procedimento e ci vorrebbe troppo anche per leggerlo.

Quindi, se questo numero viene smilzo, sapete con chi prendervela.

Chi cerca di inciccire il numero è ***U_Toki***, che ci manda un file (anzi, due: uno in Excel) con un metodo di calcolo basato su tabelle in cui utilizza la ***differenza*** tra i due punteggi possibili; essendo ancora vero che $11-8=3$, al Nostro va bene al terzo tentativo.

Escono, durante il ragionamento, alcune considerazioni piuttosto interessanti:

> 0-0 è un punteggio possibile (basta essere dei brocchi e non fare canestri!);
>
> 1. se un certo punteggio **p** è possibile, allora anche tutti i punteggi "multipli di **p**" lo sono (basta fare il doppio, il triplo, ecc. del numero di canestri di entrambi i tipi che servono per arrivare a **p**);
> 2. se un certo punteggio **p** non è possibile, allora anche tutti i punteggi "divisori di **p**" sono impossibili;
> 3. tutti i punteggi (non nulli) minori stretti di **a** (che è il minore tra **a** e **b**) sono impossibili;
>
> L'osservazione 2 ci porta inoltre a concludere, ad esempio, che 1, 2 e 29 (i divisori di 58, che è impossibile) sono punteggi impossibili.
>
> L'osservazione 3 invece implica che **a** non può essere più grande di 36, altrimenti tutti i punteggi da 1 a 36 sarebbero impossibili e quindi il numero di punteggi impossibili sarebbe *almeno* 36 (mentre questo numero è *esattamente* 35).

> Vediamo ora che **a** e **b** devono essere primi tra loro, cioè MCD(**a**,**b**)=1.
>
> Infatti, supponiamo che **n** sia fattore comune di **a** e di **b** diverso da 1, quindi **a=hn**, **b=kn**; allora un generico punteggio possibile sarebbe
>
> $$\begin{aligned} p &= xa + yb \\ &= xhn + ykn \\ &= n(xh + yk) \end{aligned} \qquad [000.012]$$
>
> cioè **p** dovrebbe essere multiplo di **n**: ma questo non è accettabile, dato che, essendo finito (=35) il numero di punteggi impossibili, *da un certo punto in poi* tutti i punteggi sono possibili e non solo quelli multipli di **n**.

E poi si parte con una sfilza di tabelle che vi risparmiamo, anche se abbiamo apprezzato. Quello che ci ha colpito è un'affermazione del Nostro, giá fatta in forma più forte da PMP:

> Pertanto, generalizzando, i punteggi impossibili devono per forza essere più piccoli di $(a-1)b$.

Che lascia piú spazio di quello che lasciava PMP alla sua terza affermazione, ma comunque rappresenta un limite utile per i calcoli.

Chi si lancia in quarta è ***Marcello***, che (anche lui un po' per tentativi) arriva al risultato corretto e, montatosi la testa, cerca di strappare a Goldbach il titolo di inventore di domande strampalate.

> Il fatto è che questo gioco mi ha aperto un nuovo problema che ho chiamato *Congettura di Marcello* (mi prendi per un pazzo fanatico convinto??? probabilmente è vero *[Lungi da noi l'idea di smentirti in quest'ultima affermazione (RdA)]*).
>
> Siano ***a***,***b*** appartenenti ad ***N*** e tali che ***(a,b)=1*** (ossia primi tra loro). Allora esiste ***P*** appartenente ad ***N*** tale per cui per ogni ***n>P***, esistono ***x,y*** appartenenti ad ***N*** (e non a ***Z***) tali che ***ax+by=n***; inoltre tale limite inferiore ***P*** è ***ab-(a+b)***.
>
> Per cui ***ax+by*** genera sicuramente tutti i numeri maggiori di ***ab-(a+b)***.

Adesso non fate come Eulero, che stiamo ancora aspettando la risposta alla lettera.

4.2.2 Maratona probabilistica

Qui avete fatto delle bellissime analisi *[e qualcuno ci ha mandato delle bellissime tabelle... Non in Excel. In "Calc", che sarebbe l'Excel di OpenOffice (RdA)]*. Cominciamo con ***Zar***.

> **Premessa**: La prima parte del problema la conoscevo già (c'erano tre porte invece di tre scatole, ma a parte questo non c'era nessun altra differenza). Mi convinsi del fatto che conviene cambiare scatola in due modi: simulando il tutto con un programmino per computer, e ragionando come segue.
>
> Immaginiamo un gioco con ***1000*** scatole invece delle classiche ***3***. Io scelgo una scatola, il presentatore *ne apre* **998***, lasciandone una chiusa*, e mi chiede "sei sicuro?". Evidentemente una volta su ***1000*** il premio è nella mia scatola, ma ***999*** volte su ***1000*** il premio è nelle altre ***999*** scatole. Se me ne vengono aperte ***998***, allora significa che ***999*** volte su ***1000*** il premio è nell'altra scatola che non è stata ancora aperta *[Infatti, questo è il modo "classico" per dimostrare la correttezza della soluzione]*. Dunque *nel primo caso conviene sempre cambiare*: ***2*** volte su ***3*** trovo il premio, ***1*** volta su ***3*** lo perdo.

Veniamo adesso agli altri due casi. Indichiamo con ***C*** la strategia "cambio scatola" e con ***T*** la strategia "non cambio scatola" *[ossia "tengo"; Zar, per uniformità abbiamo cambiato la notazione].*

Lemma: qualunque sia il numero di volte in cui il bravo presentatore offre al giocatore di rigiocare, *l'ultima scelta deve essere* **C**.

Dimostrazione: per quanto detto sopra, se si cambia scelta ci si prende ***2*** volte su ***3***, se non si cambia invece si ha solo una possibilità su ***3*** di prendere il premio. Siccome questa è l'ultima scelta, e non c'è un'altra possibilità di rigiocare, conviene cambiare.

Vediamo quindi il secondo livello di gioco, quello con una sola possibilità di ripetere, vincendo eventualmente ***2000***. Ci sono due possibili strategie: ***C/C*** e ***T/C***.

Strategia C/C: ***2*** volte su ***3*** vinco ***1000***, ***1*** volta su ***3*** non vinco niente ma ripeto il gioco, e ancora ***2*** volte su ***3*** vinco ***2000***, ***1*** volta su ***3*** non vinco nulla. Quindi la vincita sarà di $\frac{2}{3} * 1000 + \frac{2}{9} * 2000 = \frac{10000}{9}$.

Strategia T/C: ***1*** volta su ***3*** vinco ***1000***, ***2*** volte su ***3*** non vinco niente ma ripeto il gioco, e ***1*** volta su ***3*** non vinco nulla mentre ***2*** volte su ***3*** vinco ***2000***. Quindi la vincita sarà di $\frac{1}{3} * 1000 + \frac{4}{9} * 2000 = \frac{11000}{9}$.

Dunque la strategia migliore in questo caso è ***T/C***.

Invece di riscrivere tutto per il terzo livello di gioco, allego una tabellina fatta con OpenOffice in modo da schematizzare il tutto.

Come si vede dalla tabella, ci sono quattro tipi di strategie: ***C/C/C C/T/C T/C/C T/T/C.***

Il calcolo della vincita per le prime due porta allo stesso risultato, e cioè 4000/3, mentre il calcolo della vincita per le altre due porta ancora allo stesso risultato, che però è 5000/3. Quindi conviene adottare una delle due ultime strategie.

Strategia C/C/C

1/3 Non vinco	1/3 Non vinco	1/3 non vinco		
		2/3 vinco 3000	2/27 vinco 3000	
	2/3 Vinco 2000		2/9 vinco 2000	**Totale: vinco 4000/3**
2/3 Vinco 1000			2/3 vinco 1000	

Strategia C/T/C

1/3 Non vinco	2/3 Non vinco	1/3 non vinco		
		2/3 vinco 3000	4/27 vinco 3000	
	1/3 Vinco 2000		1/9 vinco 2000	**Totale: vinco 4000/3**
2/3 Vinco 1000			2/3 vinco 1000	

Strategia T/C/C

2/3 Non vinco	1/3 Non vinco	1/3 non vinco		
		2/3 vinco 3000	4/27 vinco 3000	
	2/3 Vinco 2000		4/9 vinco 2000	**Totale: vinco 5000/3**
1/3 Vinco 1000			1/3 vinco 1000	

Strategia T/T/C

2/3 Non vinco	2/3 Non vinco	1/3 non vinco		
		2/3 vinco 3000	8/27 vinco 3000	
	1/3 Vinco 2000		2/9 vinco 2000	**Totale: vinco 5000/3**
1/3 Vinco 1000			1/3 vinco 1000	

E si vede benissimo che Zar è poco che ci legge, altrimenti avrebbe visto che per certe cose piuttosto che "Calc" è meglio usare "Impress" (è il cugino furbo di PowerPoint). Infatti, abbiamo utilizzato questo quando avevamo presentato lo stesso problema tempo fa[15].

Soluzione sostanzialmente simile da parte di ***PMP*** che, probabilmente esausto per la prolissitá mostrata nel primo problema, si è tenuto sullo schematico; svolgendo, però, alcune interessanti considerazioni:

> Con tre serie di scatole, l'analisi si complica, visto che nella terza ci sono tremila e non 4000 euro. Assodato che all'ultima volta si cambia scatola, abbiamo quattro possibilità: TTC,TCC,CTC,CCC (T sta per tengo, C per cambio). I rispettivi valori aspettati sono:

[15] Introduzione alla rubrica *Bungee Jumpers*, RM_025, Febbraio 2001.

$$TTC: \quad 1000*\frac{1}{3}+2000*\left(\frac{2}{3}*\frac{1}{3}\right)+3000*\left(\frac{2}{3}*\frac{2}{3}*\frac{2}{3}\right)=\frac{(9000+12000+24000)}{27}$$
$$TCC: \quad 1000*\frac{1}{3}+2000*\left(\frac{2}{3}*\frac{2}{3}\right)+3000*\left(\frac{2}{3}*\frac{1}{3}*\frac{2}{3}\right)=\frac{(9000+24000+12000)}{27}$$
$$CTC: \quad 1000*\frac{2}{3}+2000*\left(\frac{1}{3}*\frac{1}{3}\right)+3000*\left(\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{2}{3}\right)=\frac{(18000+6000+12000)}{27}$$
$$CCC: \quad 1000*\frac{2}{3}+2000*\left(\frac{1}{3}*\frac{2}{3}\right)+3000*\left(\frac{1}{3}*\frac{1}{3}*\frac{2}{3}\right)=\frac{(18000+12000+6000)}{27}$$

> Se non sto dormendo, al primo tentativo devo tenermi la scatola, all'eventuale terzo cambiarla, al secondo faccio quel che mi pare.

No, non stai dormendo; è proprio quel "faccio quel che mi pare", che ci è piaciuto del giochino.

Un attimo di attenzione, prego. Tutti coloro ai quali piace "Dichiarazione d'amore" di Mayer sono pregati di saltare il prossimo paragrafo; il nostro ***PingPong***, infatti, non ne sembra proprio un entusiasta sostenitore: in compenso, effettua un'ottima analisi della prima parte:

> Esaminiamo un attimo la strategia della "Nemesi": sa sempre dov'è presente la vincita, quindi, se la nostra prima scelta è quella sbagliata, la sua sarà obbligata, mentre se la nostra prima scelta è quella giusta, avrà due possibilità di scelta equivalenti. Consideriamo una situazione generale in cui in un pacco sia presente una vincita ***X***, e negli altri non ci sia nulla o ci sia una cosuccia ridicola o insensata (magari un centesimo o una copia di "Dichiarazione d'amore" di Mayer), indichiamo i tre possibili valori di un pacco con: ***X***, ***0***, ***0***. Se la mia prima scelta è ***X***, e cambio pacco, perdo; d'altronde, se la mia scelta era ***0*** e cambio pacco, vinco. Dunque, se tengo il pacco, posso vincere solo se esso è ***X***, e la probabilità è ***1/3***; invece, se cambio, posso vincere solo se il primo scelto era ***0***, e la probabilità è ***2/3***. Quindi, mi conviene cambiare! (a meno che il giocatore sia un amante del libro citato, nel qual caso si tenga stretto il suo pacco e i miei insulti).

Nella seconda (e nella terza) parte inciampa un po' calcolando le probabilitá (anziché il ***valore atteso***), nel senso che a lui interessa "vincere comunque", indipendentemente dalla cifra che si porta a casa; in questo modo, arriva (per il terzo caso, cambio-cambio-cambio) ad un'incredibile ***26/27*** di probabilità di vincere qualcosa...

Sulla stessa linea sembra porsi ***Torkitorio*** (in compagnia di ***Guido***) con la dichiarazione:

> [...] le strategie vincenti a pari merito sono perciò TTC e TCC; tra le due è preferibile TCC in quanto permette di accumulare i soldini già al secondo turno.

Beh, però se arrivo al terzo turno guadagni di piú...

A questo punto mi è sorto un dubbio: "...ma l'avevo detto, che al terzo turno ci vai solo se *sbagli i primi due*?" Beh, sì. Questa volta me l'ero ricordato.

5. Quick & Dirty

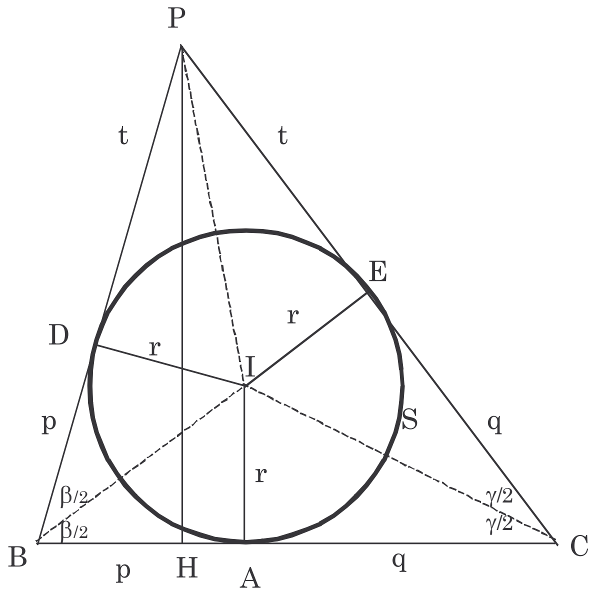
Qual'è il giorno più lungo dell'anno?

6. Pagina 46

Sia ***S*** l'*incerchio* del triangolo ***BCP***; indichiamo $P\hat{B}A=\beta$, $P\hat{C}A=\gamma$; sia inoltre:

$$\overline{AB} = p\,,\ \overline{AC} = q$$

con $pq = k^2$, costante.



Sia ***S*** tangente a $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$ rispettivamente in ***D*** ed ***E***; per il triangolo ***PEI*** si ha allora $E\hat{I}P = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$; quindi:

$$t = r * \tan\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{(p+q)r^2}{pq - r^2}\,.$$

Il semiperimetro del triangolo ***BCP*** è pari a:

$$\begin{aligned} p + q + t &= p + q + \frac{(p+q)r^2}{pq - r^2} \\ &= \frac{pq(p+q)}{pq - r^2} \end{aligned}.$$

L'area del triangolo ***BCP*** risulta pari a:

$$r\frac{pq(p+q)}{pq - r^2} = \frac{1}{2}(p+q) * \overline{PH}$$

dove $\overline{PH}$ è l'altezza del triangolo ***PBC*** riferita al lato $\overline{BC}$.

Segue quindi che:

$$\overline{PH} = \frac{2pqr}{pq - r^2} = \frac{2k^2 r}{k^2 - r}$$

e il luogo geometrico di ***P*** è una retta parallela a ***BC***.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Sembra facile…

If you only have a hammer,
All looks like a nail.
(il capo inglese di Rudy)

…avete presente quegli analfabeti matematici (sia detto senza offesa) convinti di riuscire a diventare ricchi giocando al Lotto? Per darsi un metodo, la loro attività preferita è quella di stabilire delle strane regole di Persistenza, Variazione, Tendenza[16] e chi più ne ha più ne metta. A loro sembra incredibile che un procedimento così semplice come estrarre delle palle da un'urna non sia definibile matematicamente in modo strettamente deterministico. Logicamente, in questo campo vanno un po' per tentativi, come tutti quelli che non sanno che pesci pigliare.

Giusto per parlare d'altro, vediamo un problemino; Doc voleva darvelo per Aprile, ma siamo riusciti a dissuaderlo. Anche perché "dematematizzarlo" è difficile… Allora, è data una successione:

$$S_0 \in N; \quad S_i = \begin{cases} \dfrac{S_{i-1}}{2} & \text{se } S_{i-1} \text{ è pari} \\ 3 * S_{i-1} + 1 & \text{se } S_{i-1} \text{ è dispari} \end{cases} \qquad \texttt{[007.001]}$$

Fate qualche prova; ad esempio, per ***N=13,*** si ha la successione ***13***, ***40***, ***20***, ***10***, ***5***, ***16***, ***8***, ***4***, ***2***, ***1***, ***4***,… e da qui in poi si ripete.

Ora, la domanda è abbastanza evidente; si vorrebbe sapere quali numeri si comportano così.

Più formalmente, si definiscono il ***minimo*** e il ***massimo*** della successione, e si definisce serie ***convergente*** quella per cui il minimo è ***1***, serie ***divergente*** quella per cui il massimo non esiste (è infinito) e viene detta serie ***ciclica*** quella che si comporta in qualche altro modo.

Facile, semplice… Peccato che Doc volesse proporlo ad Aprile per il semplice fatto che è irrisolto[17].

Infatti, si tratta della ***Congettura di Collatz*** (o del ***3x+1***, o di ***Siracusa***, fate voi… è talmente snervante che gli hanno dato un mucchio di nomi); in semplicità, tra le cose non dimostrate, forse superata solo dalla congettura di Goldbach.

Più formalmente, le congetture in realtà sono due:

Congettura debole di Collatz:

Nessun intero è divergente.

Congettura forte di Collatz:

Tutti gli interi positivi sono convergenti.

Se adesso vi sembra che siano la stessa cosa, attenti alla sottigliezza; nell'esempio per ***N=13*** abbiamo visto che dall'***1*** si passa (per entrare in un ciclo), ma potrebbero esistere altri cicli che non contengono l'***1***. In questo caso, avremmo che la congettura debole è vera, ma non lo è la forte. Il fatto che esistano entrambe le congetture (e che siano

[16] Sì, li scriviamo maiuscoli; vi ricordate il pezzo su RM055 relativo ai Colori dei Numeri, in cui ad ogni "colore" veniva fornita un'aria misticheggiante dall'iniziale maiuscola? Bene, succede anche qui. Di solito, noi consideriamo questo un chiaro indizio che qualcuno sta brancolando nel buio.

[17] *Non solo, ma ha un'assoluta mancanza di simmetria [PRS].*

ancora congetture) dovrebbe portarvi piuttosto velocemente a capire che qui si sta ancora remando come dei disperati.
"E cosa c'entra il Lotto?" Beh, quando siamo andati in giro a cercare un po' di notizie su questo aggeggio, fortissima è stata l'impressione che qui i matematici stiano cercando di inventarsi delle cose che somigliano tremendamente a quelle dei cultori della matematica del Lotto, cercando di mettere ordine in modo piuttosto disordinato in un campo estremamente caotico[18].
Proviamo a veder cosa si sono inventati; se vi sembra che qualcuno si stia arrampicando sugli specchi, perfettamente d'accordo con voi.
Allora, la prima cosa inventata è la ***Glide***; traducetevela come vi pare, da "tendenza" fino a "legamento" passando per "suono transitorio degli organi vocali…". La definizione è ragionevolmente semplice:

> Per qualsiasi intero ***N>1*** sia ***k*** l'indice minimo per cui $S_k<N$.
>
> Si definisce ***Glide*** di ***N*** il valore ***G(N)=k***.

Calcolare la Glide per ogni intero positivo è equivalente a mostrare la sua convergenza, visto che (si presume) i numeri minori del numero dato sono già stati mostrati come convergenti. Qui, fortunatamente, esiste un teorema, attribuito a ***Terras***:

> Quasi tutti i numeri hanno una Glide finita

Non vi diamo la dimostrazione, ma almeno una traccia sì.

> Logicamente, anche qui quando non si sa che pesci pigliare si cominciano ad inventare delle cose; un aggeggio che sembra utile è il ***Vettore di Parità*** che ci dice quale delle due espressioni viste sopra dobbiamo applicare al prossimo passo (in pratica, ci dice se il numero che abbiamo è pari o dispari); più formalmente, le componenti di ***v(N)*** sono definite come
>
> $$v_i(N) = S_i \mod 2 \qquad \textbf{[007.002]}$$
>
> Ora, un po' di lemmi (e questi li enunciamo solo):
>
> ***Lemma 1***: Se ***N*** è nella forma $a*2^k+b, b<2^k$, allora i primi ***k*** elementi del vettore di parità dipendono solo da ***b***.
>
> ***Lemma 2***: Se ***w*** è un vettore di parità di lunghezza ***k***, allora esiste un numero ***N*** per cui $v_i(N)=w_i \quad (0 \le i < k)$.
>
> Proviamo a definire ancora qualcos'altro: ad esempio la ***Parità***: questa si definisce come:
>
> $$P_k = \sum_{i<k} v_i * 2^i \qquad \textbf{[007.003]}$$
>
> Ossia è pari al vettore scritto al contrario con tutti i numeri di seguito. Da questo discende il
>
> ***Lemma 3***: Se ***M*** e ***N*** sono interi positivi, allora $P_k(M) = P_k(N)$ *se e solo se* $M \equiv N \mod 2^k$.
>
> ***Lemma 4***: Sia $S_0=N$ un intero positivo e sia v_i il suo vettore di parità; se $d_k = \sum_{i=0}^{k} v_i$, allora $S_k \approx T_k = S_0 * 3^{d(k)} * 2^{-k}$.

[18] Sempre per citare Heinlein: "Come sparare a casaccio in una stanza buia sperando di centrare un gatto che forse non c'è". *Non solo, ma il gatto non è vostro, è di Schroedinger [PRS].*

Questo lemma è esprimibile anche per via logaritmica in modo piuttosto immediato; ciò permette di arrivare alla definizione di ***Vettore Convergente***, definendo $c_j = d_j * \ln 3 - j \ln 2$; un vettore sarà convergente se $c_j < 0 \forall j < k$ e (sempre per inventarci dei nomi) il valore minimo di ***j*** per cui questo accade è detto ***Tempo di Convergenza*** di ***v*** o più generalmente di qualsiasi ***N*** avente ***v*** come vettore di parità. A questo punto, se non siete ancora stanchi,

Lemma 5: Sia $\boldsymbol{v_i}$ un Vettore di Parità con Tempo di Convergenza ***k*** e sia ***M*** un insieme di interi aventi Vettore do Parità ***v***. Allora tutti gli elementi abbastanza grandi di ***M*** hanno Tempo di Arresto ***k***.

Lemma 6: Sia $\boldsymbol{V_k}$ l'insieme dei Vettori di Parità di lunghezza ***k***; sia $\boldsymbol{W_k}$ il sottoinsieme di tutti i vettori divergenti di ***V***; indicando con le parentesi graffe la cardinalità degli insiemi dati, si ha:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\{W_k\}}{\{V_k\}} = 0. \quad \text{[007.004]}$$

Ora, possiamo ristatuire il Teorema di Terras in questo modo:

Sia **M** *un intero positivo;*

Sia **D(M)** *il numero dei numeri minori di* **M** *che non hanno un tempo di arresto finito.*

Allora, $\lim_{M \to \infty} D(M) = 0$.

Infatti, dal ***L5*** possiamo stabilire che solo un numero finito di numeri hanno un Tempo di Arresto differente dal loro Tempo di Convergenza.

Possiamo poi suddividere i numeri in classi di congruenza modulo $\boldsymbol{2^k}$ e, dal ***L3*** possiamo dedurre che ogni numero congruo a ***m*** viene mappato su un'unica Parità $n < 2^k$ e quindi su un unico Vettore di Parità di lunghezza ***k***.

Ma ***L6*** ci dice che la frazione dei Vettori di Parità divergenti di lunghezza ***k*** tende a zero al tendere di ***k*** ad infinito.

Considerando i numeri $N < 2^k$ che ***non*** hanno tempo di arresto minore o uguale a ***k***, segue che $\lim_{k \to \infty} D(2^k) = 0$, che è il teorema.

Ora, anche se la Glide sembra promettente, per riuscire a dimostrare una qualunque delle due Congetture di Collatz, al momento si è un po' fermi; anche perché grande è il disordine sotto la volta del cielo, da queste parti, con gente che chiama la stessa cosa con nomi diversi (ad esempio, il ***Ritardo*** non è altro che il Tempo di Arresto: il che porta a definire le ***Classi di Ritardo*** come gli insiemi di numeri aventi ugual Ritardo) o inventandosi oggetti piuttosto balordi, almeno a nostro modo di vedere.

Uno di questi è il ***Residuo***: durante la nostra camminata da S_0 sino a $S_{D(N)-1}$ incontreremo un certo numero di pari e un certo numero di dispari; indichiamo i loro numeri rispettivamente con ***E(N)*** (even) e ***O(N)*** (odd)[19]; è abbastanza evidente che $O(N) + E(N) = D(N)$; allora, per la definizione stessa del nostro calcolo, possiamo dire che è:

$$2^{E(N)} = 3^{O(N)} * N * \mathrm{Re}(N) \quad \text{[007.005]}$$

[19] Il motivo della notazione "all'inglese" è che "P" e "D" li abbiamo già usati anche troppo.

Dove l'ultimo fattore, giustappunto il Residuo, vale:

$$\mathrm{Re}(N) = \prod_{S \ dispari} \left(1 + \frac{1}{3S_i}\right) \qquad \texttt{[007.006]}$$

Se provate a calcolarne qualcuno (un foglio Excel in questi casi serve... una volta tanto) vi accorgete che vi vengono sempre dei numeri piuttosto piccoli; tant'è che esiste la

Congettura debole del Residuo:

> Esiste $\mathrm{Re}_{\max}$ tale che qualunque sia ***N*** intero positivo, $\mathrm{Re}(N) \le \mathrm{Re}_{\max}$

E il fatto che esista quella "debole" vi farà immediatamente pensare che esista anche quella "forte" che è, a nostro modesto modo di vedere, piuttosto stupefacente:

Congettura forte del Residuo:

> $\forall N, \ \mathrm{Re}(N) \le \mathrm{Re}(993)$

Siccome voi non li calcolerete mai, vi dico che $\mathrm{Re}(993) \approx 1{,}25$. Se volete saperne di più, potete tranquillamente procedere con Excel.

E non è finita; colti da furore estetico, si è arrivati a definire anche la ***Completezza***:

$$C(N) = \frac{O(N)}{E(N)} \qquad \texttt{[007.007]}$$

Per fortuna, qui esiste il

Teorema della Completezza:

$$\forall N > 1, \quad C(N) < \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \qquad \texttt{[007.008]}$$

"Fortuna" nel senso che non è una congettura. Sfortunatamente, il fatto che si raggiunga questo limite dipende da un termine sempre positivo il cui reciproco è definito come ***Gamma***:

$$\Gamma(N) = \frac{E(N)}{\ln(N)} \qquad \texttt{[007.009]}$$

Che *sembra* non raggiungere valori arbitrariamente alti, il che ci porta a formulare la

Congettura della Completezza

$$\exists C_{\max} < \frac{\ln(2)}{\ln(3)} : \forall N > 1 \Rightarrow C(N) < C_{\max} \qquad \texttt{[007.010]}$$

Se poi cominciamo a supporre che alcune delle nostre congetture siano vere, anche in un'ottica piuttosto "ampia", allora comincia un'abboffata di nuovi termini: ad esempio, sembra corretto (in virtù della Congettura Debole sul Residuo) che $\mathrm{Re}_{\max} << 6$; questo significa che le *Classi di Residuo*....

Allora, prima di inventarci un termine nuovo dobbiamo inventarci un altro termine (sic!): la ***Forza*** (strength) di un numero: per un dato numero avente ***D(N)=k***, si definisce $S(N) = 5 * O(N) - 3 * E(N)$; la maggior parte dei numeri hanno Forza minore di zero, ma sembra che debbano esistere Forze arbitrariamente grandi.

Da questo si ricava il ***Livello***: usando le parentesi di Gauss,

$$L(N) = -\left\lfloor \frac{S(N)}{8} \right\rfloor \qquad [007.011]$$

Ora, giusto per darvi un'indicazione di quanto siano rari i numeri con Livello negativo (e quindi Forza positiva), i più piccoli sono: ***L(63,728,127)=-1***; ***L(3,743,559,068,799)=-2***; ***L(100,759,293,214,567)=-3***; quest'ultimo ha un Ritardo pari a ***1829***.

Come giustamente fanno notare alcuni francesi che stanno lavorando al problema, "l'avere dei computer non esime dal cercare scorciatoie"; giusto per fare un esempio, è abbastanza evidente che, se esiste un controesempio alla Congettura, sarà della forma ***4k+3***; il che significa ridurre i calcoli di un ***75%*** (il che sarà poco se si parla di infinito, ma comunque aiuta).

Se volete un minimo di stato dell'arte, sappiate che se esiste un ***Ciclo*** diverso da ***4-2-1***, allora deve avere dimensione almeno 102,225,486. La ***Glide*** più grande raggiunta è 1,575 per il valore 180,352,746,940,718,527 (dati del dicembre 2003).

Ma adesso, sono sicuro che vorrete correre a fare un po' di conti…

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms