Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 064 – Maggio 2004- Anno Sesto

[Foyer]

La matematica è dappertutto, e le parole sono magiche. Si corre il rischio di apparire retorici, ma ogni tanto fa bene riscoprire l'ingenuità e il senso di meraviglia proprio dei bambini. Gran parte del mondo è leggibile attraverso la matematica, e le storie di cui il mondo è pieno e che muovono tanta parte delle nostre emozioni sono fatte solo di parole. E, sorpresa delle sorprese, matematica e parole hanno in comune anche un'altra duplice apparente contraddizione: entrambe sono proprie dell'Uomo, almeno su questo piccolo pianeta, ma entrambe trascendono la mera umanità: si può dubitare di tutto, ma è davvero difficile immaginare una qualsiasi civiltà, umana o meno, terrestre o meno, che *possa fare a meno delle parole per raccontarsi, e della matematica per capirsi. Le piccole storie che aprono da qualche tempo il nostro giornalino fanno sempre uso di questi due semplici assunti: la matematica (e i matematici) sono dappertutto, e basta cominciare a raccontare una storia qualsiasi, un aspetto qualsiasi di noi stessi per finire con lo scoprire un legame, una via diretta alla matematica e alla storia della matematica.*

È anche vero che ci siamo autoimposti delle regole, nel raccontare e romanzare: tanto per cominciare, deve esserci un protagonista; un matematico da celebrare e ricordare. In secondo luogo, la celebrazione deve avvenire in concomitanza col il suo mese di nascita; non per niente chiamiamo questi pezzi "compleanni": sono la nostra maniera di fare gli auguri alla matematica. Infine, dobbiamo scoprire una storia laterale, imprevista, apparentemente lontana dal protagonista e dalla sua opera, per poi stupirci e stupire nello scoprire che, invece, legame e relazioni ci sono sempre, per quanto impreviste.

Ogni regola è però anche una limitazione: come celebrare un matematico antico, se non ne conosciamo il mese di nascita? Le eccezioni sono sempre possibili (e per celebrare Archimede non abbiamo esitato a farne uso) ma non se ne può abusare. Cosa fare se i protagonisti della storia sono più di uno? Anche questa difficoltà si può in qualche modo aggirare, e abbiamo fatto anche questo. Ma se occorresse violare simultaneamente entrambe le regole?

Paradossalmente, è la terza regola quella più stringente, quella che è quasi impossibile evitare: c'è infatti un caso in cui è davvero difficile trovare una storia parallela e apparentemente slegata da ricondurre nella biografia del matematico protagonista. Questo accade quando la stessa, reale storia del celebrando matematico è così intrigante, così drammatica, così complessa da non poter ospitare nessun'altra trama parallela senza oscurarla del tutto. E nella storia della matematica ci sono alcuni esempi eclatanti del genere.

La storia di questo mese è una di queste: viola tutte le regole dei compleanni, ed è così bella che da tempo restava nascosta nella tastiera di Doc, che aveva una gran voglia di scriverla ma non sapeva come riuscirci. La soluzione, come al solito, è arrivata all'improvviso, semplice e lineare: se bisogna gestire troppe eccezioni, è sufficiente aggiungere eccezione a eccezione. Se si è fortunati (e stavolta crediamo davvero di esserlo), il risultato sarà del tutto "eccezionale", sia nel significato etimologico che in quello trasposto del termine.

Se noi della Redazione continuiamo a vantarci snobisticamente di essere dei "dilettanti" della divulgazione matematica, non è per antipatia verso i professionisti del campo: è solo per banale invidia. Invidia che in parte viene ridotta, in parte ingigantita quando scopriamo che qualche "professionista" legge e apprezza il nostro giornalino. Tra i lettori di RM ci sono infatti personaggi davvero sorprendenti, e tra questi uno dei più singolari è Dario Bressanini: voi, senza saperlo, avete già avuto occasione di leggere qualche sua riga nelle sezioni "Soluzioni e Note" di RM, ovviamente solo sotto allonimo. Ebbene, Dario rifiuta l'etichetta di "professionista della divulgazione" (anche perché la sua professione è più nobile e ha che fare con la scienza anche nella versione non "divulgata"), ma certo non può dirsi privo d'esperienza nel campo. In più mantiene anche tutto l'entusiasmo del puro appassionato, e ci lascia così nell'irritante imbarazzo dato dall'invidia profonda nei suoi confronti perché ha saputo, a differenza di noi, coniugare passione e professione, e dall'impossibilità di trattarlo male come si fa di solito con le persone che si invidiano, perché ci è inquietantemente simpatico. Probabilmente adesso siete curiosi di sapere quale sia il suo nome di battaglia su RM: beh, scordatevelo. Questo non ve lo diciamo.

Non ve lo diciamo perché Dario è l'autore della storia di questo mese. Il "compleanno" che state per leggere è una storia in versione integrale, completa e commentata: ma se domani (primo giorno lavorativo del mese: per l'occasione abbiamo deciso di anticipare la distribuzione di RM) avrete voglia di andare in edicola a comprare "Le Scienze" di Maggio, vi troverete la versione ridotta, breve e non commentata di questo stesso articolo che RM ha l'onore di pubblicare. Perciò è opportuno che Dario, almeno per questa volta, rinunci al suo misterioso allonimo e si palesi come autore di entrambi gli articoli: vogliamo evitare problemi di copyright, e, soprattutto, vogliamo mostrare con orgoglio che RM ha occhi e giudizio migliori di celebrati giornali scientifici.

A questo punto non vi resta che prendere RM in mano, scegliere la poltrona più comoda di casa, e cominciare a leggere. Se possibile, dovreste prima prendere il CD del Requiem di Mozart, K626, e provare a sincronizzare la lettura dell'articolo con i brani scanditi del Requiem[1]: Wolfgang Amadeus utilizzò il testo di Tommaso da Celano, e ci rendiamo conto che è davvero difficile riuscire a sincronizzare lettura e ascolto: ma se riuscite ad arrivare al "Confutatis Maledictis" di Dario, laddove uno dei protagonisti della storia è costretto a scappare, proprio mentre il tuono degli archi mozartiani riproduce con furia spietata il fuoco della dannazione infernale, avrete un'esperienza memorabile da raccontare agli amici. Ma basta, adesso! Sentite? Il primo violino sta già dando il "la" all'orchestra…

[PRS]

1. Requiem per una formula

(Dramma in sei atti e con sei personaggi)

di ***Dario Bressanini***

Introitus

meno bi più o meno radice quadrata di bi due meno quattro a ci diviso due a.

Parole, simboli, cantilene mnemoniche prive ormai, dopo tanti secoli, di ogni traccia di umanità. Quante volte abbiamo ripetuto nella nostra testa queste filastrocche, e innumerevoli altre, senza sapere quanta fatica, gioia, amore, stupore, ma anche odio, rancore, violenza e tradimento si potesse celare dietro la più semplice delle formule? Che cosa ha provato lo sconosciuto scopritore della formula risolutiva dell'equazione di secondo grado? Come lo hanno considerato i suoi contemporanei? Era un mago assiro? Uno schiavo babilonese? Non lo sapremo mai. Anche in tempi più recenti la matematica cerca in ogni modo di cancellare ogni traccia di umanità dalle sue cattedrali analitiche. Lemma ipotesi tesi teorema. A posteriori tutto deve sembrare perfetto. Tutto logico. Nessuna discrepanza, nessuna lotta tra fazioni. Ogni mattone al posto giusto nel momento giusto. Un'opera di sistematico revisionismo matematico. Certo, a volte le battaglie hanno un'eco talmente vasta che ancora oggi ne percepiamo i detriti, ma come in una indistinta radiazione di fondo in cui l'origine e la sequenza esatta dei fatti è ormai impossibile da ricostruire. Ci ricordiamo, forse grazie ad un professore di matematica di liceo meno noioso di altri, che Newton e Leibniz si scontrarono sulla paternità del calcolo infinitesimale, e che i detriti, le

[1] E se non avete il CD e vi piace la musica classica (quasi impossibile che si avverino le due cose in simultanea, a dire il vero) correte a comprarlo. E se invece la musica classica non vi piace, riservatevi una serata per guardare in videocassetta "Amadeus" di Milos Forman: è un film ormai vecchio di vent'anni, ma non dovrebbe essere difficile reperirlo in videoteca. La storia e le leggende alla base del Requiem sono affascinanti almeno quanto il Requiem stesso, e c'è anche il rischio che la classica cominci a piacervi, dopo aver visto quel film *[PRS]*.

scorie di questa battaglia di giganti, sono ad esempio la notazione $\frac{d}{dx}$ per la derivata generica, che però diventa $\dot{x}$ in meccanica quando si parla di derivata, pardon, flussione rispetto al tempo. In questo caso però la matematica è stata magnanima: ci ha permesso di ricordarci che l'invenzione del calcolo infinitesimale è da attribuire sia a Newton che a Leibniz[2].

Altre volte però, la regina delle scienze una volta partorita una formula, una teoria, una dimostrazione, ne uccide il padre, o quantomeno ne permette il soffocamento. Teorema dell'Hospital. Sì, quello per il calcolo del limite di 0/0. Quello che non si dovrebbe mai usare. Ma siete sicuri? Hospital? Ma chi era? Che altro ha dimostrato? Ma siete davvero sicuri che fosse un matematico? E le serie di McLaurin? O erano di Taylor? E quel famoso triangolo? Di chi diavolo era il triangolo? Pascal o Tartaglia? Ecco. Tartaglia. Lo scopritore delle formule risolutive per le equazioni di terzo grado, dette appunto *formule di*....Cardano ?!? Cardano, sì, quello del "giunto cardanico". Medico e astrologo milanese. Medico?!? Insomma, chi ha fatto cosa?

Chi: Scipione dal Ferro, Zuanne de Tonini da Coi, Antonio Maria Fior, Nicolò Tartaglia, Girolamo Cardano e Ludovico Ferrari.

Quando: tra il 1530 e il 1549

Dove: a Pavia, Padova, Bologna, Milano, Brescia e Venezia, i punti focali del Rinascimento Italiano.

Perché: ma per la gloria, ovviamente.....

Kyrie

Scipione dal Ferro (1465 – 1526)

La nostra storia inizia a Bologna dove nel 1465 nasce Scipione dal Ferro. Di lui sappiamo ben poco[3]. Solo che insegnò matematica all'Università di Bologna dal 1496 al 1526, e, cosa di cruciale importanza, scoprì la soluzione dell'equazione di terzo grado $x^3 + px = q$. Prima di continuare, forse è il caso di ricordare che la notazione algebrica moderna, nel '500, è ancora di là da venire. Dal Ferro non avrebbe scritto quei simboli strani, avrebbe invece detto: trovare *cubo e cose uguali ad un numero*. L'incognita, la *x*, era *la cosa [e qui mi aspetto qualche battutaccia del GC per tirare in ballo Tinto Brass, la palude, un altro mondo, e pure Cochi e Renato (DB)*[4]*]*. Il *cubo* per i nostri rinascimentali era proprio da immaginare

---

[2] Non vorremmo che questo problema di attribuzione possa sembrare un garbato confronto di idee tra eruditi; all'epoca, aveva successo in Terra d'Albione l'"Analytical Society", le cui regole di vita erano solo due:

1. Lasciare questo mondo in condizioni migliori di come lo si è trovato
2. Portare la Matematica verso un puro "$\partial - \text{ism}$" fuori dal(la) "dot-age" in cui stava annegando.

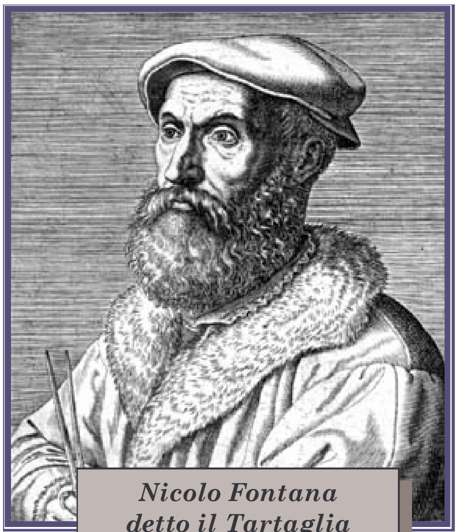
Per capire appieno il livello della polemica, andate a cercare "dotage" su un buon dizionario di Inglese [RdA]

[3] Talmente poco che non siamo riusciti a trovarne una foto da pubblicare come primo protagonista da proporvi come da tradizione la prima volta che viene nominato... un autentico uomo del mistero *[AR]*.

[4] Una battutaccia è tale solo se giunge inattesa, quindi sarò serissimo; uno dei primi trattati tedeschi di Algebra è il *"Die Coss"* (Riese, 1524); per lungo tempo la soluzione delle equazioni è andata sotto il nome di "Arte Cossica"; se vi capitasse di doverne scrivere in latino, vi consigliamo la terminologia tedesca originale: *x=coss; x²=zenzus; x³=cubus; x⁴=zenzizensus [RdA]*.

così, solido, tangibile, tridimensionale. I quadrati invece li chiamavano *censi*, perché per loro erano proprio delle superfici, appezzamenti di terra magari. Detto questo torniamo a Bologna. Che fa Dal Ferro non appena scopre la soluzione dell'equazione di terzo grado? Corre in cima alla Torre degli Asinelli per declamarla ai quattro venti? Manco per niente! La tiene segreta. Non solo tiene segreta la formula, ma addirittura anche la notizia della scoperta. Forse non ne era pienamente soddisfatto poiché non era riuscito a scoprire la formula per l'equazione più generale $x^3 + mx^2 + px = q$ (ora noi sappiamo che quest'ultima equazione si può trasformare facilmente in quella risolta dal Dal Ferro, ma si dovrà aspettare Descartes per avere il concetto di "traslazione degli assi"). Fatto sta che non sappiamo neppure quando venne alla luce questa mitica soluzione. Cardano e Tartaglia, personaggi che incontreremo fra poco, la collocano, nei loro scritti, rispettivamente nel 1514 e nel 1506. Dal Ferro muore nel 1526, senza pubblicare nulla. La formula risolutiva però non viene persa: prima di morire Dal Ferro la confida ad un suo studente, Antonio Maria Fior.

Lasciamo per ora Bologna, e trasferiamoci a Brescia, città che nel 1499 diede i natali a Nicolò Fontana, detto "il Tartaglia". Diamo la parola a Nicolò per la spiegazione dell'origine del suo soprannome.



Nicolo Fontana detto il Tartaglia (1499 – 1557)

Quando che li Francesi sacchegiorno Bressa[5]*... essendo io fuggito nel domo con mia madre e mia sorella, credendone in tal modo esser salvi, ma tal pensiero ne andò fallito, perché in tal chiesa mi furono date cinque ferite mortali, fra le quali una ne aveva attraverso la bocca... e stetti un tempo che io non poteva ben proferire parola, ma sempre balbettava nel parlare per il che li putti della mia età me imposero pe sopranome Tartaglia. Et perché tal cognome me durò molto tempo, m'è apparso de volermi chiamare Nicolò Tartaglia.*

A Brescia insegna Zuanne de Tonini da Coi, un mediocre tutore di aritmetica, ma soprattutto gran venditore di fumo, diremmo noi ora. Nel 1530 Da Coi sfida Tartaglia proponendogli due problemi, che si riducono alla soluzione delle equazioni $x^3 + 3x^2 = 5$ e $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$. Che vuol dire "sfida"? Era pratica comune a quel tempo sfidarsi pubblicamente a "duello", solo che le armi previste non erano spade o sciabole, bensì problemi scientifici e matematici. I "duelli" erano modellati sui tornei cavallereschi, con tanto di guanto di sfida, risposta, testimoni, giudici, notai e tutto il resto. Lo scopo di queste pubbliche disfide era guadagnare gloria ed onore per il vincitore, ma anche la pagnotta, visto che spesso vi era del denaro in palio e, cosa più importante, il vincitore di un duello acquisiva subito fama e veniva invitato a tenere conferenze in molte città, aumentando il numero dei propri allievi paganti. Questo era principalmente il motivo della segretezza con cui venivano gelosamente custodite le scoperte più importanti. Le disfide spesso avvenivano per posta e delle lettere veniva data pubblica lettura, o addirittura ne venivano fatte delle copie e spedite agli "esperti del settore". Una tacita regola era che nessuno poteva proporre quesiti che

[5] Il Tartaglia ci gratifica di una ulteriore folgorazione: se "Brescia" ai suoi tempi era "Bressa", adesso abbiamo una mezza idea sulle origini (etimologiche, ma forse non solo) del cognome dell'Autore dell'articolo. Anche se non sappiamo bene quanto ci possiamo fidare… cinque ferite mortali che lasciano sopravvivere il ferito sembrano vagamente ossimore. *[PRS]*

non sapesse lui stesso risolvere[6].
Tartaglia ci racconta della sfida lanciata da Da Coi nel quesito XIV del suo trattato *Quesiti et invenzioni diverse*:

> ***Maestro Zuanne***: Trovatime un numero, qual multiplicato per la sua radice più 3 faccia cinque. similmente trovatime tre numeri, ma ch'el secondo sia 2 più del primo, et ch'el terzo sia 2 più del secondo et che moltiplicato il primo fia el secondo, et quel prodotto fia el terzo faccia 1000.
>
> ***Tartaglia***: Maestro Zuanne, mi avete mandato queste due vostre domande come qualche cosa impossibile da risolvere o quantomeno a me sconosciuta; perché procedendo con l'algebra, la prima domanda conduce ad una operazione su un cubo e tre censi uguale a cinque, e la seconda a un cubo e sei censi e otto cose uguale a 1000. Frà Luca e altri considerano queste questioni impossibili da risolvere mediante una regola generale[7]. Voi credete con tali quesiti di potervi porre al di sopra di me, per far sembrare di essere un grande matematico. Ho sentito che fate questo con tutti i professori di questa scienza in Brescia, così che, per paura dei vostri quesiti, non osano parlarvi, anche se forse sanno più di voi di questa scienza.
>
> ***Maestro Zuanne***: Da quanto avete scritto capisco che ritenete impossibili da risolvere tali questioni
>
> ***Tartaglia***: Non dico che tali questioni sono impossibili. Tanto è vero che per il primo caso, quello del cubo e dei censi uguali ad un numero, sono convinto di aver trovato una regola generale, ma per ora la voglio tenere segreta per svariate ragioni. Per il secondo tuttavia, quello del cubo e i censi e le cose uguali ad un numero, vi confesso che sino ad ora non sono stato capace di trovare una regola generale; ma con questo non voglio dire che sia impossibile trovarne una solo perché non è stata ancora trovata. Tuttavia sono disposto a scommettere 10 ducati contro 5 che voi non siete capaci di risolvere i due quesiti che mi avete proposto. E questo è qualche cosa per cui dovreste arrossire di vergogna: proporre ad altri cose che voi stesso non capite, e fare finta di capirle per acquisire la reputazione di essere un grande matematico.

Sputtanato Tonini da Coi, Tartaglia torna nel suo brodo, ma l'episodio è importante perché veniamo così a sapere che nel 1530 Tartaglia aveva già scoperto una formula risolutiva per l'equazione $x^3 + mx^2 = q$. *Questo trovai per fin de l'anno 1530 quando stanziava a Verona.*

Tuba Mirum

Torniamo ora ad Antonio Maria Fior. A quanto pare Fior, a differenza del suo maestro Scipione dal Ferro, non ha remore nell'utilizzare la formula in disfide matematiche. In qualche modo Fior viene a sapere dell'affermazione di Tartaglia di

[6] Ecco, esattamente la stessa regola che cerca di darsi RM quando propone i suoi problemi. Almeno, quasi sempre…*[PRS]*

[7] Tartaglia qui si riferisce a Frà Luca Pacioli che nella sua *Summa de Arithmetica, Geometria, proporzioni et proportionalità*, che racchiudeva le conoscenze matematiche dell'epoca, dichiarava le equazioni di terzo e quarto grado "impossibili da risolvere con le presenti conoscenze" *[DB]*. Bei tempi quelli nei quali la matematica era ben lungi dall'essere considerata "poco artistica". Luca Pacioli ha come maestro Piero della Francesca, e come discepolo, amico fraterno e perfino illustratore delle sue opere (segnatamente del *Divina Proportione*) un certo Leonardo da Vinci *[PRS]*.

saper risolvere l'equazione $x^3 + mx^2 = q$, ma considerando Tartaglia un millantatore, e sapendo lui stesso risolvere l'equazione $x^3 + px = q$, lo sfida pubblicamente a duello matematico all'inizio del 1535. Le regole della gara prevedono che ognuno fornisca all'avversario 30 problemi da risolvere entro 40 giorni, cioè entro il 22 febbraio 1535. Come al solito in palio vi sono dei soldi. Inizialmente Tartaglia non dà molto peso alla sfida, sapendo che Dal Fior era solo un mediocre praticone di aritmetica. Quando però sente Dal Fior vantarsi che "un grande maestro" trenta anni prima gli aveva rivelato la soluzione dell'equazione cubica comincia a preoccuparsi, e inizia a studiare l'equazione $x^3 + px = q$. Otto giorni prima della scadenza dei termini Tartaglia trova la formula risolutiva, e il giorno successivo trova anche il modo di risolvere $x^3 = px + q$. Quest'ultima equazione, per noi algebricamente identica alla precedente, è per Tartaglia una cosa diversa, non avendo ancora a disposizione i numeri negativi. Molti dei problemi proposti da Dal Fior si possono ricondurre alla soluzione dell'equazione $x^3 + px = q$. Tartaglia li risolve tutti in 2 ore. Dal Fior dal canto suo non riesce a risolvere i problemi proposti da Tartaglia, perché questi si riconducono all'equazione $x^3 + mx^2 = q$ di cui Dal Fior non dispone della soluzione. Dice Tartaglia "Rinuncio alla posta in denaro, e mi prendo l'onore".

Vuole il lettore vestire per un attimo i panni del matematico rinascimentale? Ecco qualcuno dei quesiti proposti da Dal Fior e da Tartaglia, tratti dai *Quesiti et inventioni diverse* (XXV e XXXI):

> ***Dal Fior***:
>
> 5 – Due persone sono in società, e insieme investono un capitale di 900 ducati. Il capitale del primo è la radice cubica del capitale del secondo. Quanto ha investito ognuno?
>
> 12 – Un gioielliere compera un diamante e un rubino per 2000 ducati. Il prezzo del rubino è la radice cubica del prezzo del diamante. Quanto vale il rubino?
>
> 13 – Un giudeo presta del capitale alla condizione che alla fine dell'anno riceverà come interesse la radice cubica del capitale. Alla fine dell'anno il giudeo riceve 800 ducati, come capitale versato più gli interessi. Qual'era il capitale iniziale?
>
> ***Tartaglia***:
>
> 1 – Trovate una quantità irrazionale tale che quando viene moltiplicata per la sua radice quadrata aumentata di 4, il risultato sia un numero razionale dato.
>
> 4 – Trovate una quantità irrazionale tale che quando vi viene sottratta la sua radice cubica il risultato è 10.[8]

Lacrimosa

Se pensavate di esservi liberati dal millantatore Zuanne Da Coi vi sbagliate. Dopo la figuraccia con Tartaglia in quel di Brescia, pensa bene di cambiare aria e si trasferisce a Milano. Zuanne de Tonini Da Coi viene a sapere della disputa vittoriosa di Tartaglia con Fior. Si reca allora a Venezia, dove si era trasferito Tartaglia, con

[8] La dematematizzazione è arte difficile, siamo i primi a riconoscerlo: ma certo Dal Fior e Tartaglia non sembrano dei maestri, in questo… *[PRS]*

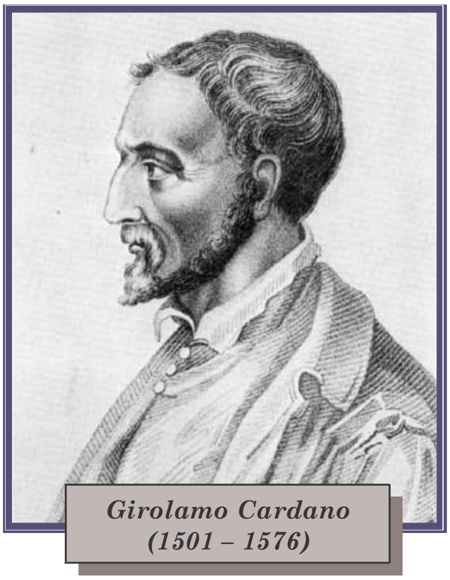
l'intento di carpire al buon Nicolò la misteriosa formula. Tartaglia stesso ci descrive il loro incontro avvenuto il 10 dicembre 1536:

> ***Maestro Zuanne***: Ho inteso che za molti giorni voi venesti in disputa con Maestro Antonio Maria Fior. Et che finalmente ne conveniste in questo che lui vi dovesse proponere 30 quesiti in scritto sotto bolla, realmente diversi, in mane di Iacomo di Zimbelli notaro et che simelmente voi ne proponeste altri trenta a lui realmente diversi e così facesti, et assegnasti 40 over 50 giorni di termine a cadauno di voi per solvere li detti quesiti... Et m'è stato referto per fino a Bressa che voi risolvesti tutti li suoi trenta in termini di due ore, la qual cosa mi par dura da credere.
>
> ***Tartaglia***: Egli è vero quanto vi è stato detto over referto. Et la causa che io risolse li suoi trenta con tanta brevità è che questa che lui proposse tutti li suoi trenta quesiti che conducevano l'operante per l'Algebra in cosa e cubo equal a numero, credendosi che de quelli nonne dovessi risolvere alcuno perché Frate Luca nella sua opera afferma essere impossibile a risolvere tal Capitolo con regola generale, et io per mia bona sorte, solamente 8 giorni avanti al termine di portar li 30 et 30 quesiti sotto bolla del notaro, io aveva ritrovato la regola generale a tal Capitolo. Onde per esser tale invenzione così di fresco me la trovai molto prompta et famigliare et per questo risolsi tutti quanti con tal celerità. Lui medesimo mi indusse a quel tempo a ricercare la regola in tal capitolo perché lui si andava vantando che già trent'anni tal secreto gli era stato mostrato da un gran matematico, in quale mi fece dubitare ch'el fusse il vero, e per questo io pose ogni mio studio, cura et arte per ritrovare regola a tal capitolo, et così per mia bona sorte lo ritrovai 8 giorni avanti di dar li detti 30 quesiti al Notaro, et questo fu l'anno passato, cioè del 1535 adi 12 di febraro (vero è che in Venetia veneva a esser del 1534)[9] et per alcuni avisi et accidenti di tal invenzione il giorno seguente ritrovai anchora regola generale del capitolo di cose e numero equal a cubo.

Tartaglia risponde picche al Tonini da Coi, e non rivela la formula. E neppure le soluzioni ai quesiti posti da Fior. Mastro Zuanne non può far altro che tornare a Milano con le pive nel sacco.

A Milano entra nella cerchia di Girolamo Cardano, medico e matematico milanese, nonché astrologo, filosofo, istrione, plagiaro e ciarlatano.

Girolamo Cardano nasce a Pavia il 24 settembre 1501 in una famiglia benestante. Suo padre era un famoso giurista e matematico. Cardano iniziò gli studi giuridici a Pavia, ma ben presto si trasferì a Padova, dove passò a medicina. Divenne un medico di successo, con la passione per la matematica. Nel 1534 ottenne l'incarico, che già fu del padre, di insegnante di matematica nelle scuole dell'ospedale maggiore di Milano.



Girolamo Cardano (1501 – 1576)

Zuanne da Coi parla a Cardano di Tartaglia, della sua scoperta e del suo duello con Dal Fior. In quel periodo Cardano sta preparando il materiale che avrebbe poi pubblicato nella sua opera matematica più importante: *Ars Magna*.

[9] A Venezia era uso iniziare l'anno il primo di Marzo, fino al 1797 *[DB]*.

Cardano manda come messaggero un librario, tale Zuanantonio di Bassano, per chiedere a Tartaglia, in quel periodo a Venezia, lumi sulla sua scoperta. È il 2 gennaio 1539 e Tartaglia, riporta nel Quesito XXXI *Fatto da M. Zuanantonio libraro, per nome d'un Messer Hieronimo Cardano, Medico et delle Mathematice lettor pubblico in Milano, adi. 2. Genaro, 1539.*

> ***Zuanantonio***: Messer Nicolò, sono stato indirizzato a voi da un cert'uomo, un buon medico in Milano, chiamato Messer Hieronimo Cardano, che è un gran matematico e da lezioni pubbliche su Euclide in Milano. Al presente sa stampare una sua opera in la pratica Aritmetica et Geometria et in Algebra che sarà una bella cosa[10]. Egli ha saputo della sfida che avete avuto con Maestro Antonio Maria Fior e come avete accettato di preparare 30 quesiti per ciascuno. E sua eccellentissima ha udito che tutti i 30 quesiti a voi proposti da Maestro Antoniomaria vi conducevano in algebra, ad un capitolo[11] di cosa e cubo ugual a numero, e che voi avete trovato una regola generale, e che per la potenza di questa invenzione avete risolto nello spazio di due ore tutti e 30 i quesiti proposti.
>
> A causa di ciò sua Eccellenza vi implora che voi possiate essere così gentile da mandargli la regola che avete inventato; e se ciò vi confà la inserirà nel suo prossimo libro sotto il vostro nome.
>
> ***Tartaglia***: Dica a sua Eccellenza che mi deve scusare; che quando la mia invenzione sarà pubblicata lo sarà in un mio lavoro. Sua Eccellenza mi scusi
>
> ***Zuanantonio***: Se non vuole insegnargli la sua invenzione, sua Eccellenza mi ha ordinato di chiedere che almeno possa avere i 30 quesiti menzionati che vi erano stati proposti, insieme con le soluzioni.
>
> ***Tartaglia***: Neanche questo può essere. Perché se sua Eccellenza osservasse uno dei casi e la sua soluzione, egli riuscirebbe a scoprire la regola che ho trovato. E mediante questa regola molti altri casi che riguardano questo argomento possono essere derivati.

Zuanantonio allora propone a Tartaglia alcuni quesiti, tra cui $2x^3 + 2x = 10$, $x^4 + 8x^2 + 8^2 = 10x^3$ e $x^3 + 3x^2 = 21$.

Rex Tremendae

A questo punto Tartaglia si incavola:

> ***Tartaglia***: Questi quesiti provengono da Messer Zuanne da Coi, e da nessun altro, poiché io riconosco gli ultimi due. Due anni orsono egli mi propose queste questioni e io gli risposi che lui nè capiva i problemi posti, nè conosceva le soluzioni. Mi propose anche un problema simile all'ultimo, che coinvolge cubi e censi uguale a numero. Ed io gli diedi la soluzione, per mia magnanimità, meno di un anno fa.

Tartaglia sospetta che la sua vecchia conoscenza, Maestro Zuanne Tonini da Coi, abbia proposto quei quesiti a Cardano, e che questi, non riuscendo a trovare la soluzione, li abbia proposti a sua volta a Tartaglia, Zuanantonio il libraio però sostiene che i quesiti arrivano da Cardano e da nessun altro.

---

[10] Cardano pubblica nel 1539 la *Pratica Arithmetica [DB]*.

[11] Noi diremmo equazione *[DB]*.

> ***Tartaglia***: Non dico che sua Eccellenza non sia una persona capace e colta, dico però che non è capace di risolvere l'ultimo quesito che mi è stato proposto mediante una regola generale.

Cardano risponde il 12 febbraio 1539:

> ***Cardano***: Voi non siete in cima ad una montagna, viene ai suoi piedi. Voi attribuite i quesiti a Zuanne da Coi, come se non ci fosse nessun altro in Milano capace di ciò. Da Coi è giovane, e lo conosco da quando aveva 10 anni. Voi affermate che se uno di questi problemi è risolto, allora tutti sono risolti. Ciò è completamente sbagliato. Scommetto 100 ducati che voi non siete in grado di ridurli ad una, ma neanche a due o tre equazioni.

Tartaglia non si scompone. Un mese dopo, il 13 marzo 1539 Cardano cambia completamente registro:

> ***Cardano***: Messer Nicolò mio carissimo, non prendete male le mie parole. Sono stato mal consigliato da Zuanne da Coi. Vi invito a venire a Milano. Il Marchese del Vasto è ansioso di conoscervi. Così vi esorto a venire immediatamente, senza indugio; poiché il Marchese è un benefattore di tutti i virtuosi, e così magnanimo che nessuno che serve sua Eccellenza in qualche maniera rimane insoddisfatto. Così non esitate a venire, e venite a casa mia, e da nessun'altra parte. Possa Cristo tenervi lontano dal pericolo. 13 Marzo, 1539 Hieronimo Cardano, Medico

Tartaglia, di umili origini e sempre con qualche problema finanziario, non resiste alle lusinghe di Cardano e accetta di andare a Milano, dove rimane un paio di giorni in casa di Cardano. Del Marchese, Alfonso d'Avalos, governatore di Milano, neppure l'ombra. Nel quesito XXXIV Tartaglia narra la conversazione:

> ***Cardano***: È molto conveniente che il Marchese sia dovuto andare a Vigevano, così possiamo parlare delle nostre cose sino a quando ritorna. Voi sicuramente non siete stato troppo cortese nel non mostrarmi la soluzione del cubo e cose eguali a numero che io vi avevo così chiesto.
>
> ***Tartaglia***: Vi dico che sono molto pignolo a riguardo, non tanto per questa semplice equazione e per quello che mi ha permesso di trovare, ma per tutto quello che questa equazione mi permetterà di scoprire in futuro. Poiché è la chiave che apre l'indagine a molte altre equazioni. Se non fossi troppo occupato con la traduzione di Euclide (sono già al libro XIII) avrei già scoperto una regola generale per molte altre equazioni. Se ora mostrassi la soluzione ad una mente capace, come vostra Eccellenza, potrà facilmente scoprire le altre soluzioni, e pubblicarle come sue, cosa che rovinerebbe completamente il mio progetto. Questo è il motivo che mi impone di essere così scortese verso sua Eccellenza, tanto più che voi siete in procinto di pubblicare un'opera di argomento simile nella quale, mi avete scritto, vorreste inserire la mia invenzione.
>
> ***Cardano***: Vi ho però scritto che, se questo non incontrasse il vostro favore, vi prometto di tenerla segreta.
>
> ***Tartaglia***: A questo, non posso proprio credere.
>
> ***Cardano***: *Io vi giuro ad sacra Dei evangelia, et da real gentil'huomo non solamente da non pubblicar giammai tali vostre inventioni, ma anchora vi prometto, et impegno la fede mia da real cristiano da notarmela in zifera, acciocché da poi la mia morte alcuno non la potrà intendere.*
>
> Se ora mi credete bene, altrimenti pazienza.

Tartaglia: Se non credessi ad un tale giuramento, sicuramente sarei considerato come un uomo senza fede. Ho però deciso di andare a Vigevano a trovare il Marchese, poiché sono già stato qui tre giorni e sono stanco di aspettare. Al mio ritorno prometto di rivelare la formula.

Cardano: Se desiderate incontrare il Marchese vi darò una lettera così che sappia chi siete. Ma prima di andare desidero che mi mostriate ora la formula, come promesso.

Tartaglia a questo punto cede, e fornisce a Cardano la soluzione. Tuttavia, invece di una formula, Tartaglia dà a Cardano una poesia, quasi un indovinello, che inizia così

Quando chel cubo con le cose appresso	$x^3 + px$
Se agguaglia à qualche numero discreto	$= q$
Trouan dui altri differenti in esso.	$u - v = q$
Dapoi terrai questo per consueto	
Che'l lor produtto sempre sia eguale	$uv = (p/3)^3$
Al terzo cubo delle cose neto,	
El residuo poi suo generale	
Delli lor lati cubi ben sottratti	$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = x$
Varra la tua cosa principale.	
In el secondo de cotesti atti	
Quando che'l cubo restasse lui solo	$x^3 = px + q$
Tu osseruarai quest'altri contratti,	$u + v = q$
Del numer farai due tal part'à uolo	
Che l'una in l'altra si produca schietto	$uv = (p/3)^3$
El terzo cubo delle cose in stolo	
Delle qual poi, per commun precetto	
Torrai li lati cubi insieme gionti	$\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = x$
Et cotal somma sara il tuo concetto.	
El terzo poi de questi nostri conti	
Se solue col secondo se ben guardi	$x^3 + q = px$
Che per natura son quasi congionti.	
Questi trouai, & non con paßi tardi	
Nel mille cinquecente, quatroe trenta	
Con fondamenti ben sald'è gagliardi	
Nella citta dal mar'intorno centa.	

A questo punto Tartaglia probabilmente è già pentito di aver dato a Cardano la formula, seppur in forma poetica. Decide così di non andare più a Vigevano, ma di tornare a Venezia immediatamente e *vada la cosa come si voglia*. Cardano inizialmente non comprende la soluzione, e chiede lumi a Tartaglia per lettera, che gentilmente fornisce la spiegazione. Ora Cardano inizia a investigare per proprio conto, e subito scopre il famoso *casus irriducibilis*, e cioè quel caso per cui per ottenere le soluzioni reali si deve necessariamente passare attraverso quelli che noi ora chiamiamo numeri complessi. Il caso studiato da Cardano riguarda l'equazione $x^3 = px + q$ quando $\frac{p^3}{9} > \frac{q^2}{2}$, come in $x^3 = 9x + 10$. Tartaglia non riesce a risolvere il problema. Cardano lo prende in giro:

> ***Cardano***: Forse che Tartaglia ha perso lo spirito per il troppo leggere e studiare? Se egli è sicuro di comprendere la regola, vorrà scommettere 100 scudi contro 25 che riesce a risolvere $x^3 = 12x + 20$?

Tartaglia non risponde. Dopo qualche ulteriore scambio epistolare, le comunicazioni tra i due cessano. Tartaglia indaffarato a tradurre Euclide, Cardano diviso tra la matematica e la medicina.

Nulla accade per cinque anni... sino a quando...

Benedictus

Nel 1545, Cardano, assistito dal suo pupillo Ludovico Ferrari, finisce di scrivere il suo grande trattato di algebra: l'*Ars Magna*, la Grande Arte. In quest'opera monumentale Cardano pubblica, con il suo consenso, la soluzione dell'equazione di quarto grado trovata dal giovane Ferrari, e pure la soluzione dell'equazione di terzo grado, senza il consenso di Tartaglia. Cardano ha rotto il suo giuramento. Come mai? Per gloria forse? Indubbiamente quella decisione gli valse gloria imperitura. Ancora oggi le formule risolutive per la cubica sono dette *formule di Cardano*, questo nonostante nell'*Ars Magna* Cardano citi esplicitamente Nicolò Tartaglia... e Scipione Dal Ferro come i due padri della formula. Dal Ferro, vi eravate dimenticati di lui? Possiamo solamente immaginare come andarono veramente le cose. Torniamo indietro di cinque anni. Cardano è riuscito finalmente ad avere la soluzione dell'equazione di terzo grado ridotta (così si chiama la cubica mancante del termine quadratico). Subito inizia a indagare, come avrebbe voluto fare Tartaglia se ne avesse avuto il tempo, quali altre equazioni possono essere risolte, e quali problemi connessi. Cardano scopre come trasformare l'equazione cubica completa in quella ridotta utilizzando una trasformazione lineare e risolve così, per la prima volta, l'equazione completa. È anche il primo a considerare le radici negative, e addirittura quelle complesse, da lui chiamate "sofistiche", anche se non ne comprende il significato e le considera "inutili sofismi". Come avrebbe potuto Cardano pubblicare queste scoperte se non rompendo il giuramento? Quello però che probabilmente gli fece fare l'immorale passo fu la scoperta della soluzione delle equazioni di quarto grado da parte del suo allievo Ludovico Ferrari.

Ludovico Ferrari nasce a Bologna nel 1522. Arriva quattordicenne a casa di Cardano come servitore. Cardano però scopre ben presto che il ragazzo sa leggere e scrivere ed ha delle doti eccezionali. Lo nomina quindi segretario. Decide poi di insegnarli la matematica, campo nel quale Ferrari si dimostra eccezionalmente dotato. Cardano invita Ferrari, che chiama affettuosamente "il suo creato", a dedicarsi al problema dell'equazione di quarto grado, equazione che Ferrari scopre come risolvere nel 1540. La sua bellissima soluzione però ha un passaggio cruciale in cui è necessario risolvere un'equazione di terzo grado, per cui non era possibile pubblicare neanche questa fondamentale scoperta, degna dell'odierna medaglia Fields, senza prima pubblicare la soluzione della cubica. Frustrati da quest'impasse, Cardano e Ferrari visitano Bologna nel 1542. Vi ricordate che Antonio Maria Fior si vantava in pubblico di aver ricevuto la soluzione della cubica da "un grande maestro del passato"? Essendo Fior stato allievo di Scipione dal Ferro, Cardano e Ferrari si recano a Bologna nella speranza di trovare la documentazione scritta della scoperta di Dal Ferro, morto nel 1426. Il successore di Scipione dal Ferro alla cattedra di matematica all'Università di Bologna è il genero Annibale della Nave[12]. A quanto pare Scipione dal Ferro aveva trascritto sui suoi quaderni la soluzione della cubica, ed alla sua morte questi sono passati ad Annibale della Nave. Quando Cardano e Ferrari gli fanno visita, della Nave è ancora geloso della soluzione, ma non appena i due gli mostrano di saper risolvere l'equazione "del cubo e cosa uguale a numero" della Nave accetta di mostrare il quaderno degli appunti di suo suocero. Bingo! Ecco pronta la giustificazione per rompere il giuramento: Tartaglia non era più il primo scopritore della formula, e quindi il giuramento era nullo. Nel capitolo XI dell'*Ars Magna* Cardano pubblica la formula della discordia.

Dies Irae

Possiamo solamente immaginare come possa essersi sentito Nicolò Fontana quando, sfogliando velocemente e con trepidazione l'opera di Cardano fresca di stampa, scopre che l'istrione Pavese ha violato il giuramento. Fatto sta che nel quesito XXXX dei suoi *Quesiti et Inventioni* Tartaglia racconta, l'anno successivo, la sua versione dei fatti, accusando Cardano sostanzialmente di essere un infame ed una persona spregevole.

Come reagisce Cardano? Con il silenzio (non si sa per pudore o per arroganza). Interviene però Ferrari, e qui inizia probabilmente il capitolo più famoso di "acrimonia matematica": mi riferisco allo scambio dei "cartelli di matematica disfida" tra Tartaglia e Ferrari, sei in tutto.

> ***Ferrari***, 1° Cartello: Messer Nicolò Tartaglia, mi è pervenuto alle mani un vostro libro intitolato *Quesiti et Inventioni nuove*, nell'ultimo trattato del quale, facendo voi menzione dell'Eccellente Signor Hieronimo Cardano medico Milanese, il quale è ora publico Lettor di medicina in Pavia, voi non vi vergognate di dir che egli è ignorante nelle matematiche, poverello, uomo che tien poco sugo e poco discorso, e altre parole ingiuriose le quali per tedio lascio da parte...
>
> ...Pertanto io, non solamente per difendere la verità, ma ancor perché questo tocca a me principalmente, che son creato suo, ho deliberato far pubblicamente conoscere il vostro inganno e la vostra malignità....
>
> ...Vi sfido a disputar di Geometria, Aritmetica e in tutte le discipline che da esse dipendono, come è l'Astrologia, Musica, Cosmografia, Architettura, Prospettiva e altre, in luogo equalmente comodo, dinanzi a giudici idonei, pubblicamente con voi. Mi offro di mettere in palio quanto vorrete, sino a 200 scudi. E affinchè questo invito non vi sembri troppo privato, ho mandato una copia della presente scrittura a ciascuno dei signori nominati in fondo, i quali tutti si dilettano delle matematiche, i quali sono sparsi in diversi luoghi d'Italia. Vi avviso che aspetterò la vostra risposta per trenta giorni. Non ricevendo risposta, lascerò che il mondo giudichi la qualità vostra.
>
> Milano addi 10 di Febraro 1547.

Tartaglia risponde nove giorni più tardi, stampando anche lui un "cartello" da recapitare e distribuire.

> ***Tartaglia***, 1° risposta: ...Alla vostra proposta over Cartello rispondo che le predette particolarità da me narrate del detto Eccellente Signor Hieronimo

[12] Vi avevamo anticipato che questa storia sembra più un romanzo che cronaca, ma forse avevamo sottovalutato la cosa: a nessun romanziere verrebbe mai in testa di chiamare Annibale il genero d'uno Scipione, e, almeno a quei tempi, qualsiasi "della Nave" avrebbe dovuto avere un brivido pesante lungo la schiena all'idea di sposare una affondabilissima "dal Ferro". Per non parlare di come doveva sentirsi quella povera fanciulla, a dover coniugare insieme i suoi due cognomi *[PRS]*.

> Cardano, io le ho annotate con tali calunniose e mordenti parole per incitar Sua Eccellenza (e non voi) a scrivermi qualche cosa di sua mano...
>
> ...Vi dico, se vi siete mosso a scrivermi tal cartello da voi stesso, cioè non spinto da Sua Eccellenza (cosa che non credo) vi ammonisco da fratello a dover attendere alla vostra lettura, e lasciare tale impresa al detto Eccellente Signor Hieronimo. Ma se per caso Sua Eccellenza vi ha provocato a questo (come credo) dite da parte mia che mi scriva, e così facendo gli darò quella risposta che a me parrà conveniente. E affinché questa mia risposta non sembri troppo privata, ne ho fatte 1000 copie e spedite in varie parti d'Italia.

Il secondo cartello arriva sei settimane più tardi, in latino. Ferrari ricostruisce la vicenda, dal suo punto di vista, e rivela a Tartaglia di aver visto nel 1542, assieme a Cardano, degli scritti di Scipione dal Ferro contenenti la formula incriminata. Ferrari poi riprende i motivi che lo hanno indotto ad intervenire nella contesa e provoca ulteriormente Tartaglia, affinché questi accetti la sfida direttamente con lui, e non con Cardano. Tartaglia, nella sua risposta, osserva che, invece di una pubblica sfida, è da preferire una gara per risolvere un certo numero di quesiti in un tempo prefissato. Tartaglia non è molto propenso ad accettare una sfida in cui si debba parlare in pubblico, per via della sua balbuzie. Propone quindi 31 quesiti a Cardano e Ferrari. Per la risoluzione dei quesiti, Tartaglia concede 15 giorni.

Nel terzo cartello, Ferrari risponde con altrettanti quesiti, senza rispondere direttamente ai quesiti di Tartaglia. "Ho ricevuto la vostra Tartagliata, che sebbene lunga e confusa, non contiene altro che insulti, rifiuto di ammettere la sconfitta e un'idea fissa della ricerca della lotta mentre si scappa"

Tartaglia, nella terza risposta, fornisce la soluzione ai quesiti posti da Ferrari, e afferma di essere il vincitore della disputa.

Ferrari non è della stessa opinione. Nel quarto cartello si compiace perché Tartaglia finalmente ha dato risposta alle sue domande, tuttavia afferma di non aver avuto il tempo per esaminare le soluzioni, e si riserva di discuterne davanti ai giudici. Impartisce poi delle istruzioni a Tartaglia per il deposito della posta per la disputa, ed esorta a voler considerare Cardano estraneo alla contesa.

Tartaglia nella quarta risposta dimostra, a suo dire, che Cardano sta partecipando direttamente alla disputa.

Il quinto cartello è voluminoso quanto un libro: 55 pagine, di cui 41 dedicate alla soluzione dei quesiti proposti da Tartaglia. Ferrari allo stesso tempo contesta le soluzioni fornite da questi ai suoi quesiti.

Tartaglia ormai è esasperato. Il 16 giugno 1548 risponde al cartello e accetta lo scontro con Ferrari, alle sue condizioni. Tartaglia si era appena trasferito da Venezia a Brescia, dove alcuni benefattori locali gli avevano promesso una remunerazione per dare delle pubbliche lezioni su Euclide. Ferrari insinua che l'accettazione della disfida fosse una delle condizioni imposte dalle autorità di Brescia per il suo incarico. "Si ponga fine a far cartelli, che oramai fanno fastidio alli uomini del mondo" (e forse ormai anche ai nostri lettori). Questo però non impedisce a Ferrari di spedire il sesto cartello (l'ultimo!) nel quale "egli risponde alla sua quinta risposta, accettando la disputa alla qual detto messer Nicolò, nella detta quinta risposta, l'ha invitato".

Confutatis Maledictis

Nella sesta e ultima risposta, del 24 luglio 1548, Tartaglia si rammarica perché Cardano non vuole partecipare alla sfida, e quindi considera tale rifiuto motivo sufficiente per potersi proclamare vincitore. In ogni caso, è disposto a recarsi a Milano per poter criticare le risposte dare dal Ferrari ai suoi quesiti. Dopo 6 cartelli e sei risposte, il 10 agosto 1548 finalmente i due contendenti si incontrano. Del risultato della sfida abbiamo due versioni differenti, da parte di Cardano e di Tartaglia. La sfida era programmata per le 10, a Milano, vicino al giardino della chiesa dei frati Zoccolanti[13]. Cardano quel giorno pensò bene di andarsene da Milano. Alle 10 una gran folla si era radunata nel luogo della sfida. Addirittura era presente Don Ferrante di Gonzaga, governatore di Milano. Sono presenti molti amici di Ferrari. Tartaglia invece è in compagnia solo del fratello. A quanto pare la disputa non andò bene per Tartaglia, il quale accusò Ferrari e i suoi amici di avergli impedito di parlare e di spiegare le proprie ragioni. Addirittura, secondo Tartaglia, gli amici di Ferrari lo avevano minacciato. Secondo Cardano invece, Ferrari si dimostrò superiore nella comprensione di tutte le questioni collegate all'equazione di terzo grado, tanto è vero che nei giorni successivi fu inondato da offerte di lavoro, una addirittura dall'Imperatore che desiderava Ferrari come tutore di suo figlio[14]. Sia come sia, alla fine del primo giorno di disfida Tartaglia abbandona Milano e se ne torna a Brescia, addirittura seguendo una strada diversa da quella percorsa all'andata, per evitare brutti incontri.

Lux Aeterna

Fu gloria usurpata quella di Cardano? Cardano è stato accusato spesso, nei secoli, di "furto di equazione" e di comportamento immorale. Indubbiamente si comportò in modo riprovevole, ma non sarebbe giusto parlare di furto. Dopo tutto Cardano nell'*Ars Magna* non si attribuisce la scoperta, ma cita correttamente Tartaglia e Dal Ferro. Dobbiamo anche dire che Cardano non si limitò a decifrare in termini matematici la filastrocca fornita da Tartaglia, ma per primo ne fornì una dimostrazione rigorosa, basata su metodi geometrici. Questo è probabilmente il motivo per cui tutti i matematici successivi, pur essendo a conoscenza della diatriba tra Cardano e Tartaglia, citano le formule risolutive della cubica come "formule di Cardano". "... ergo formula Cardanica est aequationis cubicae enuntiabilis" scrisse Newton, e in modo analogo si espresse Leibniz nel suo "De Resolutionibus aequationum cubicarum triradicalium".

Il problema della soluzione dell'equazione cubica si perde nella notte dei tempi. Poiché l'algebra non esisteva ancora, la *soluzione* cercata doveva essere di natura geometrica. Il primo passo importante verso la soluzione arriva da Ippocrate di Chio, che nel 430 AC mostra per la prima volta come il famoso problema della duplicazione del cubo potesse essere ridotto alla ricerca di due medie proporzionali tra un segmento di lunghezza a ed uno di lunghezza doppia. In simboli moderni $a : x = x : y = y : 2a$ da cui si ricava l'equazione di terzo grado $x^3 = 2a^3$. Ippocrate però non riesce a trovare un modo per costruire geometricamente i due medi proporzionali. Neanche Diofanto, ben 800 anni dopo, riesce a risolvere il problema. L'unica equazione cubica che risolve nel suo famoso trattato è $x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3x - 3x^2 - 1$, fornendo solo la radice reale.

Ma come diavolo si risolve un'equazione di terzo grado? È abbastanza semplice trasformare la cubica generale $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ nell'equazione $x^3 + px = q$,

[13] Dal che si capisce perché poi, in tutti i romanzi di cappa e spada, tutti i duelli si svolgano "dietro il convento delle Carmelitane Scalze" *[PRS]*.

[14] Non ci risulta Ferrari abbia accettato questa proposta; passerà il resto della sua vita a Bologna dove, secondo la leggenda, morirà a 43 anni avvelenato dalla sorella. Non crediate che le cose vadano meglio, in Casa Cardano: sempre secondo fonti non confermate, uno dei figli gli avvelenerà la moglie, mentre un altro diventerà noto come delinquente abituale *[RdA]*.

mediante una divisione ed una traslazione degli assi. Vi ricordate lo sviluppo di un binomio? $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Bene, però scriviamolo così:

$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3$.

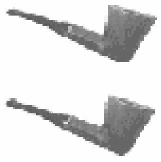
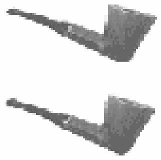
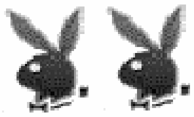
Ora, se a e b soddisfano le equazioni $3ab = p$ e $a^3 - b^3 = q$ allora $a-b$ è una soluzione dell'equazione $x^3 + px = q$. Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 3ab = p \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}$$

Ricavando la b, ad esempio, dalla prima equazione e sostituendo nella seconda otteniamo $a^6 - qa^3 - p^3/27 = 0$. Questa è un'equazione quadratica in a^3 che si risolve con la solita "meno bi più o meno radice...". Si ricava poi b e infine $x = a - b$.

Cosa rimane dopo centinaia d'anni di queste vicende? Nulla. Nei libri di testo trovare le "formule di Cardano". Quasi nessuno cita Tartaglia, e Scipione dal Ferro è un perfetto sconosciuto. Forse sarebbe bene iniziare a chiamare le formule *Ferro-Tartaglia-Cardano*: tre autori per un'equazione di grado tre.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Attenti alla simmetria!			
Enjoy your Banana!			

2.1 Attenti alla simmetria!

Qui, Doc si incavola doppio; tanto per cominciare perché delle simmetrie *ci sono*, e poi per il fatto che neanche lui è riuscito a de-matematizzare il problema. È comunque d'accordo che sia un problema troppo bello per lasciarlo perdere e, soprattutto, esiste una soluzione decisamente carina.

Quanto vale il prodotto delle lunghezze dei lati e delle diagonali di un n-agono regolare iscritto in un cerchio di raggio unitario?

2.2 Enjoy your banana!

Il titolo nasce da quello che vi diceva un vecchio programma di scacchi (MS-DOS modo testo) quando lo facevate giocare a livello dilettante contro se stesso; comunque qui parliamo d'altro. Il problema non è difficilissimo, ma le vie per risolverlo sono abbastanza da farmi pensare che ne vedremo delle belle.

Siete i felici possessori di una piantagione di banane e di un cammello; al momento, vi ritrovate con un carico di 3000 banane da portare al mercato, che si trova a 1000 kilometri di distanza *[…e farle un po' più vicine al centro, 'ste piantagioni? RdA]*; il vostro fedele cammello è in grado di portare 1000 banane per carico ma necessita di una banana al kilometro come combustibile.

Prima di partire, pensosamente (senza mangiare banane) organizzate le soste intermedie e i depositi di banane. Presumendo che voi non vi nutriate (o che vi portiate le vostre non-banane di nutrimento), quante banane arrivano al mercato?

3. Bungee Jumpers

Qual è il Primo Fattoriale di Sherazade, ossia il più piccolo ***primo*** il cui fattoriale ha 1001 ***zeri*** alla fine? E qual è la cifra subito prima dei 1001 zeri?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

2004-04-01 15:17	Last Duke - [063] – 2	
2004-04-01 18:03	Caronte - [063] – 1 e 2	
2004-04-02 17:15	Last Duke - [062] – 1	No, era 63, ma l'attachment...
2004-04-03 22:42	Zar - [063] – 2	Carta e matita...
2004-04-05 09:24	Last Duke - [063] – 1	L'attachment
2004-04-08 09:33	GaS - [063] – 1	...la figura...
2004-04-08 12:30	Zar - [063] – 1	
2004-04-08 16:14	GaS - [063] – 2	
2004-04-09 19:02	L.A.Bachevskij - [063] – 1 e 2	
2004-04-11 00:23	Filippo - [063] – 2	
2004-04-12 01:43	Stetson - [063] – 1	
2004-04-13 00:57	Stetson - [063] – 2	
2004-04-13 02:00	Torkitorio - [063] – 2	
2004-04-13 14:23	Stokastik - [063] – 2	La teoria dei gruppi
2004-04-14 01:13	Elena - [063] – 2	

E di sicuro anche questa volta ne abbiamo persa qualcuna verso la fine, ma la Redazione potrebbe decidere di menzionare i ritardatari il mese prossimo.

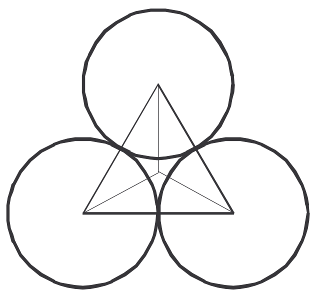
Questa volta abbiamo da registrare un mare di commenti al numero passato, vuol dire che siete attenti, bravi. In più vi siete dati da fare a tagliuzzare tovagliette e accatastare scacchiere, riempiendoci d'orgoglio. ***Loba*** ci ha anche inviato il primo disegno in OpenOffice pervenuto in redazione, ed il Capo è andato in brodo di giuggiole (il Doc, invece, che come Alice non ha ancora preso in considerazione di installare il nuovo software, ha subito cominciato le sue lamentazioni con il Capo...).

4.1 [062]

4.1.1 La saliera di RM

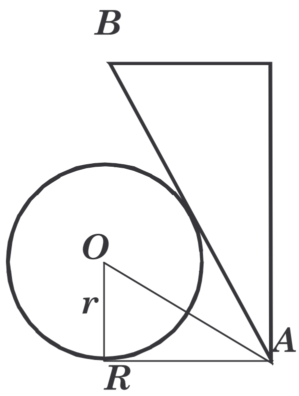
E va bene, avete visto e protestato tutti. Alice, che impagina le soluzioni da qualche numero a questa parte, si stava prostrando nelle più basse scuse, quando è balenata l'idea dell'uscita ad aprile e del famoso pesce. Dato che Alice è quasi un pesce d'aprile lei stessa, e che il Capo non ne vuole sapere di riprendere a impaginare le soluzioni, insomma, pesce d'aprile o meno, per rimediare vi passiamo subito quella del Capo, che è giusta per definizione.

> Per prima cosa, vediamo l'aggeggio dall'alto: esteticamente meno valido, ma matematicamente più chiaro.
>
> È immediato che i vertici dei coni formano un triangolo equilatero di lato ***2*** e alcuni "semplici" (per Alice) passaggi trigonometrici ci dicono che la distanza di uno qualsiasi dei vertici al (supposto) punto di tangenza è $\frac{2}{\sqrt{3}}$.



Trovate tutto nella figura qui a fianco (nel mio abituale, pessimo stile di disegno: per certe cose, PowerPoint è inimitabile, fortunatamente).

Ora, consideriamo il secondo disegno, nel quale si vedono la nostra sfera e uno "spicchio" di cono.



Si noti che l'angolo ***OAR*** è *la metà dell'angolo* ***BAR*** (pensateci un attimo, è facilissimo dimostrarlo), e la tangente all'angolo ***BAR*** vale ***2***. Utilizzando le formule di divisione, si ha che:

$$\tan\left(B\hat{A}R\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Quindi il raggio vale:

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}.$$

Insomma, viene una cosa del tipo di quello che vedete qui di fianco.

Beh, se volete sapere come è andata a finire... la proposta è stata bocciata da Alice, per la ragione che le punte dei coni bucano la tovaglia. Al momento, è all'esame la possibilità di mettere dei gommini nelle zone più a punta, ma niente di serio. Resta il fatto che nessuno ha avanzato altre proposte per migliorare il design della saliera, e da come stanno le cose il progetto fallirà. Forse ci rifacciamo con le tovaglie.

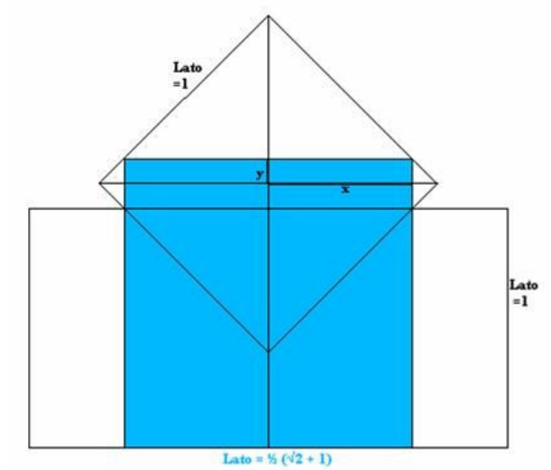
4.2 [063]

4.2.1 Questa volta tocca alla tovaglia (di RM)

Sono arrivate tante soluzioni, per la maggior parte non ottimizzate, ma comunque divertenti. Ringraziamo in particolare ***Last Duke***, ***GaS***, ***Zar***, ***Loba***, e ***Stetson*** per i loro interventi, non pubblicheremo tutte le soluzioni perché molto simili tra loro, e infatti abbiamo avuto le nostre difficoltà a sceglierne un paio delle più significative.

Importante è la limitazione superiore, di cui si sono accorti quasi tutti, esplicitata in questo passaggio di Stetson:

> Di certo so che non si può andare oltre un lato massimale di $\sqrt{3}$ che si otterrebbe con la mossa proibita di tagliare e ricucire le tovaglie per farne una sola quadrata.



Lo stesso ***Stetson*** ci propone la configurazione in figura qui a destra, ricavata anche da altri, tra cui il suo amico ***Loba***, e ci dice:

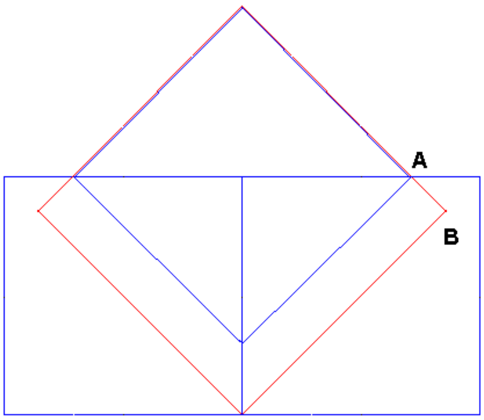
> Penso che le configurazioni più vantaggiose derivino da quella in cui due tovaglie sono accostate tra loro a formare un rettangolo di area 2. Allora la terza (ricordando la proprietà dei triangoli rettangoli isosceli di massimizzare l'area a parità di altri fattori) andrà disposta con le diagonali ortogonali ai lati delle altre. Posizione preminente è quella centrale (perché è simmetrica e anch'essa capace di massimizzare l'area). Se i due lati obliqui

superiori fossero l'unico limite all'area, potrei portare la terza tovaglia verso l'alto a piacere, fino all'estremo di y tale che il lato del tavolo azzurro sia $\sqrt{2}$ (ché poi la tovaglia finisce). Ma il limite orizzontale è costituito anche dai lati inferiori, che si restringono tanto quanto si allargano gli altri due, cioè più allungo il lato verticale (portando verso l'alto la tovaglia), più si restringe quello orizzontale. Il disegno (qualitativo) del massimo di questa disposizione è proprio quello sopra. I valori esatti si trovano ricordando che, nel sistema cartesiano riferito al centro della tovaglia ed alle sue diagonali, la x e y che definiscono un punto sul lato hanno somma costante ed uguale alla mezza diagonale (equazione I) e che cerchiamo un quadrato, dunque il lato verticale f(y) è uguale a quello orizzontale f(x) (equazione II)

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{2}/2 \\ 2x = 1 + 2y \end{cases}$$

Allora $x = \dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$, $y = \dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$; il lato massimo del tavolo è $l = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \cong 1{,}2071$.

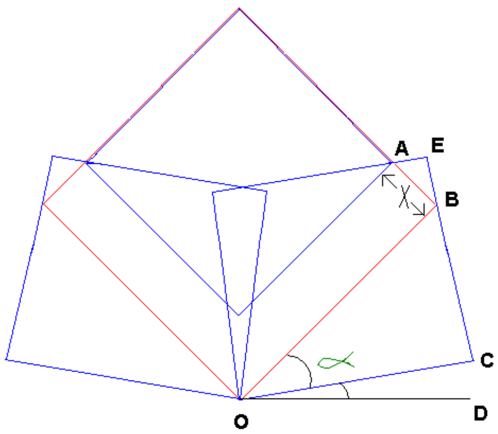
Zar ci fornisce una soluzione migliore con tanto di disegno, che non ci pare male: non la riportiamo solo perché ***GaS*** ha fatto più o meno nello stesso modo, e ce lo spiega passo passo:



Cominciamo con il considerare i limiti superiori del lato del tavolo più grande che io possa coprire. Non è difficile capire che il primo limite teorico (oltre che pratico) che si impone è un lato di $\sqrt{3}$, naturalmente è altresì immediato capire che per questa misura, senza tagliare le tovaglie, non c'è proprio niente da fare. Ho provato a cercare qualcosa per un tavolo di lato $\sqrt{2}$ ma anche questo mi sembra molto ostico e così mi sono posto degli obiettivi meno ambiziosi. La prima soluzione che ho trovato è la seguente:

In blu abbiamo le tre tovaglie mentre in rosso è denotato il profilo del tavolo; questa soluzione da, per il tavolo, un lato di $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \cong 1{,}207$.

Ero abbastanza soddisfatto ma poi mi sono accorto che, facendo ruotare di poco le due tovaglie in basso (quella a destra in senso antiorario e quella a sinistra in senso orario) si potevano ottenere soluzioni migliori. Purtroppo le mie capacità grafiche non mi permettono un gran che, comunque la soluzione ottimale si ottiene facendo in modo che la tovaglia di destra passi sia in A che in B. Provo ad allegare uno sgorbio per farmi capire (sì lo so che non sono molto quadrate ma con paint non sono riuscito a fare niente di meglio):



Poniamo AB=*x* e $\alpha = COB$; il lato OB del tavolo sarà lungo 1+*x* ed è tale che:

$$OC(=1) = OB \cdot \cos\alpha = (1+x)\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{1+x}$$

da cui ricaviamo

$$sen\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{x(x+2)}}{1+x}$$

Essendo AB⊥OB e CE⊥OC si ricava che anche l'angolo ABE è uguale ad α, si può ora imporre che:

$EC = AB \cdot \cos\alpha + OB \cdot sen\alpha$ da cui $1 = x \cdot \frac{1}{1+x} + (1+x) \cdot \frac{\sqrt{x(x+2)}}{1+x}$, semplifico (N.B.:x>1) ed ottengo:

$$1 - \frac{x}{1+x} = \sqrt{x^2+2x} \rightarrow \frac{1}{1+x} = \sqrt{x^2+2x} \rightarrow \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = x^2+2x$$

da cui si ha (ricordiamo che 1+x>0 e quindi posso tranquillamente semplificare):

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 1 = 0$$

Come si vede abbiamo un'orrenda equazione di 4° grado, ho fatto qualche prova con Ruffini per scomporla ma non ho ottenuto niente, allora sono andato a tentativi, ho imposto che sia scomponibile come:

$$(x^2+ax+b)\cdot(x^2+cx-\frac{1}{b}) = x^4+4x^3+5x^2+2x-1$$

da cui si ricava un orrendo sistema non lineare di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} a+c=4 \\ bc - \dfrac{a}{b} = 2 \\ ac + \dfrac{b^2-1}{b} = 5 \end{cases}$$

Data la struttura ho sperato che almeno le a e c fossero intere e così ho fatto la prova ponendo a=0 ed a=1 ma senza ottenere niente, alla terza prova a=2 ho avuto fortuna e sono riuscito a scomporre l'ostica equazione (magari avessi sempre la stessa fortuna…..).

Per il valore di b si ottiene uno stupefacente φ, sì proprio il numero aureo!! Così si ha 1/b=1-φ che è proprio bello!!!

$$(x^2+2x+\varphi)\cdot(x^2+2x-1+\varphi) = 0$$

Il primo termine da luogo a 2 radici immaginarie mentre il secondo termine ci da le radici

$$x = -1 \pm \sqrt{1+(\varphi-1)} = -1 \pm \sqrt{\varphi}$$

di cui ci interessa esclusivamente la radice positiva. Il lato del tavolo è di 1+*x* e quindi $\sqrt{\varphi} = 1{,}272015....$ che è la risposta che cercavamo.

Si ricava quindi che l'area del tavolo è proprio φ, e chi se l'aspettava?

GaS è proprio soddisfatto, e ne ha ben d'onde.

4.2.2 Solidarietà ad Alberto!

Anche qui abbiamo ricevuto molte soluzioni corrette, e dei disegni bellissimi. Perdonateci se ci facciamo prendere dal romanticismo e pubblichiamo prima quello di ***Zar***, che ci riporta a tempi migliori, proprio qui sulla destra. Lo riduciamo un po', che tanto ne vedrete altri.

La parte migliore è nel commento che lui stesso ci ha mandato:

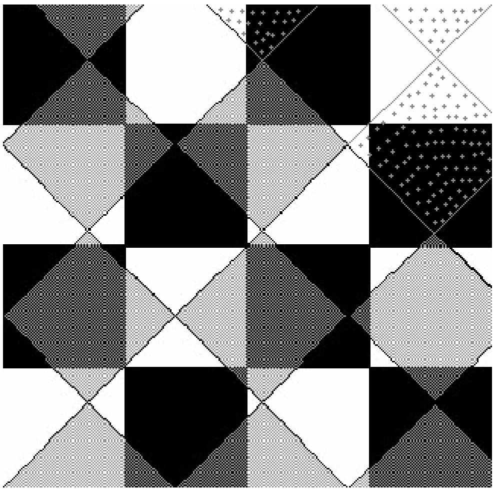
> Allego la figura, tutta fatta con le mie manine. Stamattina, mentre la disegnavo, mia moglie mi gettava occhiatacce e mi chiedeva: "ma stai giocando?". E io, pacifico: "no, sto lavorando!".

La soluzione è giusta, come tutte quelle pervenute da ***Last Duke***, ***Caronte***, ***GaS***, ***Loba***, ***Filippo***, ***Stetson***, ***Torkitorio***, ***Stokastik*** (il caro ChiQua), ***Elena***. Cominciamo con ***Last Duke***:

> Si tratta di fare un bel po' di conti… o forse no? Ci sono parecchie semplificazioni carine, vedendo parecchie simmetrie che…erano state celate sotto un fuorviante "per evitare che facciate arrabbiare Doc…".
>
> Per prima cosa, una convenzione sulla mia terminologia: quando parlo di caselle nere e bianche mi riferisco alla scacchiera inferiore (quella "dritta", tanto per intenderci). Mentre parlo di aree grigie e non-grigie per indicare le caselle nere e bianche della scacchiera superiore (quella ruotata).
>
> Intanto, una prima simmetria c'è, ed è evidentissima: è la simmetria rispetto al centro. Ossia, se indichiamo le righe della scacchiera "dritta" con le lettere da A ad H (dall'alto in basso) e le colonne con i numeri da 1 a 8 (da sinistra a destra), il "grigio intermedio" della casella D4 è identico a quello della casella E5, quello della D3 ad E6, etc. etc. etc.
>
> Ed allora consideriamo solo la metà di destra (avremmo potuto considerare quella di sinistra, faceva lo stesso, ma mi trovo meglio a ragionare nel semiasse positivo delle x).
>
> Poi, ancora una simmetria: le caselle nere della metà superiore sono identiche alle caselle bianche della metà inferiore, con tutta la copertura di grigio: in particolare, le aree grigie delle caselle nere della metà superiore sono identiche alle aree grigie delle caselle bianche della metà inferiore (e, ovviamente, viceversa).
>
> Quindi, consideriamo solo il quadrante in alto a destra della scacchiera, però tenendo conto sia del grigio su casella nera che del grigio su casella bianca.
>
> Un'ultima considerazione: c'è una sorta di simmetria anche rispetto alla bisettrice del quadrante che parte dal centro della scacchiera originale. In particolare (trascurando per ora il fatto che in alto a destra la scacchiera inferiore non è

ricoperta, facendo cioè finta che la scacchiera superiore sia più estesa del normale, al limite infinita), vediamo che le aree grigie delle caselle al di sopra della bisettrice corrispondono alle aree non-grigie delle caselle al di sotto della bisettrice. Ed in più, le caselle sulla bisettrice sono per metà grigie e per metà non-grigie.

Quindi (sempre se la scacchiera superiore fosse illimitata), l'area grigia sarebbe esattamente metà del quadrante (poi da raddoppiare, per tener conto della parte di sinistra). ATTENZIONE! Non da quadruplicare, perché sto considerando sia le caselle bianche che quelle nere in questo quadrante, e quelle bianche mi tengono conto delle caselle nere del quadrante inferiore.



Resta solo da sottrarre a questo mezzo quadrante (che corrisponde pertanto a 8 caselle) la parte di grigio che non esiste perché la scacchiera superiore è in effetti limitata anch'essa a 8 caselle di lato. In particolare, devo eliminare la parte a puntini del disegno qui a lato.

Qui serve qualche conticino, ma neanche troppo. Infatti (ed ovviamente) anche questa parte è simmetrica rispetto alla bisettrice, e quindi, voilà, è il triangolo rettangolo ABC. Per calcolare l'area di questo triangolo (che è metà del quadrato di lato AB), basta vedere quanto è lungo AB.

OA (O è il centro della scacchiera originale) è lungo 4 caselle, mentre OB è $4\sqrt{2}$, quindi AB è pari a $4\cdot(\sqrt{2}-1)$.

Allora, ABC ha area $8\cdot(\sqrt{2}-1)^2 = 8\cdot(3-2\sqrt{2})$

Quindi l'area di sovrapposizione cercata sarà: $2\cdot(8-8\cdot(3-2\sqrt{2}))=32\cdot(\sqrt{2}-1)$

Una estensione con n pari

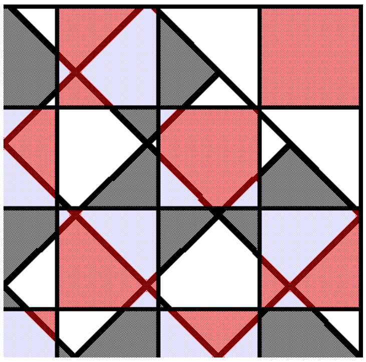
L'estensione a scacchiere con n caselle di lato (n pari) è immediata. Il calcolo è semplicissimo. Il quadrante con scacchiera superiore "estesa" avrà $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n^2}{8}$ aree grigie coperte. Il triangolo rettangolo ha cateto $\frac{n}{2}\cdot(\sqrt{2}-1)$, e quindi area $\frac{n^2}{8}\cdot(3-2\sqrt{2})$.

L'area di sovrapposizione sarà alla fine: $\frac{n^2}{2}\cdot(\sqrt{2}-1)$.

Il caso n dispari

Il caso di scacchiere con n dispari non è così semplice da trattare. Primo, perché le scacchiere con n dispari possono avere tutti gli angoli neri o tutti bianchi, quindi ne esistono di due tipi. Secondo, perché tutte le belle simmetrie del caso n pari vanno a farsi friggere. Resta solo una simmetria rispetto agli assi e alle bisettrici dei quadranti, ma ci si può fare poco.

O almeno, non mi viene in mente niente di utile.



Per esempio, il quadrante per la scacchiere 7x7 è qui a destra, dove con il rosso e il nero sono le caselle colorate delle due scacchiere, mentre con il lilla sono le aree di sovrapposizione.

E non mi sembra ci si possa fare niente di utile, a parte la simmetria rispetto alla bisettrice. Se mai mi verrà qualcosa in mente, scriverò ed invierò trattazione.

Interessante, ma c'è chi ha fatto più in fretta. ***Caronte***, in particolare, ci ha messo meno di dieci righe. Bella anche la soluzione di ***GaS***, tutta basata sulla simmetria, ***Loba*** risolve anche lui abbastanza velocemente:

Partiamo da due scacchiere di lato 1 con 1 casella nera ciascuna. Ruotando di 45° una delle due scacchiere ho un'area comune (nera) di

$$A = 1^2 - 4\left(\left(\sqrt{2}-1\right)/2\right)^2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Passiamo ora a due scacchiere di lato 1 con 4 caselle, due nere e due bianche, ciascuna. Solita storia della rotazione. Ora noto che l'area comune è

$$A = \left(\sqrt{2}/2\right)^2/2 - \left(\left(\sqrt{2}-1\right)/2\right)^2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right)/4$$

cioè un quarto dell'area comune alle due scacchiere. Ottengo lo stesso risultato operando con rotazioni e simmetrie (scusa, Piotr).Prima ruoto la metà inferiore della figura di -90°, poi sovrappongo sempre la metà inferiore alla metà superiore mediante una simmetria assiale e noto che l'area nera nera è un quarto dell'area comune. (...).

Adesso è il turno di due scacchiere di lato uno composte da 16 caselle ciascuna, di cui otto nere e otto bianche. Anche qui posso calcolare l'area nera risultante mediante l'area dei poligoni che corrispondono alla sovrapposizionwe di aree nere, altrimenti sfrutto ancora una volta le simmetrie e le rotazioni, in particolare prima una simmetria assiale che vada a sovrapporre la parte inferiore a quella superiore, poi una rotazione di 90° che sovrapponga il "primo quadrante" al secondo. Anche in questo caso la superficie tutta nera è ¼ della superficie comune totale.

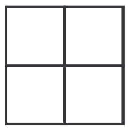
Lo stesso discorso si può seguire anche per le scacchiere con 64 caselle, il problema indicato. Si nota che: la figura è simmetrica rispetto al suo centro O ed è simmetrica "negativamente" (nel senso che a bianco-bianco corrisponde nero-nero e viceversa, mentre bianco-nero resta invariato [diventa nero.bianco]) rispetto ad entrambi gli assi di ogni scacchiera (considerando la figura finale rispetto agli assi cartesiani e rispetto alle bisettrici dei 4 quadranti). È così giustificato il processo operato in precedenza.

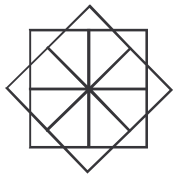
Infine pubblichiamo la soluzione di ***Stokastik***, perché prende in giro il Doc e perché richiama la *teoria dei gruppi*.

Visto che non apprezzate la sfolgorante verità matematica che balza agli occhi per "evidenti ragioni di simmetria" vediamo di darle una veste più formale.

Come sicuramente ricordate (ehehehe), proprio le "evidenti ragioni di simmetria" hanno dato luogo ad un branca rigogliosissima della matematica: la "teoria dei gruppi".

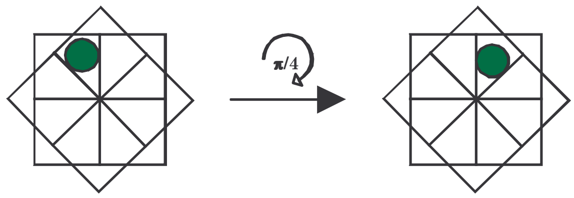
Cominciamo considerando due scacchiere sovrapposte di 4 caselle ognuna. Per ora non consideriamo il colore delle caselle, e focalizziamoci sulle aree delle varie regioni. Ogni scacchiera possiede vari elementi di simmetria. L'elemento che ci interessa maggiormente è l'asse di simmetria quaternario perpendicolare alla scacchiera e passante per il centro. Tecnicamente è un asse C_4 perché la scacchiera (non colorata) rimane invariata se ruotata attorno a questo asse di un angolo $2\pi/4$.



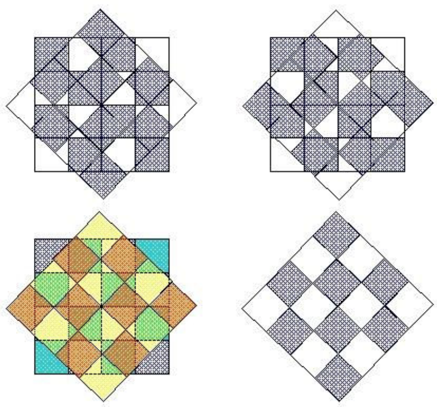


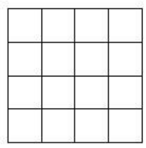
L'intersezione delle due scacchiere individua un ottagono regolare di area facilmente calcolabile. L'ottagono regolare è diviso in otto parti. È graficamente ovvio che le otto regioni hanno eguale area. Se le scacchiere però sono di 64 caselle, l'ovvietà viene meno, quindi procediamo con una dimostrazione valida per qualsiasi suddivisione con la stessa simmetria.

La configurazione con le due scacchiere sovrapposte gode di una simmetria C_8, poichè una rotazione di entrambe attorno all'asse perpendicolare di un angolo $2\pi/8$ (chiamatelo pure 45° se i radianti vi fanno venire l'orticaria) lascia la configurazione invariata. (Se non mi ricordo male, il gruppo di simmetria completa di questo aggeggio si chiama D_{8h}, ma non ci giurerei, potrebbe anche essere il C_{8v}) La presenza dell'asse C_8 significa che per ogni regione che considero (ci metto un pallino), dopo una rotazione di $\pi/4$ la regione è andata al posto di una regione identica, e quindi di egual area.



Dopo 8 rotazioni, il pallino è tornato al punto di partenza. Questo significa che scelta una regione arbitraria, ne esistono altre 7 esattamente uguali in posizioni diverse della scacchiera. Questo ragionamento è valido per scacchiere con un qualsiasi numero pari di caselle. Lo scettico verifichi per il caso con 16 caselle riportato in figura.





Dipingiamo ora le scacchiere di due colori. Indichiamo con B e N i due colori della prima scacchiera (diciamo quella con i lati orizzontali e verticali), e con b e n i colori della seconda.

Tenendo conto delle caselle colorate, notiamo che una scacchiera perde alcuni elementi di simmetria, ad esempio due piani perpendicolari e gli assi C_4, ma rimane il centro di inversione, indicato normalmente con i. Cioè, prendendo una casella qualsiasi, esiste una casella identica dello stesso colore dalla parte opposta rispetto al centro della scacchiera.

Consideriamo una regione appartenente all'ottagono regolare, e quindi appartenente ad entrambe le scacchiere. Questa regione può essere solo di quattro tipi: N_n,N_b,B_b,B_n. Abbiamo prima dimostrato che ne esistono altre 7 equivalenti. Dobbiamo calcolare la frazione di regioni di tipo N_n.

Non è difficile notare ora che, partendo da una qualsiasi regione, ad esempio di tipo Nn, considerando le altre 7 regioni equivalenti, queste avranno un codice colore ottenuto dalla precedente variando ora il primo colore ora il secondo, alternativamente. Cioè N_n, N_b, B_b, B_n e così via. A questo punto non possiamo far altro che concludere che l'area delle regioni di tipo N_n è esattamente un quarto dell'area totale dell'ottagono.

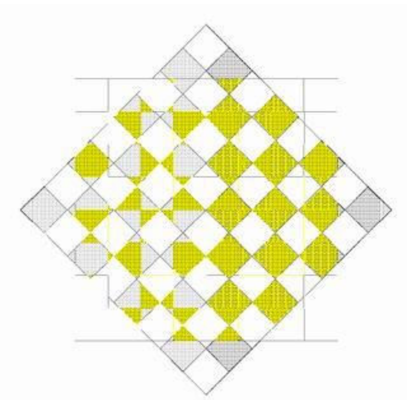
Comunque a mio parere si poteva benissimo dire che l'area richiesta è un quarto dell'ottagono regolare "per evidenti ragioni di simmetria".

Il Doc non è così convinto, ma noi ci siamo già distratti, perché è arrivata in redazione un'altra soluzione e una possibile espansione di ***Torkitorio***:

Il vostro problema è però un altro. Se infatti, oltre a queste due, non avete altre scacchiere è inutile che ad Alberto torni la passione, perchè mi sono preso la libertà di... sezionarle. Andiamo x ordine, và.

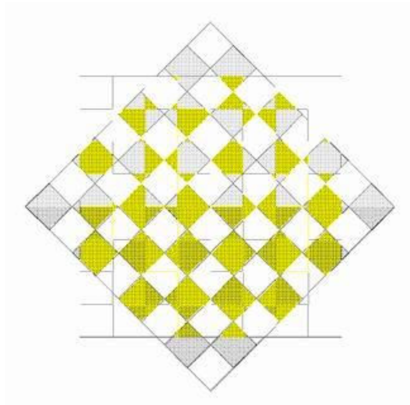
Per prima cosa, allo scopo di non fare confusione, diamo dei nomi:

- scacchiera n. 1: quella ruotata di 45 gradi (secondo me sta sopra l'altra, e quindi è la n. 1)
- scacchiera n. 2: provate a indovinare qual'è...
- ottagono: la parte della scacchiera n. 1 che si sovrappone alla n. 2



Osservando bene le due scacchiere sovrapposte salta subito(?!) all'occhio che l'AND è antisimmetrico (non so quanto sia corretto il termine, ma spero renda l'idea) sia rispetto all'orizzontale che rispetto alla verticale.

In pratica, se io prendo l'ottagono e lo divido a metà tagliando lungo la verticale centrale e infine piego le due metà una sull'altra come se fosse una spianatina (rigorosamente sarda...) riesco a "riempire" (con l'AND) tutti i rombi neri nella parte destra dell'ottagono.



Una cosa come quella in figura (considerando naturalmente solo la parte destra).

Facendo lo stesso ragionamento, ma stavolta ripiegando lungo l'orizzontale ottengo che a "riempirsi" saranno, stavolta, tutti i rombi neri della metà inferiore dell'ottagono.

Anche qui ho messo una figura

Poichè, per EVIDENTI RAGIONI DI SIMMETRIA (con buona pace di Doc)[15], i rombi neri della metà inferiore dell'ottagono

[15] Ok, la verità. Su RM si formano dei tormentoni, che noi alimentiamo spietatamente, perché servono a dare colore. Uno di questi è ormai diventato la mia idiosincrasia alle "ragioni di simmetria", e il mio ruolo è ormai quello di urlare "Aaaargh!" ogni volta che le sento nominare. A dire il vero, le ragioni di simmetria sono semplicemente splendide e quasi divine, e io le adoro. M'irrita il fatto che spesso vengano usate a sproposito, o, peggio ancora, dichiarate come "evidenti" quando magari evidenti non sono per niente. Da qui il tormentone: ma che le adoro si capisce benissimo, in realtà *[Liberamente tratta da una mail di PRS]*.

corrispondono esattamente ai rombi bianchi della metà di destra dell'ottagono, se ne deduce che se avessimo 2 ottagoni (o meglio 4 scacchiere) e uno lo ruotassimo di 90 gradi il risultato dell'AND coinciderebbe con la metà esatta dell'ottagono.

Ma poichè l'ottagono è uno solo, la somma degli AND è pari a un quarto dell'ottagono stesso.

La superficie totale dell'ottagono, poi, si calcola facilmente eliminando dalla scacchiera i 4 triangoli, che hanno un'altezza pari a $h = d\left(\sqrt{2}-1\right)/2$ e per base b pari a due volte tale valore (è un triangolo isoscele a 45 gradi), dove d è naturalmente il lato della scacchiera.

La superficie dei 4 triangoli è quindi

$$A = 4bh/2 = 2bh = 2 \cdot 2h \cdot h = 4h^2 = 4\left[d\left(\sqrt{2}-1\right)/2\right]^2 = \left[d\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^2$$

e quella dell'ottagono è 1-A.

Un'altro modo per arrivarci, un po' empirico e, a mio avviso, molto poco scientifico, è quello di fare le seguenti considerazioni:

- se sovrappongo le due scacchiere senza rotazione l'AND è pari a 1/2 delle zone che si sovrappongono (tutta la scacchiera)
- se ruoto di 90 gradi l'AND è pari a 0

ergo: se ruoto di 45 gradi l'AND è pari a 1/4 delle zone a contatto.

....scrivendo le ultime considerazioni mi è venuto un dubbio...(che poi in realtà farebbe sballare il ragionamento appena fatto, valido per una funzione lineare): è corretto descrivere l'AND con la funzione seguente (per una rotazione t qualunque e posto il lato pari a 1)??

$$\text{AND} = N\left[(\cos t)^2\right](1-A)$$

dove

N = area nera = 1/2

$$A = 4bh/2 = 2bh$$

inoltre osservando le due scacchiere (una delle quali ruotata di un angolo pari a t) (stavolta non ho messo il disegno) si ricava facilmente che

$$h = \left(|\cos t| + |\sin t| - 1\right)/2$$

e, con semplici considerazioni sui triangoli rettangoli e alcune trasformazioni trigonometriche si ottiene

$$b = h\tan t + h\cot t$$

o anche

$$b = h/\left(|\sin t| \cdot |\cos t|\right) = \left(|\cos t| + |\sin t| - 1\right)/\left(2|\sin t| \cdot |\cos t|\right)$$

spero di non aver sbagliato i passaggi.

Per calcolare b sembrerebbe conveniente usare la prima o la seconda formula (che includono h) e evitare di calcolarlo (è pari a zero) quando h = 0, altrimenti vien fuori 0/0 e io queste cose non le ho mai digerite bene.

Neppure noi, a dire la verità. Ma questa è senz'altro una buona idea per espandere il ragionamento per diverse rotazioni della scacchiera. Tra l'altro il Capo si aspettava una spiegazione del perché il risultato non cambia se si ruota in senso orario o antiorario...

5. Quick & Dirty

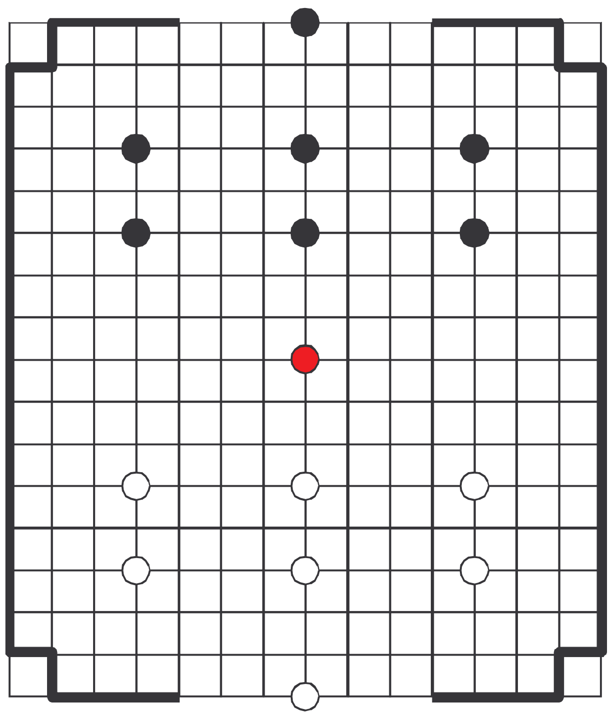
Le formiche che avete in cucina, come ogni mattina, escono dal nido in fila indiana e procedono così sino al barattolo dello zucchero, dove una si separa dalla fila. Da quel momento, procedono in fila per due sino alle briciole del pane, dove una si separa dal gruppo. Quindi, vanno in fila per tre sino alla pila dei piatti della sera prima, dove una si separa dal gruppo. Procedono allora in fila per quattro... insomma, avanti così per quel disastro che è la vostra cucina, sin quando arrivano in fila per dieci sino al toast avanzato della vostra colazione.

Quante formiche avete, come minimo, in casa?

6. Zugzwang!

6.1 I Sette Saggi

Non chiedetemi perché lo abbiano chiamato così; a parte il fatto che sono quattordici, non credo che prendere a calci una palla sia un'attività caratterizzante grande profondità intellettuale. Forse è per questo che dal 1980 (quando lo hanno inventato) ne hanno vendute si e no tre copie. Peccato, perché non è brutto, come gioco. Ho visto pochissima roba, con delle regole così cervellotiche.



Allora, il materiale necessario sono ***7*** pedine bianche, ***7*** pedine nere (i "Saggi": totale, quattordici), una pedina di colore diverso (la "Palla") e una scacchiera decisamente stramba; la vedete qui di fianco, con i Saggi e la Palla (rossa) nella posizione iniziale. Prima che sbagliate i conti (come è successo a me), vi dico subito che la scacchiera è ***16x14***.

Allora, tutto attorno c'è una riga ingrossata: chiamiamola "Siepe", per comodità (vi prego di notare che gli angoli della Siepe "mangiano" un quadratino). Ci sono due buchi nella Siepe, e sono (coerentemente) le "Porte".

Si gioca sugli incroci e ogni giocatore, al suo turno, muove un Saggio; i Saggi possono muovere in due modi:

- Diagonalmente o ortogonalmente in un incrocio vuoto: ***è vietato il movimento diagonale indietro***.
- Diagonalmente o ortogonalmente contro la Palla (anche diagonale indietro).

Se vuole, un Saggio può anche finire sulla Siepe.

Quando un Saggio finisce contro la Palla, questa *si muove nella direzione nella quale si muoveva il saggio*. La Palla ha alcuni obblighi di movimento:

- Continua (nello stato di moto) sin quando non va a picchiare contro un altro Saggio (di qualsiasi colore); a questo punto, a scelta del giocatore che gli ha tirato il calcio, può rimbalzare ***a destra***, ***a sinistra*** o ***indietro*** (insomma, rispetto alla direzione del moto: ad angolo retto dalla parte che vuole o all'indietro); l'incrocio sul quale gira è quella immediatamente precedente quello occupato dal Saggio che causa il rimbalzo.
- La Palla, in una mossa, può fare più rimbalzi
- È il giocatore che ha tirato il calcio che decide quando la Palla si ferma, ma la Palla ***deve rimbalzare almeno su un Saggio***.
- La Palla non può finire nella Siepe (ma può rimbalzare contro Saggi nella Siepe)

Inoltre, un Saggio non può fermarsi sulla Porta avversaria e nella propria Porta non può esserci più di un Saggio.

Si vince un punto (e si ricomincia da capo, rimettendo i pezzi come indicato) ogni volta che la Palla finisce nella Porta avversaria; vince chi fa per primo cinque punti.

7. Pagina 46

Primo Quesito

Sviluppando il fattoriale in fattori primi, ognuno degli zeri al termine del numero compare per la presenza dei fattori (primi) ***2*** e ***5***; essendo molti più i fattori ***2***, è il numero dei fattori ***5*** che determina il numero di zeri.

Il numero di fattori ***5*** (e quindi il numero di zeri a destra) in ***x*** vale allora:

$$Z(x)=\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{25}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{125}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{625}\right\rfloor+\dots \qquad \texttt{[007.001]}$$

La serie termina quando la potenza di ***5*** eccede ***x***.

Ignorando le parentesi di Gauss, questa funzione può essere approssimata da:

$$5*Z(x)-x=Z(x) \qquad \texttt{[007.002]}$$

Ossia $x\approx 4*Z(x)$ (approssimativamente).

Il problema chiede di trovare ***x*** per cui ***Z(x)=1001***, quindi dalla nostra soluzione approssimata risulta come prima ipotesi ***x=4004***. Applicando però la `[001]` si ha che il numero di zeri è $800+160+32+6+1=999$; inoltre, con lo stesso metodo si vede che i fattoriali dei numeri compresi tra ***4005*** e ***4009*** (inclusi) hanno ***1000*** zeri. ***4010*** è il più piccolo numero con ***1001*** zeri al termine.

Il problema richiede che ***x*** sia primo: ***4011*** ha radice numerica ***6***, quindi non è primo; le condizioni del problema sono verificate unicamente per ***4013***.

Secondo Quesito

Dal prodotto del fattoriale in cui ogni numero è espresso in fattori primi, rimuoviamo tutti i fattori ***5*** e un ugual numero di fattori ***2***; il numero risultante ***modulo 10*** sarà la risposta al problema. Si noti che, restando ancora un notevole numero di fattori ***2***, la risposta appartiene all'insieme $\{2,4,6,8\}$.

Consideriamo i numeri tra ***1*** e ***x*** in gruppi di ***10***, e rimuoviamo due fattori ***10*** da ognuno dei gruppi. Ad esempio, dal gruppo ***1***, ***2***, ***3***,...,***10*** rimuoviamo due fattori ***2*** (da ***2*** e da ***6***) e due fattori ***5*** (da ***5*** e da ***10***). Questo ci lascia con la serie $1,1,3,4,1,3,7,8,9,2$.

Ora separiamo tutti i fattori che provengono da un multiplo di ***5***; si verifica che, se ***r(x)*** è la cifra cercata, sussiste la relazione:

$$r(x)=\left\langle r\left(\left\lfloor \frac{x}{5}\right\rfloor\right)*w*r\left(\langle x\rangle_{10}\right)\right\rangle_{10} \qquad \texttt{[007.003]}$$

dove

$$w=\begin{cases}4 & se \quad \left\langle \frac{x}{10}\right\rangle_{10} \; dispari \\ 6 & se \quad \left\langle \frac{x}{10}\right\rangle_{10} \; pari\end{cases} \qquad \texttt{[007.004]}$$

ossia, ***w*** è la cifra significativa più a destra nel numero formato moltiplicando tra di loro i numeri $1,2,3,\ldots,10*\left\lfloor \frac{x}{10}\right\rfloor$ una volta che siano stati rimossi i fattori di ***10*** e i fattori multipli di ***5***. Si vede che nel gruppo considerato nell'esempio precedente, (***1***,...,***10***) si ha $w=\langle 1+1+3+4+1+3+7+8+9+2\rangle_{10}=4$.

In generale, nei numeri da $10n+1$ a $10n+10$ rimuoviamo $10n+5$ (multiplo di ***5***), $10n+10$ (multiplo di ***10***), e una coppia di fattori ***2*** dai valori $10n+2$ e $10n+6$, il risultato modulo ***10*** vale sempre ***4***; generalizzando su tutti i gruppi si ha che $\langle 4^t\rangle_{10}$ vale ***4*** o ***6*** in funzione della parità; allora possiamo calcolare, per il numero in oggetto,

$$\begin{aligned}r(4013)&=\langle r(802)*4*6\rangle_{10}\\ r(802)&=\langle r(160)*6*2\rangle_{10}\\ r(160)&=\langle r(32)*6*1\rangle_{10}\\ r(32)&=\langle r(6)*4*2\rangle_{10}\end{aligned} \qquad \texttt{[007.005]}$$

E si verifica facilmente che ***r(6)=2***. Quindi,

$$\begin{aligned}r(32)&=\langle 2*4*2\rangle_{10}=6\\ r(160)&=\langle 6*6*1\rangle_{10}=6\\ r(802)&=\langle 6*6*2\rangle_{10}=2\\ r(4013)&=\langle 2*4*6\rangle_{10}=8\end{aligned} \qquad \texttt{[007.006]}$$

E quindi la cifra meno significativa diversa da zero è ***8***.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Due palle così! [002] - Il contrario di "Gestalt", ovvero perché, quando monto qualcosa, mi avanzano sempre tre viti e due rondelle.

Bene, il fatto che sia passato quasi un mese dalla precedente incursione in questo campo probabilmente vi ha permesso di raccogliere un attimo le idee; siccome questa parte non è eccessivamente complicata (se non per le conclusioni), partiamo da un concetto piuttosto curioso, quello di ***gruppo libero***.

Spero vi ricordiate tutti abbastanza Algebra da avere presente la definizione di gruppo (Associativa, Identità, Inverso... Se questo non vi ricorda niente, tornate il mese prossimo) Un gruppo abbastanza interessante è quello delle ***rotazioni*** in $\Re^3$, ossia dei "giri" che possiamo far fare ad una sfera tenendo il centro nell'origine; per motivi che non andremo ad esplorare, questo gruppo è solitamente indicato con ***SO(3)***.

Consideriamo due elementi di questo gruppo, ϑ e φ, rotazioni della nostra sfera; evidentemente, la loro composizione genera un gruppo, il gruppo ottenuto dalla creazione di "parole" che sono sequenze di $\vartheta, \varphi, \vartheta^{-1}, \varphi^{-1}$. Siccome consideriamo solo gli elementi ottenuti componendo questi generatori, è lapalissiano che qualsiasi elemento del gruppo sia generabile; l'unica cosa che dobbiamo dimostrare è l'esistenza dell'identità tra questi elementi; la cosa è immediata, se consideriamo che:

$$\vartheta\vartheta^{-1} = \varphi\varphi^{-1} = \vartheta\varphi\varphi^{-1}\vartheta^{-1} = e \qquad \texttt{[008.001]}$$

Insomma, ci sono un ***mucchio*** di modi per ottenere l'identità[16].

Non so a voi, ma a me quel moltiplicare per l'inverso ha sempre dato un po' l'idea di ciurlare nel manico, come si dice a Torino (per gli alieni: tirare a fregare aggirando il problema). La cosa non ci ha disamorato dell'Algebra, ma lasciatecela per favore considerare seccante.

Plaudiamo quindi all'invenzione del ***gruppo libero***: richiediamo che, se si usa una certa rotazione (ad esempio ϑ) al passaggio successivo sia proibito utilizzare la sua inversa (nel caso, ϑ^{-1}). Ora, per "ragionevoli" scelte delle due rotazioni, *l'identità non è ottenibile*, come dolorosamente ha sperimentato chiunque abbia provato a rimettere a posto un Cubo di Rubik[17]. Notate che non viene "negata l'esistenza" degli inversi; semplicemente, dovete usarli da un'altra parte, se volete; e qui, la non commutatività vi frega.

Cosa c'è di interessante in questo concetto? Beh, tanto per cominciare, ogni elemento del gruppo può essere generato *in modo unico*; rispetto ad una certa "rotazione", la "parola"

[16] Giusto per parlare d'altro: lo spazio che stiamo esaminando è *tridimensionale*, ma lo stiamo ottenendo con *due* generatori; la cosa (soprattutto agli ingegneri) è sempre sembrata piuttosto strana, tant'è che R. Heinlein (ingegnere col quale politicamente non andavamo per niente d'accordo, ma tanto di cappello alle sue idee per quanto riguarda la fantascienza) ha postulato (ne "Il Numero della Bestia") che dare ad un giroscopio un impulso contemporaneamente lungo i *tre assi* lo facesse sparire in un cronotopo alternativo; per "simmetria" supponeva inoltre che esistessero tre assi *temporali* e che i sei assi fossero interscambiabili tra di loro; questo dava origine a 6^{6^6} "generatori di universi", ed era il modo in cui RH "leggeva" il 666 della Rivelazione di Giovanni. Ve l'ho detto: politicamente insopportabile, ma tipo tosto *[Se per qualcuno la cosa pare ridicolmente semplice, andate a rivedervi la discussione sui tempi e modi verbali del Compleanno di Cantor, RM062 (RdA)]*.

[17] I due terzi fisici della Redazione hanno passato una settimana di trent'anni fa (spacciati come "esperti solutori ungheresi") a mettere in ordine Cubi rimescolati; conoscendo (in due) solo tre parole di ungherese, l'accordo era di stare completamente zitti per tutta la durata della performance. Le tre parole erano "olash" (italiano), "ulitza" (via), "palinka" (grappa di albicocche).

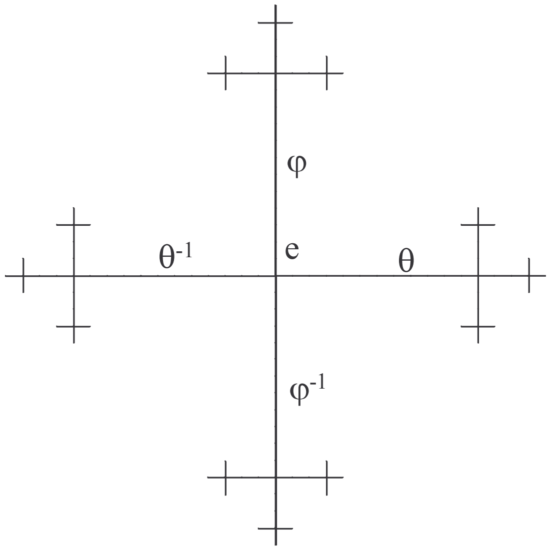
che vi porta lì è una sola. La dimostrazione è abbastanza immediata, una volta che ci si ricordi che, sin quando faccio i calcoli, posso benissimo moltiplicare da una parte o dall'altra per gli inversi. L'importante è che, una volta fatte le opportune semplificazioni, non abbia mai vicini due inversi.

Siccome i matematici amano complicarsi la vita (almeno nelle definizioni),

> Un gruppo ***G*** è *liberamente generato* da ϑ e φ se non è possibile ottenere l'identità dalle loro composizioni.

Siccome però l'identità ci vuole, diciamo che è la composizione di ***zero*** rotazioni di un tipo qualsiasi.

La cosa si fa interessante nel notare che in due dimensioni non esistono gruppi liberi (complichiamo? SO(2) non ha sottogruppi liberi); infatti, qui è sempre $\vartheta\varphi = \varphi\vartheta$ e quindi $\vartheta^{-1}\varphi^{-1}\vartheta\varphi = e$ e avete ottenuto l'identità.



Mi rifiuto di farvi un disegnino di come funziona il tutto; però, una rappresentazione farebbe comodo. Se tutto va bene, qui di fianco trovate qualcosa che le somiglia. A voi l'emozionante compito di continuare a tracciare lineette, qui si annoia anche PowerPoint[18].

Giusto due parole di chiarimento; al centro avete l'elemento neutro; ogni volta che fate una rotazione ϑ (o, se preferite, *moltiplicate a destra per* ϑ) vi spostate verso destra, se moltiplicate a destra per ϑ^{-1} vi spostate a sinistra… eccetera.

È un po' meno immediato moltiplicare una parola a *sinistra*, ossia se, dato ***g***, voglio calcolare ϑg; in questo caso, dovete considerare l'intero ramo che congiunge ***e*** a ***g***, spostarlo a *destra* e scalarlo quanto basta.

A questo punto avete capito tutti che è un frattale, nel senso più terra terra di "aggeggio fatto da copie scalate di se stesso". Proviamo a lavorarci sopra. Visto che è un frattale, non dovrebbe essere difficile descriverlo a partire da parti di se stesso.

Consideriamo infatti l'insieme G_ϑ, ossia il sottoinsieme di ***G*** degli elementi che cominciano con ϑ. Nel disegno, è il ramo destro; ma allora, con evidente estensione della notazione,

$$G = \{e\} \bigcup_d G_\vartheta \bigcup_d G_{\vartheta^{-1}} \bigcup_d G_\varphi \bigcup_d G_{\varphi^{-1}} \qquad \textbf{[008.002]}$$

Che non è altro che la descrizione del disegno che abbiamo fatto sopra.

Ora, chiediamoci come è fatto l'insieme $\vartheta G_{\vartheta^{-1}}$, ossia l'insieme "sulla sinistra" moltiplicato per ϑ.

[18] Non è difficile ottenerla con *FractInt*, ma il metodo che ho trovato mi pare poco elegante. Se riuscite a fare un bel disegino, mandatecelo.

"Avevi detto un attimo fa che non potevi avere una rotazione e il suo inverso di seguito!" Infatti, faccio la moltiplicazione e spariscono entrambi; su quello che mi resta, ho una sola certezza: così come era costruito l'insieme $G_{\vartheta^{-1}}$, quello che mi resta in $\vartheta G_{\vartheta^{-1}}$ di sicuro non comincia con ϑ; infatti, questo insieme è composto di *tutte le parole di* **G** *che* **non** *cominciano per* ϑ.

A questo punto, non ci vuole un grande genio per accorgersi che è:

$$\begin{aligned} G &= G_{\vartheta} \bigcup_{d} \vartheta G_{\vartheta^{-1}} \\ &= G_{\varphi} \bigcup_{d} \varphi G_{\varphi^{-1}} \end{aligned} \qquad [008.003]$$

E stesso discorso per gli inversi.

E se vi sembra una cosa "evidente", provate a rivedervi il ragionamento; abbiamo preso ***G***, lo abbiamo diviso in *quattro* parti, e poi lo abbiamo ricostruito usandone *solo due*...

Adesso, dovrebbe esservi chiaro il titolo.

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms