Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 063 – Aprile 2004- Anno Sesto

1. Una Vita da Mediano

Una vita da mediano - a recuperar palloni

Nato senza i piedi buoni - lavorare sui polmoni

Una vita da mediano - con dei compiti precisi

A coprire certe zone - a giocare generosi

Lì, sempre lì, lì nel mezzo - finché ce n'hai stai lì

(Luciano Ligabue)

I portieri odiano contare. Il loro numero preferito è lo zero, perché la grandezza che professionalmente sono tenuti a misurare è il numero di palloni che devono raccogliere al fondo della propria rete; e quanto più prossimo a zero è il totale conteggiato a fine partita, tanto meglio hanno mantenuto i loro impegni. D'altro canto, gli attaccanti non sarebbero affatto dispiaciuti di procedere verso numeri alti, per la ragione esattamente opposta: sembra però che, almeno nel football più recente, sia la filosofia dei portieri ad essere maggiormente soddisfatta. Per l'aritmetica dei risultati finali delle partite di calcio sono quasi sempre sufficienti lo zero, l'uno e qualche raro numero primo; i numeri composti sono invece riservati ad eventi eccezionali: quattro gol sono normalmente celebrati per decenni dalla tifoseria della squadra che li ha messi a segno, mentre numeri come sei od otto rientrano già nella piena leggenda sportiva.

Doveva pertanto essere un momento davvero drammatico per il povero Tilette, in quel mezzo pomeriggio del 22 Ottobre, quando ad un minuto dalla fine della partita vide di nuovo avventarsi contro la sua porta il maledetto Wolfhagen. L'erba che i suoi piedi stavano nervosamente calpestando era quella dello Shepherds Bush di Londra, e la maglia nera che indossava lo qualificava come portiere: Wolfhagen aveva indosso invece la casacca biancorossa della nazionale danese, e correva veloce come sanno fare solo le punte. Attacco e difesa eternamente impegnati in un solo duello, come in molti altri sport: Tilette a guardia della porta francese, Wolfhagen con l'intenzione di violarla a beneficio della gloria sportiva di Danimarca. Tutto attorno, il brusio degli spettatori paganti: stavano assistendo ad un incontro di semifinale del più importante torneo calcistico del mondo.

Quando lo spietato Wolfhagen scaricò la sfera di cuoio alle spalle di Tilette, facendo gonfiare ancora una volta la rete francese, certamente esultò per la finalissima ormai certa, da giocare contro gli imbattibili padri fondatori del football, gli inglesi; e certo anche per il suo quarto sigillo personale segnato di fronte a mille spettatori che riempivano gli spalti. Per conto suo, invece, Tilette avrà forse pensato che era davvero troppo dover chinarsi a raccogliere ancora una volta la palla adagiata nelle maglie della rete: con le quattro segnature di Wolfhagen il bilancio dei gol subiti in quella partita era tornato ad essere un clamoroso numero primo. Più spietato di Wolfhagen era stato infatti Nielsen, che aveva violato da solo la porta francese per ben dieci volte; inoltre, una trascurabile doppietta di Middleboe e un gol isolato di Lindgreen avevano innalzato lo score danese ad un terrificante diciassette. Da parte francese, il solo Sartorius era riuscito e segnare il classico punto della bandiera, appena un quarto d'ora dopo il fischio d'inizio (ma va detto che i danesi ne avevano già segnati tre nei primi sei minuti di gioco), e il tabellone segnava quindi un definitivo 17-1. I mille londinesi si avviarono verso l'uscita: l'indomani, in quello stesso campo, Olanda e Svezia si sarebbero disputate il terzo e quarto posto del torneo, ma la Francia[1] aveva ormai terminato la sua avventura. La Danimarca, invece, era attesa due giorni dopo nel tempio di White City dai maestri e padroni di casa d'Inghilterra, che avrebbero fatto di tutto per impedir loro di fregiarsi il petto con la medaglia d'oro[2] delle Quarte Olimpiadi Moderne. Correva l'anno 1908, e la nazionale italiana di calcio ancora neppure esisteva: sarebbe nata solo due anni dopo, nel 1910, quando all'Arena di Milano scese in campo per la prima volta, ancora senza la classica maglia azzurra, proprio contro la Francia[3].

In un'epoca in cui il calcio è l'onnivoro del tempo mediatico e la matematica scienza spesso negletta e trascurata, sorge una certa irritazione nel vedere che l'avverbio "matematicamente" è usato quasi sempre per sancire la retrocessione della tal squadra o il numero di giornate di anticipo con cui la tal altra ha vinto il campionato. È comunque vero, però, che alcuni elementi fondamentali dell'aritmetica sono necessari agli appassionati sportivi, perché quasi ogni evento sportivo abbisogna di "misura", e la misura abbisogna dei numeri. L'esito di ogni singola sessione sportiva

[1] La "Francia A", per l'esattezza. Forse con un eccesso di fiducia, i francesi avevano inviato due squadre nazionali al torneo, che vennero chiamate "France A" e "France B": arrivarono ultima e penultima.

[2] Gli inglesi riuscirono nell'intento, e ai danesi restò la consolazione della olimpica medaglia d'argento; ma fecero sudare gli allora maestri indiscussi del calcio. Il risultato finale fu un misero (per quei tempi) due a zero; gol di Chapman e Woodward.

[3] 15 Maggio 1910: Italia 6 Francia 2.

è registrato tramite un punteggio, e il regolamento che ne definisce le regole di attribuzione cela spesso delle intenzioni sulla natura e filosofia del gioco stesso: quasi come se la matematica (o, meglio, l'aritmetica elementare) fosse depositaria di recondite intenzioni strategiche. Nel calcio, almeno formalmente, un gol vale l'altro, e ognuno di essi contribuisce ad arricchire il punteggio finale della partita. Nel basket vige già una regola diversa, perché il passaggio della palla attraverso la reticella può significare un incremento di due, uno, o anche tre punti del bilancio totale. Questa variabilità è significativa: significa che si ritiene più difficile (e spettacolare) segnare da una certa distanza piuttosto che da sotto canestro, più meritevole una schiacciata in gioco vivo di quanto lo sia un tiro libero dalla lunetta. Il rugby e il suo cugino yankee, il football americano, attribuiscono alla "meta" un valore ben più alto del banale "1", perché intendono regolamentare con criteri ancora più sofisticati le differenze tra un tipo e un altro di marcatura[4]. Sono tutti esempi che guidano strategicamente e tatticamente i contendenti a privilegiare un approccio piuttosto che un altro, e non è raro il caso di "cambiamenti in corsa" dei vari regolamenti di scoring al fine di migliorare un aspetto spettacolare (o disincentivarne uno che spettacolare non è) dello sport in questione: ad esempio, il canestro da "tre punti" nel basket è di introduzione relativamente recente.

Ci sono sport che hanno nel meccanismo di attribuzione dei punti la reale essenza del gioco. Qualsiasi ragazzino è affascinato da una pista da bowling, e l'obiettivo della gara sembra non necessitare neanche spiegazioni: buttare giù più birilli possibile. Solo che la usuale semplificazione "un punto per ogni birillo", più che incompleta è proprio fuorviante. Ogni partita è composta da dieci sessioni di lancio, ogni sessione prevede il lancio di due bocce contro i poveri dieci[5] birilli; se già il primo lancio abbatte tutti i birilli, la sessione è considerata completa così, altrimenti si ricorre al secondo, che sarà diretto contro i birilli superstiti dopo la prima corsa della boccia. Nel caso che una sessione termini con qualche birillo ancora in piedi, il punteggio è banalmente dato dal totale degli abbattuti nella sessione (6 al primo colpo, 2 al secondo, totale 8), ma le cose si complicano attraverso i "bonus" che vengono attribuiti nei casi in cui le sessioni terminano con tutti i dieci birilli abbattuti. Se per la carneficina birillesca si sono resi necessari con due lanci ("spare") il punteggio della sessione è pari a 10 più il numero di birilli abbattuti nel primo lancio del turno successivo; se l'abbattimento è avvenuto in un colpo solo ("strike") il punteggio della sessione è pari a 10 più il numero di birilli abbattuti nei due lanci successivi. Solo per i calcoli del bonus, dopo la decima e ultima sessione si possono avere uno o due lanci extra, che però non vengono di fatto conteggiati nello score finale se non, appunto, per determinare compiutamente il valore della decima sessione di tiro. Questo significa che il massimo punteggio ottenibile a bowling è ben diverso dall'essere il "100" implicito nella regola "un punto per birillo", e che la differenza di punteggio tra un giocatore che abbatte sempre nove birilli nelle sue

[4] Il calcio non ha niente del genere, se non forse nella leggendaria "lotteria dei rigori" che risolve alcune partite a scontro diretto. In questo caso non si capisce bene se i rigori segnati dopo la fine dei tempi supplementari debbano essere considerati autentici "punti", alla stregua dei gol normali, o meno. I giornali non esitano a titolare con frasi del tipo "Roccacannuccia-Terradimezzese 8 a 7 (d.c.r.: 1-1; 3-3 d.t.s.), che dovrebbe significare che il risultato alla fine dei tempi regolamentari era 1 a 1, alla fine dei supplementari 3 a 3 e infine 8 a 7 d.c.r., dopo i calci di rigore: ma non sappiamo come vengano archiviati, a fini statistici, questo tipo di risultati: probabilmente come pareggi. Le recenti introduzioni del "golden" e "silver gol", invece, agiscono alla solita maniera sul punteggio finale (sono gol assolutamente normali, valgono "uno" come tutti gli altri), ma intervengono brutalmente sul cronometro, decidendo la morte improvvisa (nel caso del golden gol) o molto prossima (nel caso del silver gol) della partita. Totalmente antispettacolari, sono in genere odiati dai tifosi che ancora si chiedono quale sia lo scopo ultimo di tali perverse invenzioni.

[5] Che dieci sia un numero triangolare è nozione eternata in tutte le piste da bowling, e la spiegazione iniziale del concetto di "Numero Triangolare" attraverso la disposizione dei dieci birilli del bowling è eternata in quasi tutti i manuali di matematica.

sessioni contro il giocatore perfetto che fa tutti strike non è del dieci, ma di un abissale settanta per cento[6]. Se amate il bowling o se siete solo curiosi, provate a calcolare in quale range si collocano le partite fatte da dieci "spare". Il punteggio del bowling dichiara insomma qualcosa di importante sulla natura stessa del gioco: e cioè che buttare giù un po' di birilli con una boccia è ragionevolmente facile (ed è questa una ragione per cui è vissuto come "gioco" anche dai principianti: emozione negata ai saltatori con l'asta, che prima di riuscire a completare un vero salto devono massacrarsi di allenamento e di apprendimento di tecniche complesse), ma è assai meno facile buttarli giù tutti con regolarità e precisione: il metodo di calcolo "amplifica" la parte alta del punteggio, per aumentare le distanze tra "giocatori bravi", e tende a premiare la continuità più che i colpi fortunati.

Questo meccanismo di amplificazione e premio di uno specifico comportamento agonistico si ritrova nel bridge. Chiunque abbia mai comprato un mazzo di carte per giocare a scala quaranta o a ramino può essere rimasto abbastanza perplesso nel trovare la cinquantacinquesima carta che riepiloga la tabella punteggi del bridge, se non ha mai avuto la fortuna di cimentarsi con questo gioco. Senza entrare troppo nei dettagli del "come si gioca", si può ragionevolmente affermare che le osterie d'Italia siano stracolme di potenziali campioni del "gioco della carta" nel bridge. L'essenza è infatti quasi la stessa del tressette, o delle sue variazioni: mutatis mutandis (ovvero acquisendo il passaggio da 40 a 52 carte, e limitandoci alla versione delle smazzate "senza atout[7]" del bridge) una mano di bridge non si gioca in maniera troppo diversa di una di tressette con il morto. Il settantenne Beppe che, riempiendo pensosamente il "tubô" dalla "mesa stôpa" di Barbera[8], riesce a capire come far cadere l'asso di bastoni di Giovanni perché sa sfruttare il fatto di essere secco a coppe e di avere il ritorno per le denari del morto, non ha la minima idea di cosa voglia dire la frase "la chicane a quadri ha consentito al dichiarante un doppio impasse seguito da un brillante squeeze nei confronti degli onori franchi di Ovest", ma è esattamente quello che sta facendo. Certo, il bridge è anche reso un po' più complesso dal fatto che si giocano anche mani con atout e da un certo numero di regole aggiuntive, o parzialmente diverse: ma nei circoli di bridge non è insolito che accada il corrispondente di quel che è stato celebrato da Bagnoli[9] al riguardo dei circoli scacchistici: ovvero il verificarsi a tavolino di sconfitte clamorose di giovani promesse "teoriche" per mano di vecchi giocatori da caffè del tutto digiuni di teoria. Questo può accadere però solo per la parte del "gioco della carta", mentre una partita di bridge inizia ben prima, al momento della dichiarazione. Su cento libri di bridge, novanta-cinque sono dedicati alla fase iniziale della partita, quella in cui le coppie si aggiudicano attraverso un'asta (licitazione) il diritto di "giocare" la mano con un determinato seme come atout e impegnandosi a fare un certo numero di prese. Pur essendo la licitazione dotata di un vocabolario molto limitato, intere biblioteche di testi e di metodi dichiarativi sono stati sviluppati e analizzati, e un buon giocatore di bridge al termine della dichiarazione ha una idea molto più che buona di come siano

---

[6] Il primo giocatore totalizza 90 punti, mentre il "giocatore perfetto" con i suoi dieci (più due) strike ne totalizza 300.

[7] Si può provare a tradurre "atout" con "briscola", nel senso che se un seme di atout è definito, allora quel seme è dominante sugli altri, e sono possibili le prese di "taglio". "Senza Atout" significa che tutti i semi hanno pari dignità.

[8] L'immagine squisitamente precisa e regionalistica (per la realizzazione della quale ci si è avvalsi della consulenza tecnica del redattore supremo d'una nota rivisita di matematica ricreativa) è resa necessaria dall'implicito regionalismo del vino citato. In ottica nazionale e sovraregionale, lasciamo ai lettori piena libertà di sostituzione del Barbera con il Sangiovese, il Greco di Tufo, il Valpolicella. Il Frascati o quant'altro, a patto che si prendano anche la briga di trovare i termini esatti per definire il "bicchiere da osteria" e relativo contenitore/misuratore della dionisiaca bevanda.

[9] Paolo Bagnoli, "Scacchi", Mursia

le carte del compagno, e spesso anche un'immagine precisa su quelle degli avversari. Il punteggio del bridge è costruito in modo da privilegiare sfacciatamente questa parte della partita rispetto a quella del puro gioco della carta: l'elemento base del punteggio è pur sempre la "presa", come in un gran numero di giochi di carte, ma una volta che una coppia di giocatori si è impegnata a fare un certo numero di prese, il meccanismo del punteggio tende a premiare al meglio la corretta previsione della fase dichiarativa: se si fanno più prese del previsto si ottengono comunque dei punti in premio, ma sono punti che contribuiscono in maniera minore degli altri alla vittoria finale; le penalità non sono simmetriche ai premi, e la punizione per il mancato mantenimento del contratto (ad esempio facendo una presa in meno del previsto) è sempre assai maggiore del premio che si ottiene facendo una presa in più. Portate agli estremi, le differenze raggiungono vertici eccelsi: tra fare un "grande slam" (tutte e 13 le prese) essendosi impegnati a farne solo sette, e "dichiarare e fare" il medesimo slam (magari "contrato" e "surcontrato"[10]) corre quasi la stessa differenza che c'è tra ottenere dei buoni sconto dell'ipermercato e vincere la lotteria di capodanno. È quindi di gran lunga conveniente saper valutare la potenzialità della smazzata, prima ancora che la prima carta tocchi il tavolo verde: e questo non serve che ce lo insegni l'amico bridgista, basta leggere la sezione "punteggio" del regolamento del gioco.

A differenza del calcio e del basket, che sono giochi a tempo fisso, alcuni sport definiscono la fine della gara solo a fronte del raggiungimento di un "punteggio fisso". Pallavolo e tennis sono due esempi eclatanti, e non a caso condividono il termine "set". E "set" significa "insieme, gruppo", e da qui nascono alcuni paradossi aritmetico-sportivi. Non è più riconoscibile il senso di "insieme" nel set della pallavolo, a meno che non si voglia forzarne il significato a "gruppo di scambi fino al raggiungimento da parte di una delle due squadre dei venticinque punti", ma nel tennis è ancora chiaro il concetto di "set di partite". La partita-game è molto ben definita: viene vinta dal primo giocatore che fa quattro punti con almeno due punti di vantaggio sull'altro. Una perversione vagamente snobistica fa sì che questi quattro punti si chiamino "quindici", "trenta", "quaranta" (e il quarto resta addirittura senza nome) anziché uno, due, tre e quattro, ma questo sembra solo un vezzo senza conseguenze dirette sul gioco[11]. Una "partita-game" di tennis è però davvero breve, quindi il "set" prevede che di partite se ne debbano vincere almeno sei; infine, visto che i tennisti sono notoriamente incontentabili, anche il set sembra troppo veloce, e l'incontro di tennis si gioca ormai al meglio dei tre o dei cinque set.

Si introduce insomma il concetto di "aggregazione dei punti" che contiene in nuce una sua caratteristica perversione. Immaginiamo che un ipotetico gioco nel quale i contendenti si disputino nove elementi, e che vinca chi riesce a prenderne di più: i punteggi possono variare dal 5 a 4 fino al 9 a 0. E supponiamo adesso che il "set" di questo gioco preveda 9 partite. Il conteggio non aggregato dei singoli punti può

[10] "Contre" e "Surcontre" sono elementi della dichiarazione che aumentano premi e le penalità del contratto in via di definizione durante la licitazione.

[11] Per quel che ne sappiamo, la ragione storica della strana denominazione dovrebbe dipendere dal fatto che "l'unità" del game tennistico veniva divisa in quattro quarti, e che, sumericamente, i primi tennisti immaginassero l'intero in notazione sessagesimale. I punti caratteristici dei quarti sarebbero diventati allora quindici, trenta, quarantacinque e sessanta, ma visto che tutti i game finiscono a sessanta il numero finale è presto caduto in disuso, perché i giudici si limitavano ad urlare "game" invece di un ridondante "sessanta-quindici". E sempre la pigrizia dei giudici di sedia sembra essere la caduta del "cinque" da "quarantacinque": in tutte le lingue tennisticamente evolute basta dire la decina (forty, quarante, quaranta) per essere compresi senza rischio di fraintendimenti con il quindici o il trenta, e si poteva pertanto risparmiare il fiato invece di dettagliare la sillaba finale (five, cinq, cinque). Perché non succede lo stesso con il quindici allora? Ovvio, perché in quasi tutte le lingue i numeri della seconda decina non seguono la regola standard "decina+unità", (venti-sette, cinquanta-tre), ma quella insolita "unità+decina" (cinque+dieci: quin-dici; fif-teen; etc.)

essere fortemente in disaccordo con il risultato ufficiale della partita. Il giocatore A può vincere l'incontro aggiudicandosi cinque partite e perdendone quattro; e magari vincendo ognuna delle cinque con lo scarto minimo (5-4). Il giocatore B, sconfitto, può d'altro canto aver vinto le sue quattro partite con altrettanti 9 a 0. In buona conclusione, degli "81 punti elementari" il vincente A se ne è aggiudicati solo 25 (30,86%), mentre i restanti 56 (69,14% del totale o, se preferite, il 224% di quelli fatti dal vincente) li ha segnati il perdente B. Il tennis ha le medesime caratteristiche, anche se il conteggio aritmetico teorico è inficiato dalla possibilità dei "vantaggi" e dei "tie-break": ma in fondo un gioco ha tutti i diritti di inventarsi le regole che più gli si confanno, e ai tennisti le cose stanno benissimo così come sono. L'abilità di un tennista si riconosce anche dalla sua capacità di capire se sia meglio "lasciar correre" un game al fine di risparmiare energie per un altro, o addirittura se sia il caso di smettere di lottare in un intero set per finirlo in fretta e poi scaricare tutto il potenziale residuo nel successivo. È un po' più imbarazzante quando lo stesso identico perverso meccanismo impatta sulle elezioni democratiche, facendo in modo che i voti singoli espressi dagli elettori "pesino" in maniera diversa l'uno dall'altro a causa della logica dell'aggregazione, fino a giungere all'elezione del candidato che ha ricevuto meno voti individuali. Ma i meccanismi elettorali nascondono perversioni anche maggiori, e per scoprire queste non possiamo far altro che rinviarvi a "La Matematica delle Elezioni"[12].

Tutti gli sport che si basano sulla velocità hanno come elemento numerico dominante la misura del tempo. In questo caso, l'aritmetica c'entra ben poco, ma può comunque rivelarsi interessante vedere come i vari sport considerino significativa l'unità di misura essenziale. Quando i cronometristi ufficiali delle gare di atletica erano ancora dei signori eleganti in spezzato bianco e blu, borsalino in testa e voluminoso cronometro manuale al collo, i tempi dei centometristi arrivavano ad essere definiti a meno del decimo di secondo. La prima volta[13] che venne abbattuto il muro dei "dieci secondi" nei cento metri piani si cominciò a ritenere importante determinare meglio i tempi, e infatti il primo record ufficialmente registrato con cronometraggio elettronico è di poco posteriore[14], anche se l'utilizzo diffuso dei cronometri elettronici si avrà solo tra gli anni Settanta e Ottanta. Anche se la decisione di arrivare al livello dei centesimi di secondo poteva a suo tempo sembrare fin eccessiva al grande pubblico, in realtà ci si sarebbe dovuto chiedere come fosse possibile accontentarsi dei decimi: i velocisti arrivano sulla linea del traguardo con velocità prossime ai 40 Km/h, il che significa che in un decimo di secondo divorano più di un metro, e nelle gare di questo tipo un metro è un abisso. Anche il centesimo di secondo rischia di apparire inadeguato, visto che tradotto in termini di spazio significa qualcosa attorno alla dozzina di centimetri, e non è casuale che adesso, anche se per l'omologazione dei record ci si limita a due cifre dopo la virgola, i fotofinish arrivino a precisioni ben maggiori.

E l'uomo è animale lento, in fondo. Una Williams e una Ferrari che si disputano affiancate il miglior ingresso in curva al fondo del rettilineo di Monza superano i 350 Km/h, e non stupisce che sugli schermi TV si vedano i tempi spingersi fino ai millesimi di secondo: a quelle velocità un millesimo di secondo significa sempre qualcosa dell'ordine della decina di centimetri, più o meno la dimensione di un alettone anteriore: spazio significativo, insomma, e non un puro vezzo dell'elettronica dei cronometri sponsorizzatori. Viceversa, per le regate in solitaria di

[12] Opera celeberrima del nostro GC. La trovate a puntate sui numeri 31, 33, 35 e 37 di RM, o direttamente e integralmente nel sito, nel Bookshelf.

[13] Jim Hines (USA), 20 Giugno 1968, Sacramento (California, USA): 9,9".

[14] Jim Hines (USA), 14 Ottobre 1968, Città del Messico (Messico): 9,95".

circumnavigazione del globo si stilano spesso ordini d'arrivo tralasciando di riportare le frazioni di ora, per ragioni opposte e analoghe.

In ogni caso, le corse (a piedi, cavallo, in acqua, in aria, con o senza motori) sono gare la cui lettura immediata è data più dalla meccanica dei fluidi che dalla matematica. La resistenza dell'aria disegna le carrozzerie delle automobili e delle motociclette, definisce le tattiche dei ciclisti e dei podisti; la resistenza dell'acqua inventa gli scafi delle barche e gli stili di nuoto dei nuotatori. Una tappa del giro d'Italia dell'inizio degli anni ottanta veniva pigramente raccontata dal telecronista, ma il sottoscritto ebbe la ventura di guardarla insieme ad un ciclista dilettante: la ripresa dall'alto mostrava un largo viale torinese, con il gruppo che viaggiava compatto in una delle due carreggiate, mentre nell'altra correva da solo Bernard Hinault, campione bretone di quei tempi. Non sembrava una scena particolarmente esaltante, visto che il traguardo era ancora relativamente lontano, ma l'amico seguiva la scena con passione da iniziato: "Guarda che roba! Viaggia in piena souplesse in parallelo al gruppo lanciato! È incredibile!". Per comprendere quanto fosse "incredibile" bisogna saper fare calcoli complessi di fluidodinamica, oppure fare qualche giro in bici in compagnia. Il concetto di "prendere la scia", che tra i ciclisti prende il nome più esplicito di "farsi tirare", è di per sé abbastanza evidente: se un ciclista si nasconde dietro al corridore davanti, fa meno fatica perché la resistenza dell'aria se la prende quasi tutta il primo. Ciò che è meno noto è la quantificazione di tale risparmio, che è davvero notevolissimo: il corridore dietro risparmia il 10%, 15%, anche il 20% delle energie, in funzione di altri parametri quali la velocità, la scorrevolezza della strada, e altro. Se viaggia "nella pancia del gruppo", il risparmio può arrivare al 40%; per questo l'amico ciclista dilettante era estasiato da una tale manifestazione di potenza. E continuò a raccontare tattiche e metodi di corsa, tutti basati sull'unico principio della riduzione della resistenza dell'aria: dal lavoro dei "treni" che tirano il velocista allo sprint finale, al senso dello "scatto" che tende a scrollarsi di dosso il ciclista che si sta facendo tirare, fino al "buco" fatto nella fila indiana lanciata nello sprint fatto appositamente da un compagno di squadra degli sprinter in testa al fine di tagliar via la fila di inseguitori dietro di sé. Anche per questa ragione, il "tempo" dei ciclisti a fine corsa viene considerato identico per tutti i ciclisti che arrivano nello stesso gruppo, anche se magari tra il ciclista in testa al gruppo e quello in coda passano dieci secondi d'orologio. Soprattutto, questo spiega per quale ragione le tappe "a cronometro" siano tanto importanti nell'economia di una corsa a tappe, e lunghe solo un quarto delle tappe normali: lì si è soli contro l'aria, che per i ciclisti è spessa come melassa.

Dove l'aritmetica ritorna alla grande è invece negli sport misti: biathlon, pentathlon, decathlon, mescolano gare di corsa con altri tipi di gare, e il calcolo dei punteggi assurge a fantasie regolamentari accessibili solo agli iniziati. Per valutare le dieci gare del decathlon, si usa come parametro base il record mondiale della disciplina singola, e si stabilisce un criterio che trasforma in punti la corrispondente prestazione del decatleta: i meccanismi precisi ci sono oscuri, e preferiamo non indagare troppo in merito. Biathlon e pentathlon moderno usano invece un criterio più fantasioso: lo sciatore del biathlon deve percorrere con il fucile in spalla una pista di fondo, e fermarsi di tanto in tanto in alcune piazzole dove farà del tiro a bersaglio. Deve tirare in fretta, perché alla fin fine la sua è pur sempre una corsa, ma deve anche sbagliare il meno possibile, perché se non colpisce in maniera appropriata i bersagli è tenuto a percorrere un tratto di pista supplementare: è insomma stabilita una "equivalenza" tra abilità nel tiro e lunghezza del percorso. Lo stesso principio è portato all'esasperazione dal pentathlon moderno: complice anche il fatto che le cinque discipline che lo compongono sono davvero variegate[15], per le prime quattro si stabilisce una qualche metrica che viene infine tradotta esplicitamente in "tempo": la prova finale è la corsa, e il primo della classifica parziale viene fatto partire per primo: dietro di lui partono ad uno ad uno gli altri, ognuno separato dal "tempo di distacco" calcolato sulla base degli esiti delle prime quattro prove. Il pubblico ha così la possibilità di capire chi ha effettivamente vinto la gara direttamente, perché l'ordine di arrivo globale coincide con l'ordine d'arrivo della corsa finale.

Dal punto di vista matematico, comunque, le fantasie migliori si hanno nella redazione delle classifiche: una volta acquisito e archiviato il risultato d'una gara, trasformare l'insieme dei risultati in una classifica di merito può nuovamente impattare in maniera sensibile sull'aspetto strategico dello sport. I giornali sportivi italiani parlano ancora dell' "epoca dei tre punti a vittoria[16]", perché disincentivare il pareggio declassandolo ad "un terzo di vittoria", anziché alla metà com'era in precedenza, ha effettivamente cambiato radicalmente l'assetto delle squadre in campo. Sempre restando negli sport di maggior richiamo, la Ferrari di questi anni può ragionevolmente vantarsi di aver causato il cambiamento dell'attribuzione dei punti dei Gran Premi di Formula Uno, che è stato variata appositamente per rendere la vita più difficile alle vetture che hanno un eccesso di supremazia tecnica.

Bridge e scacchi, forse perché hanno la nomea di "sport intellettuali", si lanciano in alcuni virtuosismi matematici ancor più sofisticati. Una volta appreso (e s'è visto che non è cosa facile per il neofita) come calcolare il risultato d'una partita di bridge, si è comunque ancora ben lontani dal capire come vengano valutati gli incontri ufficiali dei campionati: è d'uopo premettere che, pur essendo una smazzata di bridge virtuosamente casuale, la disparità delle carte in mano ai giocatori deve innanzitutto essere annullata con il meccanismo del "duplicato". Il principio è semplice e applicabile a tutti i giochi di carte: due coppie si affrontano al tavolo verde di una "sala chiusa" (diciamo Italia e USA, per celebrare gli anni d'oro del Blue Team[17] e per fare la rima) con una smazzata qualsiasi. La distribuzione iniziale delle cinquanta-due carte viene registrata, e successivamente la medesima smazzata viene giocata (in una "sala aperta", piena di spettatori paganti) da altre due coppie delle stesse nazionali: solo che adesso agli italiani toccheranno le carte che prima avevano gli americani, e viceversa. Quindi, se la distribuzione è tale che realizzare un grande slam è facile facile, è inevitabile che lo faranno prima gli uni e poi gli altri, e il totale della mano è un bel nulla di fatto: ma, più probabilmente, ai due tavoli si arriverà a dichiarazioni e realizzazioni diverse, e su queste differenze si giocano tutti i tornei. Bisogna quindi trasformare lo "score" naturale del bridge in "punti partita" (Match

[15] Nell'ordine: Equitazione, Tiro con la pistola, Scherma, Nuoto e Corsa Campestre. È l'unico sport "inventato" dal CIO appositamente per le Olimpiadi, e per precisa volontà del barone De Coubertin, che voleva affiancare al Decathlon classico uno sport atto a definire il perfetto "sportivo moderno". Gli sport inclusi sono tutti più o meno marziali, e non è chiaro se la leggenda che paragona il pentathlon all'ipotetica e eroica "missione del portaordini" sia davvero una causa della genesi dello sport, o costruita a posteriori. L'idea è quella di un corriere a cavallo che deve superare le linee nemiche per ricongiungersi al suo corpo, al quale venga abbattuto il destriero: si difende accanitamente con la pistola e la spada, riesce a trovare la via di fuga attraversando a nuoto un fiume e ad arrivare sano e salvo al reggimento con una conclusiva corsa per i campi. Idea romantica, che poco romanticamente sta morendo: a dimostrazione di quanto conti la televisione ai nostri tempi, le Olimpiadi hanno eliminato dal programma l'unico sport inventato appositamente per le Olimpiadi, perché i tempi del Pentathlon sono troppo poco "televisivi".

[16] Nel calcio, beninteso. Del resto, i "giornali sportivi italiani" parlano solo di quello.

[17] Il Blue Team era la squadra nazionale italiana di bridge negli anni Cinquanta e Sessanta. Rappresentava una federazione nazionale di circa quattromila tesserati, e giocava contro quelle ricchissime e numerosissime di paesi come il Regno Unito, Francia e, soprattutto, USA (circa venti milioni di tesserati). In quegli anni vinse 13 Campionati del Mondo, 3 Olimpiadi e 12 Campionati d'Europa.

Points, MP) o "punti vittoria" (Victory Points, VP), e vi promettiamo solennemente che quando scopriremo come questo avviene, ve lo faremo sapere[18].

Gli scacchisti, forse perché sono molti i matematici cui piacciono gli scacchi, partono da una logica molto semplice per assurgere poi a vette di complessità. La semplicità traspare dal fatto che non sono spaventati dai seminteri, che invece sembrano terrorizzare molte federazioni sportive: una partita a scacchi si può vincere, perdere o pareggiare, e da sempre gli scacchisti attribuiscono un punto per la vittoria, zero per la sconfitta, e un logicissimo ½ per la patta. Le classifiche di torneo sono quindi facilmente compilabili, ma, tornei a parte, agli scacchisti è sempre piaciuta l'idea di quantificare la forza di un giocatore, più ancora che la sua transitoria posizione finale dei singoli tornei. Questa valutazione di "forza assoluta" si è poi estesa anche ad altri sport (esistono classifiche dei giocatori di tennis, dei migliori ciclisti, e così via) ma ci sembra che gli scacchisti siano stati i primi a formalizzare il sistema grazie agli sforzi del professor Arpad Elo. Il sistema che dal nome dell'inventore prende il nome di "punteggio Elo", definisce con buona approssimazione il livello dello scacchista, e rende facile orientarsi anche tra sconosciuti. Se un 1900 incontra un 2200, sa bene di non avere molte probabilità di vittoria e si impegnerà con una concentrazione ben diversa di quella che produrrà contro un novello 1300. I calcoli che determinano il punteggio finale di ogni giocatore non sono semplicissimi, ma il principio informatore che vi sottende lo è: quando un certo numero di giocatori si iscrive ad un torneo si calcola la "forza media" del torneo medesimo, e si stabilisce quale sia il "risultato atteso" di ogni singolo giocatore: dopodiché si confronta il risultato ottenuto con quello atteso, e ogni giocatore assumerà, alla fine del torneo, un nuovo personale punteggio Elo: inutile dire che il nuovo punteggio sarà tanto maggiore (minore) del precedente quanto migliore (peggiore) il risultato reale è stato rispetto al risultato atteso. Se vi è capitato di vedere la pubblicità di scacchiere elettroniche o programmi di scacchi che portano, oltre al nome, anche un numero superiore al 2000[19], non è il nuovo millennio, che stanno celebrando: stanno piuttosto dichiarando la "forza" del programma di gioco. Al momento, il sito ufficiale della FIDE (Fédération Internationale Des Echecs) riporta per il più forte giocatore del mondo (Garry Kasparov) il punteggio Elo di 2831[20]; è seguito da Vladimir Kramnik con 2777 e da Viswanathan Anand con 2766. È poi una gran bella soddisfazione leggere il punteggio dell'ottavo in classifica, con un bottino di 2728 punti Elo: appartiene all'ungherese Judit Polgar, e ci sembra che mai una donna sia arrivata così in alto in classifica, fino ad ora.

Il fatto che un sistema di calcolo sia complicato non garantisce però che sia anche a prova d'errore. Alcuni difetti il sistema Elo li ha per propria natura: intende dare una valutazione universale, ma ha ovviamente un problema di condizioni iniziali. Supponiamo di avere due circoli scacchistici indipendenti e separati in cui si inizi ad usare il sistema Elo; dopo un certo numero di tornei il sistema riporterà fedelmente la distribuzione di forza all'interno di ognuno dei due circoli, ma nulla saprà dire sulla forza relativa: il giocatore più forte del circolo A può esibire uno splendido 2300 e essere sonoramente battuto dal misero 1600 del circolo B, specialmente se, per fluttuazione statistica, il circolo A fosse composto tutto da volgari schiappe e il circolo B raccogliesse accidentalmente i migliori eredi di Alekhine e Capablanca. Non per niente il regolamento internazionale adesso prevede che il "punteggio di ingresso" di

[18] In realtà, la regola non è troppo complessa: gli IMP (International Match Points) sono suppergiù ottenuti dividendo la differenza del punteggio naturale (rubber) tra le coppie, dividendo per 40, e arrotondando all'intero superiore. Centotrenta rubber-point corrispondono insomma a quattro IMPs.

[19] Non troppi anni fa andava per la maggiore un programma per PC che si chiamava ChessMaster 2100, tanto per dirne uno.

[20] La classifica è aggiornata ai risultati di Gennaio 2004.

un nuovo giocatore ancora non classificato sia calcolato solo dopo che questi abbia disputato almeno nove partite ufficiali con altrettanti giocatori dotati di punteggio Elo ufficiale[21]. Un altro difetto è nascosto nella logistica di calcolo: la situazione ideale si avrebbe se, istantaneamente alla fine di ogni torneo, il giocatore acquisisse il suo nuovo Elo; in pratica, questo non accade quasi mai, perché l'attribuzione del punteggio è comunque un processo formale attuato dalle Federazioni che spesso, per problemi burocratici, aggiornano le classifiche solo periodicamente. In Italia diventò famoso il caso di un giocatore che, pur non trovandosi nelle primissime posizioni della classifica nazionale, decise di mostrare i difetti di un così poco frequente sistema di aggiornamento delle classifiche. Fece in modo di trovarsi con un punteggio ragionevolmente basso al momento di uno dei lenti aggiornamenti ufficiali, poi si scatenò iscrivendosi ad un gran numero di tornei e cercando di fare le migliori prestazioni possibili: non essendoci l'aggiornamento "istantaneo", i nuovi punti guadagnati ad ogni torneo disputato non inficiavano il suo "risultato atteso", e di fatto si cumulavano positivamente nel suo carniere senza fare da "contrappeso" nel risultato atteso dei tornei successivi. Sottoponendosi a sei mesi di tour de force (l'aggiornamento delle classifiche era semestrale), attese infine l'ufficializzazione della nuova classifica che, tra lo stupore generale, gli attribuiva un Elo non troppo distante da quello di Karpov (e ampiamente maggiore di qualsiasi altro giocatore italiano). La cosa fece molto rumore e suscitò scandalo, anche se il giocatore in questione aveva fin dall'inizio palesato che sua intenzione era proprio denunciare la debolezza del sistema, e non quella di approfittare della debolezza stessa. Per conto nostro siamo assolutamente convinti della sua buona fede, ma le malelingue potrebbero considerare il nostro giudizio di parte, visto che il protagonista è uno dei più vecchi lettori di RM[22], al quale siamo affezionati.

Questa disamina sembrerebbe confermare un luogo comune: gli sport più popolari sembrano essere anche quelli "meno sofisticati" dal punto di vista dell'aritmetica dei conteggi: una cosa complicata come il sistema Elo sembrerebbe difficilmente adatta a suscitare i commenti che ogni lunedì mattina si accavallano nei bar e negli uffici. In fondo, ai grandi calciatori si chiede, al massimo, di fare da testimonial per il CEPU, e solo se sono sufficientemente famosi come lo sono gli attaccanti della nazionale italiana. Nessuno si aspetta da un terzino che sia in grado di dare una bella dimostrazione del teorema di Pitagora, e meno che mai che un mediano sia in grado di capire la Zeta di Riemann.

Ma i luoghi comuni sono assai pericolosi[23].

[21] Per orientarsi un po' sul senso "assoluto" dell'Elo esiste una regoletta (che peraltro vi forniamo solo a beneficio d'inventario, visto che la ricordiamo a memoria e non potremmo giurare sulla sua esattezza, né empirica né matematica) che afferma che un giocatore ha probabilità 0,01 di battere un giocatore che lo supera di 400 punti Elo. Visto che la stima grossolana dei giocatori inclassificati, secondo alcuni, è di circa 1200 (che alcuni Circoli attribuiscono d'ufficio, per semplificarsi la vita, ai nuovi adepti), questo significherebbe che, se avete appena finito di imparare come funziona la presa en-passant e quale differenza ci sia tra arrocco lungo e arrocco corto, avete già circa una probabilità contro cento milioni di battere Kasparov.

[22] Ciao, Bob!

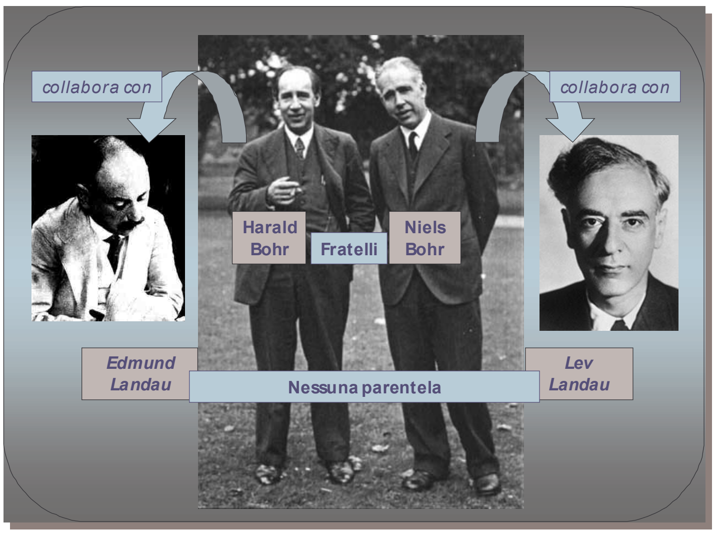
[23] A dimostrazione della pericolosità dei luoghi comuni, potreste mettervi immediatamente alla prova. Quando avete letto di Judit Polgar, nelle righe appena precedenti, dovreste aver innescato nella vostra immaginazione l'archetipo della "donna scacchista", e questo è assai frequentemente legato all'immagine di donna anziana, bruttina, e magari anche un po' rugosa e noiosa. Adesso potreste fare una ricerca sul web d'una sua foto, e confrontare l'archetipo con il fenotipo. Se non vi basta, cercate anche sotto "Kosteniuk, Alexandra", che per un certo periodo è stata vicecampionessa mondiale (dietro Judit, naturalmente).

Il mediano della nazionale danese che massacrò la Francia nel 1908 si chiamava Harald, e faceva davvero onore al numero "quattro" che portava sulla schiena. Fu presente come titolare a tutte le partite della sua nazionale durante l'avventura olimpica, e ci immaginiamo facilmente una sua ripetuta serie di contrasti contro i "bianchi" d'Inghilterra, durante la finalissima al White City. Il suo ruolo è stato di recente celebrato da una famosa canzone di Ligabue, che tende ad esaltare il ruolo naturalmente umile del mediano "che segna sempre poco", e Harald non segnò infatti la decina di gol del suo compagno di squadra Nielsen: ma in un turno preliminare di quel torneo (contro la Francia B: risultato finale Danimarca nove Francia B zero) mise comunque la sua firma su una doppietta. Uno sportivo a tutto tondo; nel 1908 aveva solo ventun anni, ed era già una celebrità nazionale: quando nel 1910 arrivò alla laurea, l'aula magna traboccava di tifosi di calcio che inneggiavano alla nuova conquista del loro beniamino, e se si volesse continuare a tutti i costi a restare appigliati al luogo comune, verrebbe naturale immaginarsi che il titolo accademico fosse stato conseguito essenzialmente per "meriti sportivi", come talvolta avviene nei college americani. Ma non era così: le prime avvisaglie dell'eccezionalità dell'evento potrebbero già mostrarsi nel fatto che la squadra di club nella quale Harald militava aveva l'insolito nome di "Accademici", quasi a palesare che l'aria universitaria veniva regolarmente respirata dal nostro. La certezza dell'eccezionalità arriva leggendo il nome completo che campeggiava sul diploma di laurea: Harald August Bohr. E Bohr significa leggenda, nel mondo accademico danese.

Christian Bohr, padre di Harald, era un celebre fisiologo che aveva una meritata cattedra all'Università di Copenhagen. Aage Bohr (nipote di Harald) non era ancora nato nel 1910, visto che venne alla luce solo nel 1922: diventò scienziato abbastanza bravo e famoso da vincere il Premio Nobel per la Fisica nel 1975 per i suoi studi sul moto singolo e di gruppo dei nucleoni; ma, per quanto bravo e celebre un Nobel possa essere, ad Aage fu sempre negata la soddisfazione di essere il "miglior fisico della famiglia", visto che era il quarto figlio di Niels Bohr, uno dei più grandi fisici di tutti i tempi.

Harald August nacque il 22 Aprile 1877, ed era pertanto il fratello minore di Niels, che aveva fatto il suo ingresso in questa valle di lacrime nel 1875: ma non c'è dubbio che nel 1908, e forse ancora nel 1910, egli fosse più celebre del suo augusto fratello. I due erano separati solo da un anno e mezzo, e andavano insieme all'università: a dimostrazione di quanto sia importante "l'ambiente", sia accademico sia familiare, basti pensare che il padre della fisica moderna non aveva a Copenhagen alcun laboratorio di fisica ove effettuare degli esperimenti, ma Niels ed Harald lavoravano insieme nel laboratorio di fisiologia del padre Christian, e qui Niels portò a termine il suo primo esperimento, dettandone la relazione ad Harald. I due fratelli erano noti come "gli inseparabili", ed è arrivato fino a noi il commento di un loro studente: *"Quei due sono inseparabili. Non ho mai conosciuto persone vicine quanto loro due".* Nel 1910, comunque, mentre Harald si laureava in matematica tra i cori da stadio della tifoseria danese presente, Niels non era ancora una celebrità: certo, proprio per quell'esperimento rabberciato in famiglia aveva vinto la medaglia d'oro della Regia Accademia di Danimarca del 1906; certo, aveva ottenuto il master nel 1909, ma fu soltanto nel 1911 che partì alla volta del laboratorio di J.J. Thomson, in quel di Cambridge: ed è lì che nasce la sua leggenda di "creatore dell'atomo". Nel frattempo, Harald è già diventato una stella di prima grandezza dello sport di Danimarca.

In una famiglia piena di fisici e fisiologi, Harald sceglie invece la matematica, per divertirsi quando non indossa le scarpe coi tacchetti da calciatore. La sua tesi di laurea verte sulle serie di Dirichlet, e, intrapresa la carriera accademica, comincia prestissimo una fattiva collaborazione con Edmund Landau, matematico e ricercatore dell'università di Gottingen. È curioso notare come, nei primi anni della loro carriera di studiosi, entrambi i fratelli prendano di petto i temi più importanti delle rispettive discipline. Niels costruisce il primo modello quantistico dell'atomo introducendo la quantizzazione degli orbitali elettronici, definendo così la direzione della fisica di tutto il ventesimo secolo: quasi a non voler essere da meno, Harald affronta il problema matematico per eccellenza dei suoi (e nostri) tempi, la Zeta di Riemann. La fama del fratello maggiore, il fisico che è indubbiamente pienamente riuscito nella sua impresa intellettuale, tende a posteriori ad oscurare i risultati di Harald, matematico e fratello minore. Ma si rischia di essere ingiusti: in fondo, l'atomo di Bohr è solo una prima (per quanto fondamentale) approssimazione del modello atomico quantistico, che verrà poi affinato da Sommerfeld e da molti altri: fornisce buone approssimazioni solo per gli atomi idrogenoidi, e se è tanto importante lo è per la rivoluzione concettuale che introduce nella fisica, non per i risultati numerici. Da questo punto di vista, la fisica è più clemente e generosa della matematica: un "passo avanti nella comprensione" può essere (e giustamente) considerato comunque di fondamentale importanza, anche perché il fine ultimo della ricerca fisica (la spiegazione del "tutto") è palesemente ambizioso. In matematica, invece, se si affronta un teorema sembra che non si sfugga da una logica ancora fondamentalmente binaria: o lo si dimostra (o si dimostra che è falso, o che non è dimostrabile: insomma, lo si razionalizza in qualche maniera) oppure no. E se la Zeta di Riemann è ancora croce e delizia dei matematici del ventunesimo secolo, questo basta a far dire che Harald Bohr non è pienamente riuscito nel suo intento. È una conclusione crudele: quello che Bohr e Landau fecero nel 1914 è infatti la quasi totale riduzione della Zeta di Riemann con conseguente "quasi dimostrazione" dell'ipotesi riemanniana: il lavoro di Bohr e Landau si conclude con la frase *"Tutti gli zeri della funzione Zeta, a meno di una infinitesima parte, giacciono in un piccolo intorno della linea s=½"*. L'"infinitesima parte" toglie a Landau e a Harald Bohr l'immortalità nell'empireo della matematica: ma quasi tutto quello che è al di fuori di quella "infinitesima parte" è opera loro.



Ci sia consentito un minimo di auto-commiserazione, a questo punto della storia: chiunque abbia letto "Cent'anni di solitudine", di Gabriel Garcia Marquez, sa che cosa significhi muoversi in un mare di omonimi. Nel tentare di raccontare qualche cenno biografico di Harald Bohr, è automatico mettere in conto qualche possibile confusione, visto che cotanto cognome è stato onorato da innumerevoli personaggi: scagli la prima pietra chi riesce a distinguere al primo colpo tutti i Bernoulli. Ma non è facile immaginare che a ciò si possano aggiungere ulteriori elementi di disturbo: una delle maggiori glorie di Bohr (il fisico) consiste nella fondazione di quella che sarà chiamata "la scuola di Copenhagen", la maggiore istituzione per la fisica teorica del suo tempo. Grazie ai fondi della birra Carlsberg[24], la scuola di Bohr formò tutti (quasi senza eccezione) i maggiori fisici quantistici degli Anni Venti e Trenta. Tra questi, Lev Landau: un Landau fisico era insomma ben correlato ad un Bohr fisico, tanto quanto un Landau matematico era correlato ad un Bohr matematico. Il binomio Bohr/Landau scatena quindi connessioni immediate in chi ha una formazione fisica, e quelle connessioni si dirigono indubbiamente verso la coppia Niels/Lev. È assai probabile[25] che, per contro, chi possiede una formazione matematica abbia invece la diversa connessione Harald/Edmund, quando sentire nominare i due cognomi accoppiati. Infine, fisica e matematica sono da tempo immemorabile sorelle gemelle e quasi siamesi, se l'unica frase celebre di Lev Landau (il fisico) a noi giunta recita: *"Noi* matematici *siamo tutti un po' matti"*. Se vi sembra che stiamo cercando accampando delle scuse non richieste[26], fate bene a sospettare: nel compleanno di Emmy Noether[27], il vostro stimato cronista attribuì erroneamente una frase di Edmund Landau a Lev Landau.

Quel che più ci preme è però rammentare di evitare i luoghi comuni. Harald Bohr per molti aspetti fece davvero "una vita da mediano", probabilmente oscurato nella fama e negli onori dal più famoso fratello Niels: ma la fece davvero anche sui campi di calcio, entrando in scivolata contro gli attaccanti più forti del mondo. Alternava dribbling a teorie matematiche complesse, e se fosse già stata inventata[28], è quasi certo che la Medaglia Fields non gliel'avrebbe tolta nessuno; mamma Ellen avrebbe potuto metterla in bella vista vicino al Nobel di Niels sul caminetto.

Invece della Fields, Harald portò a casa la Medaglia Olimpica d'argento, in un bel giorno del 1908: e se della Medaglia Fields, del premio Wolf, del nuovo premio Abel sono molti i matematici che possono mostrarne una copia, non ci risulta esista un altro matematico che possa vantare un podio alle Olimpiadi.

---

[24] "Probably, the best beer in the world", come quantisticamente recita la pubblicità.

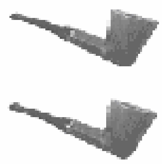
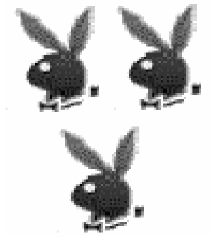
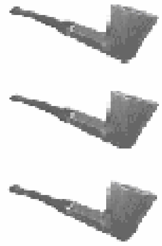
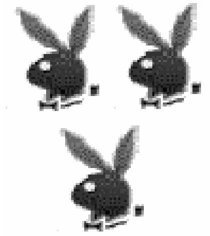
[25] Diciamo "probabile" e non "sicuro" per il semplice fatto che noi apparteniamo alla prima classe, quella di formazione fisica, e non possiamo assicurare che accada quel che qui diciamo potrebbe accadere nelle teste dei matematici.

[26] "Excusatio non petita, accusatio manifesta", diceva qualcuno nei tempi andati.

[27] "Questione di attributi", RM050, marzo 2003.

[28] La prima medaglia Fields è stata attribuita nel 1936.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Questa volta tocca alla tovaglia (di RM)			
Solidarietà ad Alberto!			

2.1 Questa volta tocca alla tovaglia (di RM)

...Non sappiamo quanti di voi alla lettura del problema sulla saliera siano stati colti da un brivido alla frase "la tovaglia ve la vendiamo il mese prossimo". Si trattava di un messaggio steganografico, comprensibile solo dagli addetti ai lavori, i quali si saranno affrettati a festeggiare; bene, vorremmo rendervi partecipi di questa gioia[29].

A breve (anche perché Rudy è quasi senza tabacco) si svolgerà il Comitato di Redazione di una prestigiosa rivista di matematica. Ora, alcuni di voi hanno scoperto a proprie spese che talvolta a queste riunioni è invitato un JAFO (no, non vi diciamo cosa vuol dire: andate a rivedervi *Tuono Blu*, se non lo sapete); il JAFO diventa, per la durata del Comitato di Redazione, un quasi-redattore; infatti ha tutti i diritti degli altri Redattori, con la sola esclusione di quelli di voto e di parola: in sostanza, ha il diritto di offrire giri di birra agli altri Redattori, sedersi al loro tavolo e occupare un quarto del medesimo.

Però tre eventi che, come al solito, sembrano non c'entrare niente l'uno con l'altro, causano un piccolo problema.

Tanto per cominciare, sapete che Doc si agita quando parla; per la sicurezza dei nostri nasi ed occhiali, quindi, lo spazio a disposizione di ogni partecipante deve essere il maggiore possibile.

Inoltre, le tovaglie di RM (quadrate e di lato ***1***) sono in numero esattamente pari alle magliette, ossia ***tre***.

Infine, il tavolo lo vorremmo quadrato, in modo da mettere un Redattore o quasi-redattore per lato.

Ecco, il problema che abbiamo è: con queste tre tovaglie, *qual è il più grande tavolo quadrato che potete coprire*? Ammesse sovrapposizioni tra le tovaglie e debordi dal tavolo disuguali o come vi pare; vietato (eresia!) produrre un'altra maglietta/tovaglia.

[29] Confiniamo la semplice realtà in una nota a piè pagina: avevamo un bel problema, da un libro; purtroppo, veniva fornita solo la risposta. La soluzione abbiamo dovuto ricavarcela e tra una cosa e l'altra l'abbiamo tirata lunga per tre anni. *Nota per i curiosi*: il libro è la raccolta di problemi di Loyd curati da Gardner.

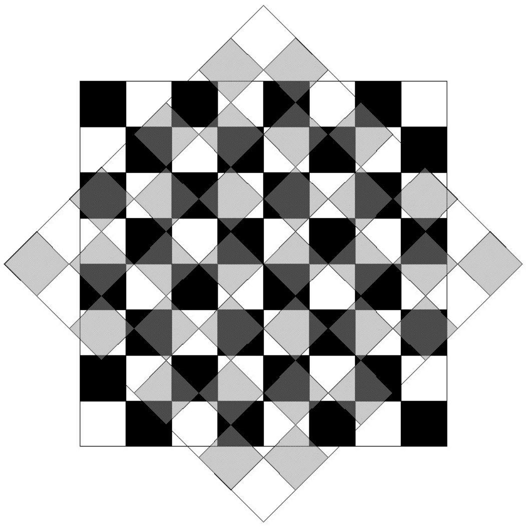
2.2 Solidarietà ad Alberto!

*Vi diciamo subito che questo doveva essere un Bungee Jumpers; poi, abbiamo trovato un'ambientazione (***vera***; se leggete il seguito capirete che avremmo preferito non trovarla) e, siccome vi lamentavate che da un po' di tempo i problemi erano troppo facili, l'abbiamo messo qui.*

Alberto chiede la vostra solidarietà in merito ad un increscioso episodio realmente accaduto il mese scorso.

> Come sanno tutti quelli che almeno leggono i problemi di RM, Alberto è in prima media; siccome nel 2006 (oltre a quelle invernali) a Torino ci saranno le Olimpiadi Scacchistiche, sono iniziati nella città una serie di corsi e tornei di scacchi; Alberto si è iscritto ad un corso ad ottobre e verso gennaio sono iniziate le selezioni nella sua scuola (una quarantina di giocatori) per il torneo comunale riservato ai ragazzi delle medie. La squadra della scuola sarebbe stata formata dai primi nove classificati (più una riserva).
>
> Risultato finale: Alberto si è piazzato nono, a pari merito con altri due ragazzi. A questo punto l'insegnante ha deciso che, *siccome gli altri due erano di terza e l'anno prossimo non avrebbero potuto partecipare*, Alberto sarebbe rimasto fuori. Ma a voi, pare giusto???

Capite che, a questo punto, il Nostro si è un po' disamorato degli scacchi (tranquilli, per metà aprile gli passa), e quindi le due scacchiere di famiglia (rigorosamente uguali) giacciono impilate sul tavolino. Il che, mi ha fatto pensare...



Supponiamo di mettere le due scacchiere una sopra l'altra, e poi di ruotare quella superiore di quarantacinque gradi; secondo voi, qual è l'area coperta dal nero di *entrambe* le scacchiere?

Insomma, un "AND" tra scacchiere...

Per evitare che facciate arrabbiare Doc con le "evidenti ragioni di simmetria", vi facciamo un disegnino, come se la scacchiera superiore fosse semitrasparente; quello che vi chiediamo, è l'area che nel disegno risulta in "grigio intermedio", dove i due neri si sovrappongono. Un filino più complicato di quel che sembra, oseremmo dire.

3. Bungee Jumpers

Quante cifre ha 2^{100} ?

Lo so anch'io che con i logaritmi ci vuole un attimo. Ma c'è un metodo più bello.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

2004-02-29 01:06	Torkitorio - [061] – 1 e 2
2004-03-01 10:09	Zar - [062] – Q&D
2004-03-01 10:15	Last Duke - [062] – 1
2004-03-01 15:35	Zar - [062] – 1

2004-03-01 15:47	Last Duke - [062] – 2	
2004-03-01 22:48	Zar - [062] – 1	...la figura...
2004-03-02 10:48	Gigia - [062] – 1	
2004-03-04 09:41	GaS - [062] – 1	
2004-03-04 18:15	L.A.Bachevskij - [062] – 1 e 2	
2004-03-05 09:58	Giorgino - [062] – 1	
2004-03-05 16:04	Last Duke - [059] – 1	...la prima parte, annunciata il 4/3
2004-03-08 13:15	GaS - [062] – 2	
2004-03-08 16:11	Last Duke - [059] – 1	...la seconda parte
2004-03-09 15:29	Last Duke - [051] – 1	
2004-03-22 19:44	Caronte - [061] –1, [062]–BJ	

E di sicuro anche questa volta ne abbiamo persa qualcuna verso la fine, ma la Redazione potrebbe decidere di menzionare i ritardatari il mese prossimo. Stranamente, dopo un buon inizio di mese in cui avete riempito la nostra casella di posta, non si sono più viste soluzioni dopo la seconda settimana di marzo... la primavera avrà colpito?

Prima di andare a cominciare una scusa non richiesta: ci siamo dimenticati l'allonimo di Andrea (Last Duke) e visto che anche lui è ingegnere mi sa che non ci resta che chiedere all'altro Andrea di trovarsi un allonimo. Andiamo a cominciare.

4.1 [059]

4.1.1 Tre Dadi Duri

Dopo tanto insistere, finalmente qualcuno si è dato da fare per risolvere il problema come voleva il GC. Trattasi del nostro **Last Duke**. La riportiamo integralmente, permettendoci solo di riformattare per motivi di spazio. Se qualcuno ha voglia di trovarci degli errori faccia pure: a noi è sembrata corretta, persino il Capo era entusiasta.

> **Premessa**
>
> Proprio oggi mi è venuta una illuminazione per la soluzione del problema dei tre dadi duri. Devo premettere che avevo capito male il regolamento del gioco, e pensavo che dopo i due lanci del banco potevo scegliere se scartare un dado e far rilanciare il banco oppure no. A questo punto lanciavo io e se ottenevo un risultato compreso tra i due valori del banco vincevo, altrimenti perdevo.
>
> Invece non era così.
>
> **I tre casi di scelta del numero**
>
> Andiamo a vedere in quali casi si sceglie un numero piuttosto che un altro.
>
> Si è detto (Rudi Mathematici, n.061) che la strategia migliore è quella di dividere il segmento tra 1 e n in tre parti, in base ai due numeri del banco, ed osservare l'intervallo di ampiezza maggiore.
>
> - Se è quello limitato superiormente dal numero inferiore, scelgo il numero inferiore e faccio rilanciare il banco.
> - Se è quello limitato dai due numeri, scelgo il terzo.
> - Se è quello limitato inferiormente dal numero superiore, scelgo il numero superiore e faccio rilanciare il banco.

Come strategia mi sembra semplice e vincente. Resta da capire come fare i conti. Andiamo a vedere le probabilità di vincere, supponendo che io mi trovi in uno dei tre casi (che chiameremo A, B e C). Chiamo le probabilità p_A, p_B e p_C rispettivamente. Chiamo x il numero inferiore e y quello superiore. Indico inoltre con n le facce del dado.

Nel primo caso la probabilità di vincere è ovviamente: $p_A = \frac{x-1}{n}$

(ricordiamo che si vince solo se il nostro valore è <u>strettamente compreso</u> tra gli altri due, quindi l'intervallo è ampio x-1 e non x. Su questo punto mi ero inizialmente confuso).

Nel secondo caso è: $p_B = \frac{y-x-1}{n}$

Nel terzo, infine, sarà: $p_C = \frac{n-y}{n}$

E fino a qua, nulla di difficile. Il difficile comincia ora.

Come fare a capire, con una formula generale, quando scegliere un numero piuttosto che un altro

Cerchiamo di capire a quali condizioni matematiche devono soddisfare i numeri x e y affinché si ricada in uno dei tre casi elencati sopra.

Si è detto che l'intervallo (inferiore, superiore o centrale rispettivamente) deve essere maggiore (o al limite uguale) degli altri due. Quindi:

Nel caso A: $\begin{cases} x-1 \geq y-x-1 \\ x-1 \geq n-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 2x \\ y \geq n-x+1 \end{cases}$

Nel caso B: $\begin{cases} y-x-1 \geq x-1 \\ y-x-1 \geq n-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ y \geq \frac{n+x+1}{2} \end{cases}$

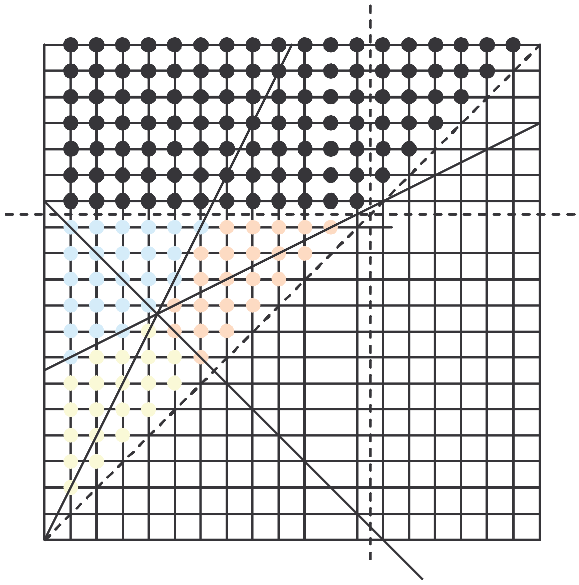
Nel caso C: $\begin{cases} n-y \geq x-1 \\ n-y \geq y-x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq n-x+1 \\ y \leq \frac{n+x+1}{2} \end{cases}$

Bene. Se ora il piano dei possibili risultati fosse stato un continuo, non ci sarebbero stati problemi a calcolare le somme di tutti i termini di probabilità al variare di x e y tra tutti i valori possibili. Ma purtroppo non è così, e per capirci qualcosa ho fatto un disegnino.

Approccio grafico per l'individuazione degli intervalli di variabilità di *x* e *y* al variare di *n* (nei tre casi).

Intanto osserviamo che se x=y sicuramente non vinco, dal momento che uno dei tre numeri non potrà mai essere strettamente compreso tra gli altri due.

Per i restanti casi, la situazione è simmetrica se x è il numero inferiore o quello superiore. Quindi ipotizzo che x sia il numero inferiore e y quello superiore. Così considererò la metà dei casi, e poi raddoppierò il risultato. La cosa va benissimo, in quanto i casi x=y, che rovinerebbero questo approccio, danno probabilità di vittoria 0 e quindi anche se (erroneamente) li raddoppio non sbaglio.



Nel grafico a fianco, disegnato per n=12, sono indicate con un pallino tutte le combinazioni di x e y che possono essere estratte.

In particolare:

- sono disegnate con un pallino nero le combinazioni (x, y) che non ci interessano (fuori dal range di variabilità di x e y, che ovviamente è in questo caso da 1 a 12)
- non sono disegnati i pallini in cui x=y per il motivo sopra elencato (danno probabilità di vittoria nulla)
- non sono disegnati i pallini simmetrici rispetto alla diagonale, anche questo per il motivo sopra elencato (la situazione è simmetrica e basta raddoppiare il risultato).
- sono con un pallino salmone le combinazioni che ricadono nel caso A
- sono con un pallino celeste le combinazioni che ricadono nel caso B
- sono con un pallino giallo le combinazioni che ricadono nel caso C

Il punto di intersezione delle tre rette è a (n/3; 2n/3). Ed inoltre i due punti di intersezione J e K hanno coordinate (0;(n+1)/2) e (n/2;n) rispettivamente.

Giocando un po' con questo grafico, variando la n, si è visto che, dal momento che è necessario ottenere valori interi per le variabilità di x e y, bisogna differenziare i casi modulo 6.

Poi, per calcolare le somme delle probabilità condizionate al singolo evento di estrazione (x, y) al variare appunto di x e y, vediamo tra quali valori può variare y al variare di x. Ed in particolare, dividiamo ogni area in due sottoaree con una retta verticale che passa per l'intersezione delle tre rette (per le aree B e C) oppure per il punto K (per l'area A).

Un'ultima osservazione: alcuni punti possono appartenere a due o più aree (quelli che giacciono proprio sulle tre rette), ed allora ho usato una convenzione (in modo da usare sempre la stessa): i punti che giacciono sul confine tra B e un'altra area appartengono sempre al settore B; i punti sul confine tra A e C appartengono sempre ad A.

Ho studiato tutti questi casi e sono giunto ai seguenti risultati *[qui contribuiamo al pezzo solo riformattando in maniera più compatta il ragionamento, che è tutta farina di Andrea (AR)]*:

Caso 0: n mod 6 = 0	
Area A:	Per x che varia tra n/3+1 e n/2 (compresi), y varia tra n-x+1 e 2x-1 (sempre compresi)
	Per x che varia tra n/2+1 e n-1, y varia tra x+1 e n

Area B:	Per x che varia tra 1 e $n/3$, y varia tra $(n+x+1)/2$ e n ($x+n$ dispari) oppure tra $(n+x+2)/2$ e n ($x+n$ pari)
	Per x che varia tra $n/3+1$ e $n/2$, y varia tra $2x$ e n
Area C:	Per x che varia tra 1 e $n/3$, y varia tra $x+1$ e $(n+x-1)/2$ ($x+n$ dispari) opp. tra $x+1$ e $(n+x)/2$ ($x+n$ pari)
	Per x che varia tra $n/3+1$ e $n/2-1$, y varia tra $x+1$ e $n-x$
Caso 1: *n* mod 6 = 1	
Area A:	Per x che varia tra $(n+2)/3$ e $(n-1)/2$, l'intervallo di variabilità della y è come quello del caso 0
	Per x che varia tra $(n+1)/2$ e $n-1$, l'intervallo di y è come nel caso 0
Area B:	Per x che varia tra 1 e $(n-1)/3$, l'intervallo di y è come nel caso 0
	Per x che varia tra $(n+2)/3$ e $(n-1)/2$, l'intervallo di y è come nel caso 0
Area C:	Per x che varia tra 1 e $(n-1)/3$, l'intervallo di y è come nel caso 0
	Per x che varia tra $(n+2)/3$ e $(n-1)/2$, l'intervallo di y è come nel caso 0

Osserviamo che l'espressione che identifica gli intervalli di variabilità della y resta sempre la stessa, pertanto per i restanti casi indico solo gli intervalli di variabilità della x, fermo restando che gli intervalli della y sono rispettivamente gli stessi.

variazione di x	Area A:	Area B:	Area C:
Caso 2: *n* mod 6 = 2	tra $(n+4)/3$ e $n/2$	tra 1 e $(n+1)/3$	tra 1 e $(n+1)/3$
	tra $n/2+1$ e $n-1$	tra $(n+4)/3$ e $n/2$	tra $(n+4)/3$ e $n/2-1$
Caso 3: *n* mod 6 = 3	tra $n/3+1$ e $(n-1)/2$	tra 1 e $n/3$	tra 1 e $n/3$
	tra $(n+1)/2$ e $n-1$	tra $n/3+1$ e $(n-1)/2$	tra $n/3+1$ e $(n-1)/2$
Caso 4: *n* mod 6 = 4	tra $(n+2)/3$ e $n/2$	tra 1 e $(n-1)/3$	tra 1 e $(n-1)/3$
	tra $n/2+1$ e $n-1$	tra $(n+2)/3$ e $n/2$	$(n+2)/3$ e $n/2-1$
Caso 5: *n* mod 6 = 5	tra $(n+4)/3$ e $(n-1)/2$	tra 1 e $(n+1)/3$	tra 1 e $(n+1)/3$
	tra $(n+1)/2$e $n-1$	tra $(n+4)/3$ e $(n-1)/2$	tra $(n+4)/3$ e $(n-1)/2$

Calcolo generale della probabilità di vittoria

Chiamiamo le probabilità di tutti i sottocasi con p_{XYZ}, dove X indica l'area, Y il caso e Z la sottoarea. Ad esempio: p_{B21} significa probabilità (condizionata al cadere nell'area B), nel caso in cui n mod 6 = 2, sottoarea 1 (ossia la prima delle due elencate). Al termine del calcolo di tutti questi termini, si avrà che, nei sei casi:

$$p_0 = p_{A01} + p_{A02} + p_{B01} + p_{B02} + p_{C01} + p_{C02}$$

$$p_1 = p_{A11} + p_{A12} + p_{B11} + p_{B12} + p_{C11} + p_{C12}$$

$$p_2 = p_{A21} + p_{A22} + p_{B21} + p_{B22} + p_{C21} + p_{C22}$$

$$p_3 = p_{A31} + p_{A32} + p_{B31} + p_{B32} + p_{C31} + p_{C32}$$

$$p_4 = p_{A41} + p_{A42} + p_{B41} + p_{B42} + p_{C41} + p_{C42}$$

$$p_5 = p_{A51} + p_{A52} + p_{B51} + p_{B52} + p_{C51} + p_{C52}$$

Ognuna delle p_{XYZ} sarà ovviamente due volte quella che si otterrebbe con le x e le y che variano come indicato nell'elenco sopra, in ragione dei casi considerati (metà di quelli complessivi).

Inoltre osserviamo che, tabulando gli intervalli di variabilità della x al variare di n, per alcuni tra i più bassi valori di n alcune delle sottoaree non esistono, e pertanto il calcolo generale che farò nel seguito potrebbe perdere di validità. Andrà calcolato caso per caso. Ma fortunatamente questi casi sono pochi. Vedere la tabella qui di seguito riportata. In violetto sono riportati i casi particolari.

n	A1: x		A2: x		B1: x		B2: x		C1: x		C2: x	
	da	a	da	a	da	a	da	a	da	a	da	a
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	2	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	0
3	2	1	2	2	1	1	2	1	1	1	2	1
4	2	2	3	3	1	1	2	2	1	1	2	1
5	3	2	3	4	1	2	3	2	1	2	3	2
6	3	3	4	5	1	2	3	3	1	2	3	2
7	3	3	4	6	1	2	3	3	1	2	3	3
8	4	4	5	7	1	3	4	4	1	3	4	3
9	4	4	5	8	1	3	4	4	1	3	4	4
10	4	5	6	9	1	3	4	5	1	3	4	4
11	5	5	6	10	1	4	5	5	1	4	5	5
12	5	6	7	11	1	4	5	6	1	4	5	5
13	5	6	7	12	1	4	5	6	1	4	5	6
14	6	7	8	13	1	5	6	7	1	5	6	6
15	6	7	8	14	1	5	6	7	1	5	6	7
16	6	8	9	15	1	5	6	8	1	5	6	7
17	7	8	9	16	1	6	7	8	1	6	7	8
18	7	9	10	17	1	6	7	9	1	6	7	8
19	7	9	10	18	1	6	7	9	1	6	7	9
20	8	10	11	19	1	7	8	10	1	7	8	9

Qundi vanno calcolati a parte i casi in cui n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8.

Calcolo delle varie probabilità parziali

Siccome ci servirà spesso calcolare somme del tipo $\sum_{i=a}^{b} i$ e $\sum_{i=a}^{b} i^2$, andiamo a vedere quanto valgono queste espressioni.

$$\sum_{i=a}^{b} i = \sum_{i=1}^{b} i - \sum_{i=1}^{a-1} i = \frac{b^2 + b - a^2 + a}{2}$$

$$\sum_{i=a}^{b} i^2 = \sum_{i=1}^{b} i^2 - \sum_{i=1}^{a-1} i^2 = \frac{2b^3 + 3b^2 + b - 2a^3 + 3a^2 - a}{6}$$

Ed inoltre, siccome la y varia sempre tra gli stessi estremi, andiamo a calcolarci le somme lasciando indicati con a e b (oppure con 1 e b per le sottoaree B1 e C1) gli estremi per la x, cosicché possiamo facilmente sostituire di volta in volta gli estremi.

Tralascio di riportare i calcoli altrimenti verrebbe una cosa davvero lunghissima.

La probabilità nel sottocaso A1 sarà:

$$p_{Ax1} = \frac{2}{n^2}\sum_{x=a}^{b}\sum_{y=n-x+1}^{2x-1}\frac{x-1}{n} = \frac{2b^3-2a^3-b^2(n+1)+a^2(n+7)+b(n-1)-a(3n+7)+(2n+2)}{n^3}$$

La probabilità nel sottocaso A2 sarà:

$$p_{Ax2} = \frac{2}{n^2}\sum_{x=a}^{b}\sum_{y=n-x+1}^{2x-1}\frac{x-1}{n} = \frac{-2b^3+2a^3+3nb^2-a^2(3n+6)-b(3n-2)+a(9n+4)-6n}{3n^3}$$

La probabilità nel sottocaso B1 sarà:

$$p_{Ax2} = \frac{2}{n^2}\sum_{x=1}^{b}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{y=\frac{n+x+1}{2}}^{n}\frac{y-x-1}{n}\_per\_x+n\_dispari\\ \displaystyle\sum_{y=\frac{n+x}{2}+1}^{n}\frac{y-x-1}{n}\_per\_x+n\_pari\end{array}\right\} = \ldots$$

Qui c'è il problema di considerare i casi x pari e x dispari, nonché b ed n pari e b ed n dispari. Dopo aver effettuato le due sommatorie all'interno delle parentesi graffe, ho sostituito la x con $2t$-1 e con $2t$ (a seconda che la x sia dispari o pari, rispettivamente), estendendo la somma esterna da 1 a b/2, se b è pari, mentre la somma esterna andrà da 1 a (b-1)/2 con l'aggiunta dell'ultimo termine calcolato a mano se b è dispari.

Il risultato sarà:

Caso b pari, n pari: $\dfrac{b^3+b^2(2-3n)+b(3n^2-4n)}{4n^3}$ (sarebbe il caso 0)

Caso b pari, n dispari: $\dfrac{b^3+b^2(2-3n)+b(3n^2-4n-1)}{4n^3}$ (sarebbe il caso 1 e 5)

Caso b dispari, n pari: $\dfrac{b^3+b^2(2-3n)+b(3n^2-4n-1)+n-2}{4n^3}$ (sarebbe il caso 2 e 4)

Caso b dispari, n dispari: $\dfrac{b^3+b^2(2-3n)+b(3n^2-4n)-n+2}{4n^3}$ (sarebbe il caso 3)

La probabilità nel sottocaso B2 sarà:

$$p_{Bx2} = \frac{2}{n^2}\sum_{x=a}^{b}\sum_{y=2x}^{n}\frac{y-x-1}{n} = \frac{b^2(2-n)-a^2(2-n)+b(n^2-2n)-a(n^2-4)+n^2-n-2}{n^3}$$

La probabilità nel sottocaso C1 sarà:

$$p_{Ax2}=\frac{2}{n^2}\sum_{x=1}^{b}\left\{\begin{matrix}\sum_{y=x+1}^{\frac{n+x-1}{2}}\frac{n-y}{n}\_per\_x+n\_dispari\\ \sum_{y=x+1}^{\frac{n+x}{2}}\frac{n-y}{n}\_per\_x+n\_dispari\end{matrix}\right\}=\dots$$

Con lo stesso procedimento del caso B1, ottengo:

Caso b pari, n pari: $\frac{b^3+b^2(3-3n)+b(3n^2-6n+2)}{4n^3}$ (sarebbe il caso 0)

Caso b pari, n dispari: $\frac{b^3+b^2(3-3n)+b(3n^2-6n+3)}{4n^3}$ (sarebbe il caso 1 e 5)

Caso b dispari, n pari: $\frac{b^3+b^2(3-3n)+b(3n^2-6n+3)-n+1}{4n^3}$ (sarebbe il caso 2 e 4)

Caso b dispari, n dispari: $\frac{b^3+b^2(3-3n)+b(3n^2-6n+2)+n-1}{4n^3}$ (sarebbe il caso 3)

La probabilità nel sottocaso C2 sarà:

$$p_{Cx2}=\frac{2}{n^2}\sum_{x=a}^{b}\sum_{y=x+1}^{n-x}\frac{n-y}{n}=\frac{b^2(1-n)-a^2(1-n)+b(n^2-2n+1)-a(n^2-1)+n^2-n}{n^3}$$

La probabilità di vittoria

Escludendo a questo punto ancora i casi particolari, da calcolare in seguito, vediamo l'espressione della probabilità di vittoria, nei sei casi considerati:

Occorre "solo" inserire nelle formule sopra elencate i valori estremi per a e b in ognuno dei casi ed effettuare le somme.

Caso 0: n mod 6 = 0	
$p_{A01}=\frac{4n^3+3n^2-18n}{108n^3}$	$p_{A02}=\frac{n^3-3n^2+2n}{6n^3}$
$p_{B01}=\frac{19n^3-30n^2}{108n^3}$	$p_{B02}=\frac{n^3-2n^2}{36n^3}$
$p_{C01}=\frac{19n^3-45n^2+18n}{108n^3}$	$p_{C02}=\frac{n^3-7n^2+6n}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 0:

$$p_0=\frac{22n^2-51n+18}{36n^2}$$

Caso 1: *n* mod 6 = 1	
$p_{A11} = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 9n - 4}{27n^3}$	$p_{A12} = \dfrac{2n^3 - 3n^2 - 2n + 3}{12n^3}$
$p_{B11} = \dfrac{19n^3 - 42n^2 + 9n + 14}{108n^3}$	$p_{B12} = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 13n + 10}{36n^3}$
$p_{C11} = \dfrac{19n^3 - 57n^2 + 57n - 19}{108n^3}$	$p_{C12} = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 1:

$$p_1 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 11}{36n^3}$$

Caso 2: *n* mod 6 = 2	
$p_{A21} = \dfrac{4n^3 + 3n^2 - 42n + 40}{108n^3}$	$p_{A22} = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6n^3}$
$p_{B21} = \dfrac{19n^3 - 18n^2 - 12n - 56}{108n^3}$	$p_{B22} = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 12n - 8}{36n^3}$
$p_{C21} = \dfrac{19n^3 - 33n^2 - 42n + 64}{108n^3}$	$p_{C22} = \dfrac{n^3 - 11n^2 + 26n - 16}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 2:

$$p_2 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n - 8}{36n^3}$$

Caso 3: *n* mod 6 = 3	
$p_{A31} = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 9n}{27n^3}$	$p_{A32} = \dfrac{2n^3 - 3n^2 - 2n + 3}{12n^3}$
$p_{B31} = \dfrac{19n^3 - 30n^2 - 27n + 54}{108n^3}$	$p_{B32} = \dfrac{n^3 - 2n^2 - 9n + 18}{36n^3}$
$p_{C31} = \dfrac{19n^3 - 45n^2 + 45n - 27}{108n^3}$	$p_{C32} = \dfrac{n^3 - 7n^2 + 15n - 9}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 3:

$$p_3 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 27}{36n^3}$$

Caso 4: *n* mod 6 = 4	
$p_{A41} = \dfrac{4n^3 + 3n^2 - 18n - 16}{108n^3}$	$p_{A42} = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6n^3}$

$p_{B41} = \dfrac{19n^3 - 42n^2 + 36n - 40}{108n^3}$	$p_{B42} = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 4n - 8}{36n^3}$
$p_{C41} = \dfrac{19n^3 - 57n^2 + 30n + 8}{108n^3}$	$p_{C42} = \dfrac{n^3 - 3n^2 - 6n + 8}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 4:

$$p_4 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n - 16}{36n^3}$$

Caso 5: *n* mod 6 = 5	
$p_{A51} = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 3n + 10}{27n^3}$	$p_{A52} = \dfrac{2n^3 - 3n^2 - 2n + 3}{12n^3}$
$p_{B51} = \dfrac{19n^3 - 18n^2 - 39n - 2}{108n^3}$	$p_{B52} = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 3n + 10}{36n^3}$
$p_{C51} = \dfrac{19n^3 - 33n^2 - 15n + 37}{108n^3}$	$p_{C52} = \dfrac{n^3 - 11n^2 + 35n - 25}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 5:

$$p_5 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 19}{36n^3}$$

Gli altri casi particolari

Restano da calcolare le probabilità di vittoria per n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. Erano infatti i casi in cui non si potevano usare le formule sopra elencate. Ma facendo due conti si vede che le probabilità di vittoria sono quelle che si avrebbero usando le stesse formule! Quindi, i casi particolari non esistono, o meglio sono conglobati dentro i sei casi generali, potendosi usare la medesima formula[30].

Riepilogo delle formule per il calcolo della probabilità di vittoria

Va usata la formula corrispondente al numero di facce del dado modulo 6.

$$p_0 = \frac{22n^2 - 51n + 18}{36n^2}$$

$$p_1 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 11}{36n^3}$$

$$p_2 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n - 8}{36n^3}$$

$$p_3 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 27}{36n^3}$$

[30] Dobbiamo ammettere che proprio questo capitoletto non risulta proprio comprensibile e giustificato, ma per essere il nostro unico solutore è andato abbastanza avanti... ed ha trovato lo stesso risultato del Capo, che è poi la parte più importante...

$$p_4 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n - 16}{36n^3}$$

$$p_5 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 19}{36n^3}$$

Per n=20 la probabilità di vittoria è effettivamente il 54.15%. Per n che tende ad infinito ho addirittura gli 11/18 (61.1%) di probabilità di vincere!!!

Per inciso, il gioco conviene al banco solo se $n \le 12$.

Siamo basiti. Alice, però, non ne vuole sapere di andare a lezione dal nostro Last Duke.

4.2 [061]

4.2.1 Quasi Impossibile

Bene, certo ricorderete quanto Alice si sia lamentata delle nostre più recenti proposte di problemi per farle amare la probabilità, e le orribili reazioni che hanno causato: corni da nebbia, frasi incomprensibili, soluzioni tutte diverse. Per fortuna qualcuno ha deciso di mettere ordine: **Caronte (dagli occhi di bragia)**, di cui riportiamo qui integralmente le parole:

(...) Mi è così caduto l'occhio sul problema titolato Quasi Impossibile, dove si parla di bastoni e triangoli, e ne ho abbozzato un tentativo di soluzione; quando mi è arrivato il n. 62, me ne sono ricordato e sono andato a cercarne la vostra soluzione: orrore! Ne ho trovate tante, ma non ne ho capita nessuna; mi sono sentito molto vicino a Francesca e pieno di comprensione per le sue perplessità nei confronti dei problemi che trattano di probabilità, perché le condivido in pieno. Ho pertanto ripensato al mio tentativo di approccio al problema, l'ho ripreso e rivisto e così ve lo passo, sperando che sia chiaro, ma, soprattutto, che sia giusto.

Dedicato ad Alice

Lasciatemi, innanzitutto ricordare il problema. Si tratta di dividere un segmento (il bastone) in tre parti, in modo casuale, e di determinare la probabilità che i tre segmenti ottenuti possano formare un triangolo.

Assunta uguale ad uno la lunghezza del segmento dato e presi due punti a caso su di esso, in modo che questi determinino i tre segmenti in cui il segmento genitore viene diviso, sia x la lunghezza del **primo** (l'ordine è iportante), y quella del **secondo** e, quindi, $1-x-y$ quella del terzo. Le condizione perché tre segmenti possano formare un triangolo (che sono che ciascuno di essi sia minore della somma e maggiore della differenza degli alri due) si compendiano, nel caso specifico, nelle tre disuguaglianze

$$x < 1/2,\ y < 1/2 \text{ e } x + y > 1/2 \qquad \texttt{[004.001]}$$

Osserviamo ora che, segnando un punto a caso sul segmento dato, la probabilità che esso cada in un intervallino di ampiezza dx è data dal rapporto tra l'ampiezza dx di tale intervallino e la lunghezza dell'intero segmento, assunta uguale ad uno, e risulta pertanto

$$P(x) = dx$$

La probabilità che il primo segmento (x) sia minore di 1/2 si ottiene sommando (integrando) la $P(dx)$ su tutti gli x favorevoli ed è quindi

$$P(x<1/2)=\int_0^{1/2}dx=1/2$$

So benissimo che adesso ogni persona sensata penserà che io sia semideficiente, perché ho fatto un ragionamento estremamente arzigogolato per dire una cosa intuitivamente chiara a tutti. Però, attenzione al passo successivo, basato sullo stesso ragionamento banale. Una volta fissata la lunghezza x del primo segmento, il secondo punto di divisione va preso sul segmento rimasto, di lunghezza $1-x$; pertanto la probabilità di segnare un punto su tale segmento in un intervallino di ampiezza dy è data dal rapporto tra l'ampiezza dy e quella dell'intero segmento $1-x$:

$$P(x,dy)=\frac{dy}{1-x}$$

la probabilità, quindi, che, ad x fissato, risulti $y<1/2$ è data da

$$P(x,y<1/2)=\int_x^{x+1/2}\frac{dy}{1-x}=\int_0^{1/2}\frac{dy}{1-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}$$

per ottenere la probabilità che sia x che y siano minori di 1/2 occorre ora sommare il risultato precedente su tutti gli x compresi ta zero e 1/2. Otteniamo così

$$P(x<1/2,y<1/2)=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{dx}{1-x}=\frac{1}{2}\ln 2$$

Con questo abbiamo la probabilità che siano soddisfatte le prime due delle disuguaglianze **[1]**. Rimane da soddisfare la terza, ma questo è banale; infatti una volta fissati x e y, entrambi minori di 1/2, ma peraltro arbitrari, si ha che la loro somma $z\equiv x+y$ risulta un arbitrario numero compreso tra 0 ed 1 e pertanto la probabilità che z risulti maggiore di 1/2, cioè la probabilità che sia soddisfatta la terza delle **[1]**, è

$$P(z\equiv x+y>1/2)=\int_{1/2}^{1}dz=\frac{1}{2}$$

Poiché questa probabilità è indipendente dalla probabilità che vengano soddisfatte contemporaneamente le prime due, la probabilità che vengano soddisfatte tutte e tre è il prodotto di queste due e quindi la probabilità che coi tre segmenti in cui si è spezzato a caso il bastone si possa costruire un triangolo è data da

$$P(x<1/2,y<1/2,x+y>1/2)=$$
$$=P(x<1/2,y<1/2)P(x+y>1/2)=\frac{1}{4}\ln 2$$

A questo punto Caronte chiede l'opinione di Alice, ma più che un'opinione, qui, si dovrebbe distruggere un preconcetto. Lei ha dichiarato di aver, per la prima volta, capito che cosa succede e perché *[Forse Caronte ha trovato la strada per far apprezzare il Calcolo delle Probabilita` ad Alice: basta nascondere il ragionamento sotto una marea di integrali e differenziali... (RdA)]*, il resto della Redazione, dopo aver passato mesi (anni) a cercare il modo per farle apprezzare il calcolo delle probabilità, sta cercando di scoprire se gli occhi di bragia forniscono lezioni private agli scettici.

4.3 [062]

4.3.1 La saliera di RM

Problema facilotto, ma con i sui piccoli inganni laterali. Per esempio, con il raggio unitario e l'altezza doppia del raggio, in tanti hanno visto dei triangoli equilateri... è il caso di **GaS**, del nostro **L.A.Bachevskij** (**Loba** per gli intimi), di **Giorgino** (no, l'allonimo non se l'è scelto lui, lo conosciamo da tempo e lo chiamiamo tutti così).

C'è poi chi si è astenuto:

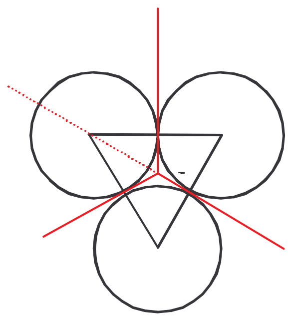
> Io non riesco a risolvere problemi di geometria sferica: o forse ci riesco, ma non ne ho voglia (**PMP**)

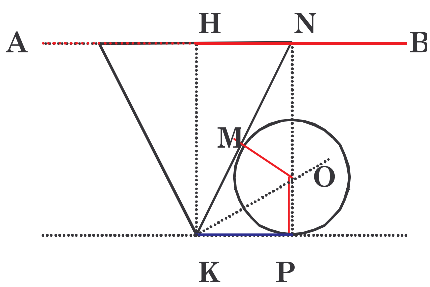
Tutti gli altri sono arrivati facilmente in porto: **Zar**, in due puntate, ci manda prima la soluzione e poi la figura. Riportiamo solo le considerazioni iniziali:

> Eccoci qua. Soluzione del primo problema: evidenti ragioni di simmetria (ah, finalmente posso usare anche io La Frase *[Aaaargh! PRS]*) mi portano a ridurre il problema in due dimensioni in questo modo: il centro della sfera sta sull'asse di simmetria della saliera, cioè sulla retta verticale passante per il {bari|circo|orto}centro del triangolo equilatero avente per vertici i centri delle circonferenze di base dei coni e perpendicolare al piano di base, ovvero sul manico della saliera (avrà pure un manico, no?).
>
> Tagliamo dunque la saliera con un piano passante per l'asse di un cono e per il centro della sfera e trasformiamo il problema nel modo seguente: dato un triangolo rettangolo con i cateti lunghi 1 e 2, trovare la circonferenza avente centro sul cateto maggiore e tangente all'ipotenusa e al cateto minore.

Poi si lascia andare ad espressioni che includono *"con rapidi passaggi lasciati al lettore"*, per cui sorvoliamo, anche se è tutto giusto. **Last Duke**, inoltre, ci dimostra che il rapporto aureo è poi proprio il rapporto aureo. Vi forniamo quindi la soluzione di **Gigia**, che come al solito è ben spiegata e include un paio di figure che descrivono la saliera in pianta verticale e vista laterale:

> Nella figura 1 visualizzo la "saliera" dall'alto e osservo che:
>
> - La figura è sezionata in tre parti uguali dalle tre semirette segnate in rosso, incernierate nel punto centrale H e inclinate, tra loro, di 120°.
> - AB è un asse di simmetria e una sezione verticale della figura, secondo tale asse, deve visualizzare anche la circonferenza, sezione della sfera.





> La figura 2 rappresenta la sezione verticale, secondo l'asse AB; noto che:
>
> - $\overline{KP} = \overline{HN} =$ raggio base cono =1
> - $\overline{HK} = \overline{PN} =$ altezza cono = 2
> - Incognita è il raggio (in rosso) della circonferenza - sezione della sfera
> - I triangoli rettangoli $\overset{\Delta}{KNP}$ e $\overset{\Delta}{NMO}$ sono simili, quindi:

$$\overline{NP}:\overline{KP}=\overline{NM}:\overline{OM} \text{ ma}$$

$$\overline{KN}=\sqrt{5}\,,\ \overline{KM}=\overline{KP}=1 \text{ e } \overline{MN}=\left(\sqrt{5}-1\right) \quad \text{da cui}$$

$$2:1=(\sqrt{5}-1):\overline{OM} \text{ e}$$

$$\overline{OM}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

Che altro dirvi, sono arrivate ancora molte proposte per il miglioramento del progetto. Ad esempio Gigia ci dice:

> A proposito del problema della saliera vorrei proporre qualche piccolo movimento al design, ... non per confrontarla con la "Saliera di Francesco I" che Benvenuto Cellini ha voluto così sfarzosa e decisamente... inutile... a parer mio..., ma per riportare la problematicità dell'equilibrio agli eccelsi livelli del vostro (nostro) giornale (...) Le mie proposte sono di progettare una saliera con coni di misure variabili e/o di sostituire un cono con una semisfera (per la paprika di Alice *[A quanto pare ci conosce bene... (AR)]*) e di farne un problema di equilibrio.

Last Duke è preoccupato per lo stesso motivo:

> Cercavo di capire in che rapporto stessero i termini "dosi industriali", "normalmente" e "poco". Se si tenesse conto del fatto che le tre parti della "pa-pe-sa" così progettata dovrebbero svuotarsi contemporaneamente, e supponendo che ogni piatto sia condito come indicato nel testo, allora una "dose industriale" è pari a 2 "dosi normali" più il "poco sale" messo dal GC!

A questo punto lanciamo la sfida: il Capo vuole mantenere la simmetria e propone semplicemente buchi regolabili per le spezie, ma tutto quello che verrà proposto dai nostri lettori verrà preso in considerazione... buon lavoro!

4.3.2 Yazzi!

Le soluzioni ricevute sono di **Last Duke**, **Loba**, e **GaS**, ma tutti si sono affrettati a spedire link, istruzioni e programmini di gioco per il Capo, che è sparito per qualche tempo (non si sa bene se per controllare l'uniformità delle istruzioni o fare verifiche sperimentali...). Ringraziamo di cuore.

Loba ci fornisce una soluzione che anche per Alice non pareva tanto accettabile, ma che riportiamo per il commento finale:

> (...) 1/16. E se vi sembra un valore troppo alto (come parve a me) posso comunicarvi i miei risultati sperimentali, di cui vi ha parlato il Gioia: su 200 lanci mi è venuto Yatzi 15 volte, per una probabilità approssimata di 0.075 (contrapposta alla mia previsione di 0.0625).

Siamo preoccupatissimi, anche se non lo diamo a vedere. Non abbiamo detto che excel è il diavolo per vedervi tirare dadi per tutta la notte... **GaS** ha preso la cosa esattamente al contrario e ci ha mandato una soluzione volutamente *sbagliata*:

> Prima di cominciare la lettura di queste paginette vorrei darvi un piccolo avvertimento: la soluzione che segue non è esatta.
>
> E che la scrivo a fare allora? Avete dato al problema un punteggio minimo e quindi avete trovato una soluzione facile, io non riesco a trovare una soluzione esatta che sia anche facile e quindi, nel mio orgoglio di solutore, mi sono detto che anche voi avete trovato una soluzione sbagliata. Per questo motivo mando anche la mia; che sia sbagliata, però, non è immediato e cosi ve la mando, ugualmente.

Partiamo calcolando qual è la probabilità di fare yazzi di 1, vediamola così: tiro un dado un massimo di 3 volte finché non faccio 1, se non faccio 1 neanche al 3° tentativo ho "perso". Qual è la probabilità di fare 1? Banalmente viene

$$P' = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{216} \cong 0{,}42$$

Ora devo ripetere il procedimento per tutti e 5 i dadi, come ben sappiamo per avere la probabilità che tutti e 5 mi diano 1 devo moltiplicare tra loro le probabilità ottenendo $P'' = (P')^5$

Mi sono poi detto che fare yazzi di 1 ha perfettamente le stesse probabilità di farlo di 2, di 3 ecc.…

Per la probabilità totale basta sommare le sei P" ottenendo: $P = 6 \cdot P'' \cong 0{,}078$

Viene quindi un 8% di probabilità per lo yazzi, due volte ogni 25 faccio yazzi. La verifica sperimentale (leggi "anni e anni di gioco"), però, si discosta, in negativo da questo dato: perché? Intanto notiamo che questa è la probabilità che si ha partendo con l'idea di tenere solo i numeri uguali, invece a volte si tengono i dadi per tentare le scale o i full, questo potrebbe falsare il campione statistico (tutte le partite che ho fatto in vita mia). In secondo luogo perché la soluzione di cui sopra è sbagliata.

Perché dico che la soluzione è sbagliata? Perché dopo il primo lancio posso decidere che dadi tenermi a seconda dei risultati e quindi il ragionamento di cui sopra va cambiato. Inoltre potrei cambiare scelta dopo il secondo lancio, ipotizziamo che al primo lancio ho due 1, li tengo e tiro gli altri tre. Al secondo lancio i tre dadi mi danno tutti il 2 e quindi mi tengo questi e ritiro i due dadi tenuti all'inizio: le cose si incasinano non poco. Quello che succede è che, nel calcolo sopra svolto, si decide se tenere o se rilanciare un dado basandosi solo sul risultato del dado stesso, nella realtà invece si decide anche in base ai risultati degli altri dadi.

Per semplificare vediamola così: al posto dei dadi consideriamo il lancio di 3 monete, naturalmente definiamo yazzi come 3 teste o 3 croci. Qual è la probabilità dello yazzi in questo gioco semplificato?

Seguendo il ragionamento di prima otterrei $P' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, $P'' = (P')^3 = \frac{27}{64}$ e

$$P = 2 \cdot P' = \frac{54}{64} = \frac{27}{32} = 0{,}84375.$$

Nella realtà non è difficile calcolare la P reale, in 2 casi su 8 faccio yazzi al primo tentativo, se non ho fatto yazzi avrò sicuramente due monete di un tipo ed una dell'altro. Ritiro quest'ultima e faccio yazzi con probabilità di ½. In totale si ha:

$$P = \frac{2}{8} + \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

Sinceramente mi aspettavo una probabilità più alta nel caso reale piuttosto che nel caso fittizio ma i numeri che vengono fuori sono questi. Come affrontare allora il problema originale in maniera esatta?

Non ho la più pallida idea, più ci provo e più mi incasino. Dovrei calcolare le probabilità separate per il primo lancio (probabilità di avere due dadi uguali, che siano tutti diversi, che ce ne siano 4 uguali ecc…) e poi svolgere i conti successivi. E' facile calcolare la P che al primo lancio io faccia yazzi o anche che siano tutti diversi, più tosti sono i casi intermedi. Inoltre dovrei calcolare la P che io abbia due dadi uguali e gli altri tre non tutti uguali, poi devo calcolare cosa succede al secondo tiro (mettiamo che al primo tiro ho tutti i dadi diversi, mi tengo, per esempio, l'1. Al secondo tiro potrei ottenere due 3 e nessun 1, lascio l'idea dell'1 e mi tengo i 3…).

La soluzione di **Last Duke** è provvista di grafici e contiene un'espansione, eccola qui di seguito:

Iniziamo per prima cosa col trovare la soluzione del problema così come è posto.

Intanto, cerchiamo di capire cosa vuol dire "dadi inutili". Io penso che "dadi inutili" siano quei dadi che non concorrono alla formazione dello Yahtzee, indipendentemente dagli altri punteggi che posso fare al gioco (vedi oltre).

Ossia, mi tengo tutti quei dadi che hanno lo stesso punteggio, e rilancio gli altri. Nel caso io abbia tre dadi con ugual punteggio e altri due uguali tra loro, ma diversi dai tre, mi tengo ovviamente i tre dadi uguali.

Si possono verificare 7 casi (7?!?! Sì, 7. perché così è più semplice la trattazione).

1. Ottengo 5 risultati uguali (che fortunaccia!!!!!!!!!!)
2. Ottengo 4 risultati uguali (e uno diverso, ovviamente)
3. Ottengo 3 risultati uguali e due diversi, anche tra di loro
4. Ottengo 3 risultati uguali e due diversi, ma uguali tra loro (quello che al poker si chiama full)
5. Ottengo 2 risultati uguali e tre diversi, anche tra di loro
6. Ottengo 2 coppie di risultati uguali e uno diverso da entrambe le coppie
7. Ottengo tutti e 5 i valori diversi (che jella!)

Andiamo a calcolare le probabilità di ognuno di questi casi.

1. 1° caso: Ovviamente è $(1/6)^4=1/1296$. Questo perché il primo numero può essere uno qualunque, ma gli altri 4 devono essere uguali al primo.
2. 2° caso: Il primo numero può essere uno qualunque, altri 3 numeri devono essere uguali ad esso $(1/6)^3$, ed un quinto diverso (5/6). Siccome il quinto numero può cadere in una qualsiasi delle cinque posizioni, il risultato va moltiplicato per 5: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot 5$
3. 3° caso: Il primo numero può essere uno qualunque, altri 2 numeri devono essere uguali ad esso $(1/6)^2$, e gli altri due diversi sia da questo che tra di loro (5/6 per il quarto numero e 4/6 per il quinto). Siccome ci sono 10 possibili configurazioni per questa posizione, il risultato va moltiplicato per 10. $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot 10$
4. 4° caso: Il primo numero può essere uno qualunque, altri 2 numeri devono essere uguali ad esso $(1/6)^2$, e gli altri due diversi da questo ma uguali tra di loro (5/6 per il quarto numero e 1/6 per il quinto, che deve essere uguale al quarto). Siccome ci sono 10 possibili configurazioni per questa posizione, il risultato va moltiplicato per 10. $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 10$

5. 5° caso: Il primo numero può essere uno qualunque, il secondo uguale al primo (1/6), gli altri tre devono essere diversi da questo e tra di loro (5/6 per il terzo numero, 4/6 per il quarto e 3/6 per il quinto). Siccome ci sono 10 possibili configurazioni per questa posizione, il risultato va moltiplicato per 10. $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot 10$

6. 6° caso: Il primo numero può essere uno qualunque, il secondo uguale al primo (1/6), altri due numeri devono essere uguali tra di loro e diversi dal primo (5/6 per il terzo e 1/6 per il quarto, che deve essere uguale al terzo), l'ultimo deve essere diverso sia dal primo che dal terzo (4/6). Siccome ci sono 15 possibili configurazioni per questa posizione, il risultato va moltiplicato per 15. $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot 15$

7. 7° caso: Tutti numeri diversi. Anche qui è molto semplice: $\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}$

<u>Probabilità dopo il primo lancio</u>

Per ottenere la probabilità di avere x risultati uguali dopo il primo lancio, accorpo i casi 3 e 4 (3 numeri uguali) e 5 e 6 (2 numeri uguali). Facendo i conti, ottengo:

5 numeri uguali: 1/1296

4 numeri uguali: 25/1296

3 numeri uguali: 250/1296

2 numeri uguali: 900/1296

tutti numeri diversi: 120/1296

<u>Secondo lancio</u>

Nel secondo lancio, per ottenere lo Yahtzee devo necessariamente ottenere il numero che mi sono tenuto per tutti i dadi che ho rilanciato.

Pertanto, se avevo 5 numeri uguali, non necessitavo di rilancio, se ne avevo 4, ne ho rilanciato 1 (probabilità di vittoria 1/6), se ne avevo 3, ne ho rilanciati 2 (probabilità 1/36), etc.

La vittoria ha pertanto probabilità:

$$\frac{1}{1296}+\frac{25}{1296}\cdot\frac{1}{6}+\frac{250}{1296}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{900}{1296}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{120}{1296}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{221}{17496}$$

Ossia circa 1.26%.

Pensavo ad una generalizzazione… Se permetto di lanciare *n* volte, quale è la probabilità di fare Yahtzee?

Mi sembra evidente che per *n* tendente ad infinito, la probabilità tenda ad 1, ma è interessante vedere quanto rapidamente ci tenda.

Considero cinque stati, che chiamiamo A (caso 1 = 5 numeri uguali = Yahtzee), B (caso 2 = 4 numeri uguali), C (casi 3 e 4 = 3 numeri uguali), D (casi 5 e 6 = 2 numeri uguali) ed E (caso 7 = tutti numeri diversi).

Ottengo una tabella delle probabilità di transizioni di stato come segue:

da\a	A	B	C	D	E
A	1	-	-	-	-
B	1/6	5/6	-	-	-
C	1/36	10/36	25/36	-	-
D	1/216	15/216	80/216	120/216	-
E	1/1296	25/1296	250/1296	900/1296	120/1296

Quindi, la probabilità di stare nello stato A dopo l'n-mo lancio è:

Dopo 1 lancio: 1/1296 (v. sopra)

Dopo 2 lanci:

$$\frac{1}{1296}+\frac{25}{1296}\cdot\frac{1}{6}+\frac{250}{1296}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{900}{1296}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{120}{1296}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{221}{17496}$$ (v. sopra)

Per i lanci successivi, si trova un modo ricorsivo di scrivere le probabilità. Indichiamo le probabilità di transizione con (ad esempio) p_{EC} per indicare la probabilità di transizione da E a C (250/1296, in tabella) e la probabilità di essere nei vari stati dopo l'n-mo lancio con (ad esempio) p_C^3 (= probabilità di essere nello stato C dopo 3 lanci). Ho:

$$p_A^n = p_{AA}\cdot p_A^{n-1} + p_{BA}\cdot p_B^{n-1} + p_{CA}\cdot p_C^{n-1} + p_{DA}\cdot p_D^{n-1} + p_{EA}\cdot p_E^{n-1} = p_A^{n-1} + \frac{1}{6}p_B^{n-1} + \frac{1}{36}p_C^{n-1} + \frac{1}{216}p_D^{n-1} + \frac{1}{1296}p_E^{n-1}$$

$$p_B^n = p_{BB}\cdot p_B^{n-1} + p_{BC}\cdot p_C^{n-1} + p_{BD}\cdot p_D^{n-1} + p_{BE}\cdot p_E^{n-1} = \frac{5}{6}p_B^{n-1} + \frac{10}{36}p_C^{n-1} + \frac{15}{216}p_D^{n-1} + \frac{25}{1296}p_E^{n-1}$$

$$p_C^n = p_{CC}\cdot p_C^{n-1} + p_{CD}\cdot p_D^{n-1} + p_{CE}\cdot p_E^{n-1} = \frac{25}{36}p_C^{n-1} + \frac{80}{216}p_D^{n-1} + \frac{250}{1296}p_E^{n-1}$$

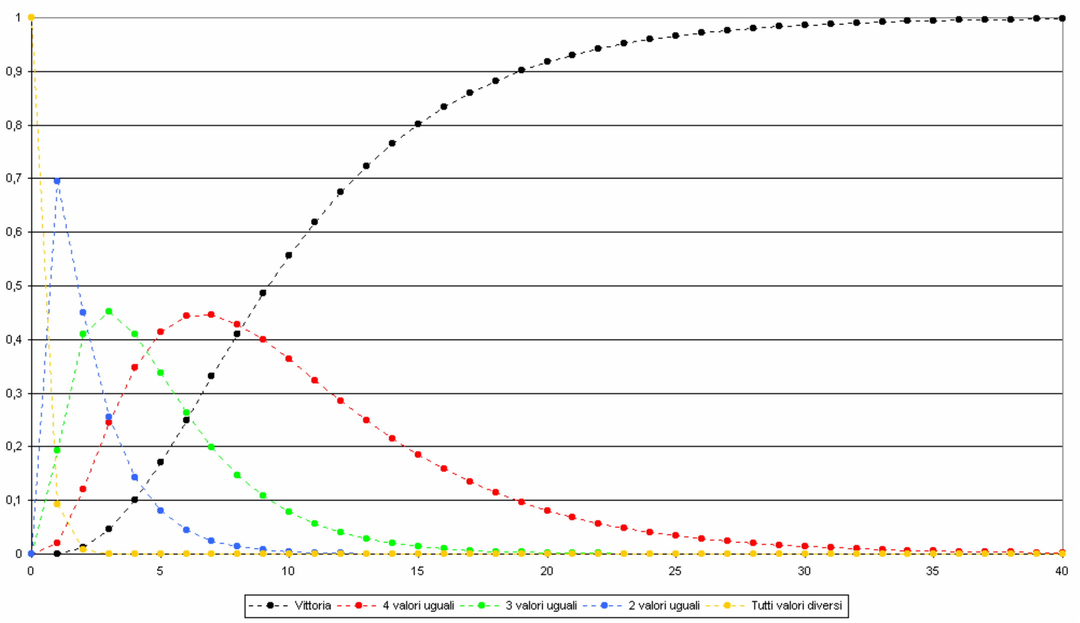
$$p_D^n = p_{DD}\cdot p_D^{n-1} + p_{DE}\cdot p_E^{n-1} = \frac{120}{216}p_D^{n-1} + \frac{900}{1296}p_E^{n-1}$$

$$p_E^n = p_{EE}\cdot p_E^{n-1} = \frac{120}{1296}p_E^{n-1}$$

(Le frazioni potrebbero essere semplificate, ma per immediatezza visiva preferisco lasciarle così).

Posso a questo punto tabulare i valori ed ottenere il grafico qui di seguito riportato. In ascissa sono riportati il numero dei lanci, in ordinata la probabilità di essere in uno dei 5 stati (lo stato A è lo stato "5 numeri uguali", ossia "yahtzee", ossia "vittoria").

Fare Yahtzee è molto difficile, come si poteva immaginare, ma forse lo è anche di più di quanto lo si immaginasse semplicemente. Infatti, per avere più del 50% di probabilità di vincere, devo rilanciare i "dadi inutili" per almeno 10 volte!



Per 1 o 2 lanci, la combinazione più frequente è quella di avere 2 numeri uguali, per 3 o 4 lanci è più probabile averne 3 uguali, e per una probabilità di avere 4 numeri uguali maggiore delle altre occorre fare dai 5 ai 9 lanci (compresi). Con 10 lanci o più, la probabilità maggiore è quella dello Yahtzee.

Visto che fino a qui non eravamo ancora abbastanza confusi, abbiamo deciso di inserire anche la soluzione del Capo. Per i deboli di cuore, vi avvertiamo che usa le matrici di Markov, ed è indentata, così potete saltarla, se ci state ancora lavorando...

La soluzione che preferisco usa le ***Matrici di Markov***; consideriamo gli stati indicati nella tabella:

0	...devo ancora tirare...
1	Tutti diversi
2	Una coppia
3	Tre uguali (un tris)
4	Quattro uguali (poker)
5	Cinque uguali (Yazzi)

Supponiamo inoltre di tenere sempre il risultato migliore (anche se nel caso [1] questo può sembrare problematico: supponiamo di tenere il valore maggiore). Allora, posso costruire la matrice di transizione A_{ij} che indica la probabilità di passare ***dallo*** stato ***i allo*** stato ***j***.

Allora, per la strategia indicata, si ha la matrice:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{720}{7776} & \frac{5400}{7776} & \frac{1500}{7776} & \frac{150}{7776} & \frac{6}{7776} \\ 0 & \frac{120}{1296} & \frac{900}{1296} & \frac{250}{1296} & \frac{25}{1296} & \frac{1}{1296} \\ 0 & 0 & \frac{120}{216} & \frac{80}{216} & \frac{15}{216} & \frac{1}{216} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{36} & \frac{10}{36} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Ora (grazie anche al lampo di genio del definire lo stato zero in quel modo) possiamo dire che fare tre tiri corrisponde a ***elevare al cubo*** la matrice e selezionare l'elemento:

$$A_{0,5} = \frac{347897}{7558272} \approx 0.0460286$$

Che è un po' più grande di un ventiduesimo[31].

4.3.3 Pagina 46

Dobbiamo ammettere di essere rimasti parecchio stupiti dalla mancanza di commenti alla Pagina 46 dello scorso numero. Siete rimasti tutti con la stessa espressione di Alice? Per fortuna **Caronte** (dagli occhi di bragia) ha continuato la sua missione, e possiamo finalmente spiegarvi cosa il Capo voleva dimostrare, o meglio lo lasciamo fare a Lui.

Andando a cercare sul numero 62 la soluzione del "Quasi Impossibile" sulla quale vi ho intrattenuto, la mia attenzione è stata attratta dal multiplo paragrafo Pagina 46 e quindi sul Bungee Jumpers relativo dove si parla di cerchi, triangoli e corde. Anche a questo proposito ho qualche commento da fare, dedicato prevalentemente a d'Alembert, che mi pare sia il responsabile di pag. 46.

Quello che si può dire, in merito al quesito posto, è che quasi ogni risposta, che possa sembrare sensata, è giusta o, equivalentemente, che è sbagliata; personalmente, tra tutte le probabilità che si possono proporre, quella che trovo più giusta delle altre probabilità altrettanto giuste (o sbagliate) è 1/3, e il perché ve lo spiegherò tra un po'. Questo è infatti uno di quei problemi in cui si può *correttamente* dire che la risposta dipende dal caso o, meglio, dal punto di vista. In altre parole, se il quesito ammette, per evidenti motivi di simmetria, risposte multiple distinte, tutte corrette, questo vuol dire che si possono considerare diverse simmetrie possibili e che per ognuna c'è una risposta corretta. In altre parole ancora, il problema è mal posto. Infatti è implicitamente formulato nel modo seguente: dato per scontato che la probabilità di un evento sia il rapporto tra il numero di casi favorevoli ed il numero di casi possibili, quale è il rapporto tra il numero totale di corde che si possono tracciare in un cerchio di raggio r ed il numero di corde di lunghezza maggiore di $\sqrt{3}r$? La domanda posta è equivalente alla domanda: quanto vale il rapporto ∞/∞ ? e tutti sappiamo che tale rapporto dipende da come "sono fatti" i due infiniti!

Il problema può essere formulato in modo non ambiguo considerando le corde appartenenti alle rette di un fascio passanti per un punto arbitrario, esterno od intero al cerchio, e chiedendosi quale sia la probabilità, scegliendone una a caso, che la sua lunghezza sia maggiore di $\sqrt{3}r$. La soluzione di questo problema contiene, come casi particolari, le risposte 6 e 7 di pag. 46. La risposta **8**, invece, assume una definizione di probabilità affatto originale, ipotizzando una corrispondenza (biunivoca?) tra corde e loro centri, che non ho voglia di mettermi ad analizzare a fondo; a prima vista sembra che si possa dire che **8** è il quadrato di **6**, dato che 1/4 è il quadrato di 1/2 e che in **8** si parla di rapporti tra aree, invece che di rapporti tra segmenti come in **6**.

Tornando alla formulazione da me data del problema, sia dunque C un punto distante di R (che per fissare le idee supporrò inizialmente esterno al cerchio) dal punto O, centro di un cerchio di raggio $r < R$ e $\overline{AB}$ una corda secata dal cerchio

[31] ...se vi sta venendo in mente di fare i conti con i Codici di Hensel, siete fortunati (credo): 7558279 dovrebbe essere primo (chiedete a ChiQua, per essere sicuri), quindi la Sequenza di Farey con la quale vi trovate a lavorare dovrebbe avere un po' meno di quindici milioni di elementi.

su una generica retta del fascio passante per *C* e formante un angolo α la retta del fascio passante per *O*; questa può essere considerata come l'asse di simmetria del problema, essendo la bisettrice dell'angolo coperto dal fascio di secanti (intercettate dal cerchio nel fascio di rette di centro *C*) avente semiapertura $\theta = \arcsin(r/R)$. Per *"evidenti ragioni di simmetria"* mi limiterò a considerare solo metà di tale fascio di secanti, quelle per cui si ha $0 \le \alpha \le \theta$.

Ricordando il teorema di Pitagora ed un po' di trigonometria, è facile rendersi conto che la lunghezza della corda $\overline{AB}$ è

$$\overline{AB} = 2\sqrt{r^2 - (R\sin\alpha)^2}$$

Essendo $\sqrt{3}r$ la lunghezza del lato di un triangolo equilatero inscritto nel cerchio dato, la richiesta che sia $\overline{AB}$ maggiore di tale lato si traduce nella disuguaglianza

$$2\sqrt{r^2 - (R\sin\alpha)^2} > \sqrt{3}r$$

che a sua volta implica che sia soddisfata la disugualianza

$$\sin\alpha < \frac{r}{2R}$$

(si ricordi che ci limitiamo a considerare valori di $\alpha \in (0, \theta \equiv \arcsin(r/R))$). Questa è identicamente soddisfatta per ogni $r < R/2$, mentre implica una effettiva limitazione per $r > R/2$ e quindi, in particolare, per il caso di *C* esterno al cerchio ($r > R$) che stiamo considerando. In tal caso, gli eventi favorevoli sono dati da $\alpha \in (0, \alpha_M)$, con $\alpha_M = \arcsin(r/2R)$, mentre gli eventi totali sono dati da $\alpha \in (0, \theta)$. La probabilità richiesta è dunque

$$P = P(R) = \frac{\arcsin(r/2R)}{\arcsin(r/R)} \text{ per } r > R \qquad \textbf{[004.002]}$$

La **[2]** ci mostra che, per il verificarsi dell'evento richiesto, esistono infinite possibili probabilità, che corrispondono agli infiniti possibili punti di vista, tutti i punti *C* da cui si può guardare il cerchio, essendo equivalenti (per evidenti ragioni di simmetria) quelli posti alla stessa distanza *R* da *O*.

In particolare, effettuando nella **[2]** un limite per $R \to \infty$ (che corrisponde al primo caso considerato in **6** Pagina 46), si ha

$$P(\infty) = \lim_{R\to\infty} \frac{\arcsin(r/2R)}{\arcsin(r/R)} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{\frac{r}{2}\left(-\frac{1}{R^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{2R}\right)^2}} \frac{\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}}{r\left(-\frac{1}{R^2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Prendendo invece il punto *C* sulla circonferenza, considerando cioè il caso di *R*=*r*, dalla **[2]** si ha subito

$$P(r)=\frac{\arcsin(1/2)}{\arcsin(1)}=\frac{\pi/6}{\pi/2}=\frac{1}{3}$$

e si ottiene così la predizione **7** di pagina 46. Come preannunciato, questa è per me la probabilità favorita anche nel caso del problema mal posto, perché la probabilità che una persona, a cui chiediate di tracciare a caso una corda di un cerchio, inizi a tracciarla proprio da un punto della circonferenza è praticamente uguale ad uno; solo un mentecatto partirebbe da un punto distante 100 Km ($=\infty$) dal cerchio e solo una persona poco razionale partirebbe da un punto interno al cerchio, dovendo allora costruire la corda con due segmenti giuntati, ovvero ripassare su un segmento già tracciato.

Se però vogliamo considerare anche il caso di C interno al cerchio, cioè $r<R$, allora dobbiamo distinguere i due casi di R rispettivamente maggiore e minore di $r/2$. Nel primo, $r/2<R<r$, vale sempre la limitazione $\alpha<\alpha_M$, mentre il campo di variabilità di α è l'intervallo $(0,\pi/2)$ (attenzione a non fare doppi conteggi!) e quindi si ha

$$P(R)=\frac{\arcsin(r/2R)}{\pi/2}\ \text{ per }\ r/2<R<r$$

Nel secondo, $R<r/2$, non c'e più limitazione su α, i casi favorevoli e quelli permessi coincidono e quindi si ha

$$P(R)=1\ \text{ per }\ R<r/2$$

5. Quick & Dirty

Considerate le seguenti affermazioni:

1. Esattamente 1 di queste affermazioni è falsa.
2. Esattamente 2 di queste affermazioni sono false
3. Esattamente 3 di queste affermazioni sono false
4. Esattamente 4 di queste affermazioni sono false
5. Esattamente 5 di queste affermazioni sono false
6. Esattamente 6 di queste affermazioni sono false
7. Esattamente 7 di queste affermazioni sono false
8. Esattamente 8 di queste affermazioni sono false
9. Esattamente 9 di queste affermazioni sono false
10. Esattamente 10 di queste affermazioni sono false

Quali sono vere?

Ognuna di queste affermazioni contraddice le altre, quindi al più una di esse è vera.

Supponiamo non ci sia nessuna affermazione vera: questo significa che l'affermazione [10] sarebbe vera, il che è una contraddizione: quindi almeno una di esse è vera. Ossia una è vera e 9 sono false; ma questo è quello che ammette la [9], che quindi è l'unica vera.

6. Pagina 46

Sappiamo che è $2^{10} = 1024$; quindi possiamo scrivere

$$2^{100} = 1024^{10} \qquad \text{[006.001]}$$

In prima approssimazione, $1000^{10} = 10^{30}$ ha 31 cifre; essendo $1000 < 1024$, 2^{100} ha ***almeno 31*** cifre.

Studiamo ora il rapporto $\frac{1024^{10}}{1000^{10}}$. Possiamo dire:

$$\frac{1024^{10}}{1000^{10}} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} \qquad \text{[006.002]}$$

E quindi:

$$\begin{aligned}\left(\frac{41}{40}\right)^{10} &= \frac{41}{40}*\frac{41}{40}*\frac{41}{40}*\frac{41}{40}*\frac{41}{40}*\frac{41}{40}*\frac{41}{40}*\frac{41}{40}*\frac{41}{40}*\frac{41}{40} \\ &< \frac{41}{40}*\frac{40}{39}*\frac{39}{38}*\frac{38}{37}*\frac{37}{36}*\frac{36}{35}*\frac{35}{34}*\frac{34}{33}*\frac{33}{32}*\frac{32}{31} \\ &< \frac{41}{31} < 10\end{aligned} \qquad \text{[006.003]}$$

Dove il secondo passaggio è giustificato dal fatto che:

$$\begin{aligned}\frac{41}{40} &= 1 + \frac{1}{40} \\ \frac{40}{39} &= 1 + \frac{1}{39} \\ &\ldots\end{aligned} \qquad \text{[006.004]}$$

e che

$$\frac{1}{40} < \frac{1}{39} < \ldots < \frac{1}{31} \qquad \text{[006.005]}$$

Quindi, dalla [001]

$$2^{100} = 1024^{10} < 10 * 1000^{10} \qquad \text{[006.006]}$$

Ossia, ha ***meno di 32*** cifre.

Quindi, ha ***31*** cifre.

Più semplicemente, se $\log_{10} 2 = 0.30103$, si ha:

$$\log_{10} 2^{100} = 100 * \log_{10} 2 = 30.103 \qquad \text{[006.007]}$$

E quindi il risultato ha ***31*** cifre.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Due palle così! [001] - Come farlo a fette

L'argomento è piuttosto noioso, ma il risultato sarà, ritengo, abbastanza interessante; cominciamo da lontano, complicando una definizione piuttosto semplice. E ne approfittiamo per inventarci un simbolo, visto che nel set dei caratteri matematici del Formula Editor non c'è.

Per prima cosa, definiamo l'***unione disgiunta***:

$$A\bigcup_d B = A\cup B \quad e \quad A\cap B = 0 \qquad \texttt{[007.001]}$$

Ora, la definizione che ci interessa è quella di ***equidecomponibilità***; in pratica, la possibilità di dividere un dato insieme (in $\Re^n$, giusto per stare sulle generali) in diverse unioni disgiunte (insomma, come tagliare un salame multidimensionale…):

> Due insiemi ***A*** e ***B*** sono *equidecomponibili* e scriviamo $A \sim B$ se è possibile trovare degli insiemi $A_1,\ldots,A_n$ e delle isometrie dirette (*rototraslazioni*) $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n$ per cui sia:
>
> $$A = A_1\bigcup_d A_2\bigcup_d\ldots\bigcup_d A_n \text{ e } B = \vartheta_1(A_1)\bigcup_d\vartheta_2(A_2)\bigcup_d\ldots\bigcup_d\vartheta_n(A_n) \qquad \texttt{[007.002]}$$

Tagliando un po' per i campi: prendete un oggetto ***A***, lo tagliate in un qualche modo (nei pezzi ***A₁***,…***Aₙ***) e lo ricomponete con una forma diversa girando in vario modo i pezzi con aria perplessa (applicando quindi le rototraslazioni); come chiunque abbia provato a fare un rompicapo ad incastro sa, la forma risultante è sempre diversa da quella che si aveva all'inizio…

E questo sembra un concetto decisamente semplice, piano e lineare; andiamo avanti.

La prossima cosa semplice che cerchiamo di complicare è il concetto di ***volume*** (generalizzato): siccome sapete tutti di cosa sto parlando, andiamo subito sul difficile.

> Il ***volume*** è una *misura invariante sulle parti di* $\Re^n$, $\mu : P(\Re^n) \to [0,\infty]$ per cui valgono le seguenti proprietà:
>
> - $\mu\left(\bigcup_d^{k\in N} A_k\right) = \sum_{k\in N} A_k$. Ossia, ***additività*** numerabile.
> - Se $\vartheta : \Re^n \to \Re^n$ è un'*isometria*, $\mu(\vartheta(A)) = \mu(A)$. Ossia, ***invarianza***
> - $0 < \mu(A) < \infty$. Ossia ***non banalità***.

Se la vostra impressione è che stiamo complicando in modo incredibile dei concetti elementari, sono pienamente d'accordo con voi; adesso arriva il bello.

Tutte balle; il volume non esiste.

Non sono impazzito. E adesso vi faccio un esempio. Non è mio, è l'***Esempio di Vitali***.

> È possibile trovare degli insiemi disgiunti $C_k \subset [0,1)$ tutti decomponibili allo stesso insieme ***T*** tali che:

$$[0,1)=\bigcup_{d}^{k\in N} C_k \qquad [007.003]$$

In pratica, se esistesse la misura invariante "volume" sulle parti di $\Re$, si avrebbe:

$$\begin{aligned}\mu([0,1)) &= \sum_{k\in N}\mu(C_k)\\ &= \sum_{k\in N}\mu(T)\end{aligned} \qquad [007.004]$$

Ora, quanto vale $\mu(T)$?

Se fosse $\mu(T)=0$, allora si avrebbe $\mu([0,1))=0$.

Se fosse $\mu(T)>0$, allora si avrebbe $\mu([0,1))=\infty$.

Ossia, la misura è ***banale***. La dimostrazione è piuttosto complessa, quindi non ve la forniamo qui, ma se siete tanto masochisti chiedete, potremmo decidere di passarvela.

Domanda spontanea, a questo punto, è dove sia la fregatura.

Quanti di voi si sono accorti che l'intervallo che abbiamo definito è un intervallo ***aperto***?

Quando abbiamo definito l'equidecomponibilità (attraverso l'unione disgiunta), in sostanza abbiamo detto che una figura geometrica è l'insieme dei propri punti, e che un punto è o da una parte o dall'altra. Qualunque fisico o ingegnere aderirà immediatamente a quest'idea, ma ogni buon matematico vede immediatamente nascere un piccolo problema.

Esempio ragionevolmente semplice: consideriamo un rettangolo, $[0,2]\times[0,1]\in\Re^2$ e tagliamolo in due quadrati; ora, intuitivamente,

$$[0,2]\times[0,1]=([0,1]\times[0,1])\bigcup_{d}([1,2]\times[0,1]) \qquad [007.005]$$

Ora, qualcuno di voi mi sa dire a quale dei due insiemi appartiene il segmento $\{1\}\times[0,1]$?

Essendo la linea lungo la quale effettuiamo la divisione, dovrà appartenere ai due insiemi, quindi l'unione ***non*** è disgiunta. E se questo vi sembra sia un buttare alle ortiche tutta la geometria, guardate che Euclide non ci era mica cascato; se andate a rivedervi gli Elementi, vedete che "punto" e "retta" sono *entità separate* e l'appartenenza di un punto ad una retta è una relazione tra oggetti ***distinti***.

Insomma, quel che ci frega è l'equidecomponibilità, che suppone di poter dividere con un taglio netto l'insieme. Dobbiamo inventarci qualcos'altro (che, probabilmente, riuscirà più complicato) per tagliare in due le cose; per dirla con Heinlein, "Il rasoio di Occam è troppo spuntato per tagliare la barba al filosofo".

Forse, avvicinandoci un po' di più al mondo reale, possiamo trovare qualcosa di più sensato. E, probabilmente, la definizione di ***equiscindibilità*** aiuta. Per prima cosa, inventiamoci un nome per le cose che usiamo; un *n_poliedro* è una retta per ***n=1***, un poligono per ***n=2***, eccetera…

Due n_poliedri $A, B \in \Re^n$ sono ***equiscindibili*** se è possibile trovare degli n_poliedri $A_1, \dots, A_N$ e delle isometrie (dirette[32]) $\vartheta_1, \dots, \vartheta_N$ tali che

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_N \ , \ B = \vartheta_1(A_1) \cup \dots \cup \vartheta_N(A_N) \qquad [007.006]$$

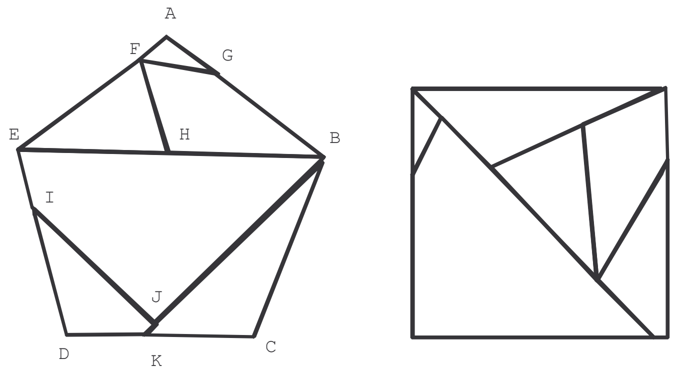
E per cui *le intersezioni* $A_i \cap A_j$, $\vartheta_i(A_i) \cap \vartheta_j(A_j)$ *siano contenute in piani* $(n-1)$*dimensionali.*

E qui casca l'asino, con licenza parlando.

Vorremmo farvi notare che l'area di un qualsiasi poligono viene calcolata grazie a questo metodo; prima si riconduce tutto ad una serie di triangoli, poi si trasforma ogni triangolo in un rettangolo, poi... Beh, voglio sperare la cosa sia chiara.

E, in effetti, qualsiasi poligono può essere trasformato in un rettangolo, con questo metodo. Fermiamoci un attimo, prima che fonda il cervello..

Vorremmo fare un rapido ritorno al campo della matematica ricreativa; questo metodo ci permette di trasformare tranquillamente un poligono in un rettangolo e viceversa; però, un problema abbastanza interessante (e piuttosto difficile) è quello di riuscire a trasformare un qualche poiligono in un altro poligono con il *minor numero di tagli*; Sono completamente negato per la soluzione di problemi del genere, ma ho una trentina di foglietti con le migliori soluzioni ad oggi; giusto per ingannare l'oretta di ritardo dell'aereo, è sempre divertente calcolare "dove vadano fatti i tagli". Posto che vi interessi, ve ne passo uno (non facilissimo, ma neanche tra i più difficili); si tratta di trovare dove fare i tagli. Se vi divertono, gli altri arrivano per l'estate.



La cosa, però, può non essere vera in spazi più ampi:

Teorema di Dehn: *Un tetraedro e un cubo dello stesso volume non sono equidecomponibili.*

Risaliti tutti, sulla sedia? Siamo in un campo che, prima di leggere i teoremi, è meglio allacciare le cinture. Questo teorema vorremmo dimostrarlo, perché troviamo (almeno, trova uno di noi) la dimostrazione decisamente carina.

L'idea è di associare ad ogni poliedro un numero reale attraverso una funzione ***F*** che sia *invariante per equiscissione*[33]; indi, non ci resta altro da fare che verificare che il cubo e il tetraedro hanno valori diversi secondo questa funzione. Prima la scrivo, poi cerchiamo di capire cosa c'è dentro.

[32] Questa parola, nell'originale, non c'era. Giusto per dare del cibo per la mente, le isometrie non dirette (meglio conosciute come riflession) in ***n*** dimensioni, sono isometrie dirette in ***n+1*** dimensioni? A me sembra di sì, ma non ne sono sicuro…

[33] Ossia, se ***A*** e ***B*** equiscindono ***C***, allora si ha ***F(C)=F(A)+F(B)***, ossia la funzione è additiva e lineare, ossia è $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e, per ***x razionale***, $f(x) = xf(1)$. La seconda si ricava dalla prima per induzione.

$$F(P) = \sum_s \left[f(\alpha_s) * l(s) \right] \qquad \text{[007.007]}$$

Allora, cerchiamo di tenere conto di tutto; ***P*** è il poliedro, sommiamo su tutti i suoi spigoli ***s***, $\boldsymbol{\alpha_s}$ è l'angolo formato dalle due facce che hanno ***s*** in comune *[Frase a dir poco temeraria, visto di cosa stiamo parlando.... comunque mi avete capito (RdA)]*, ***l(s)*** è la lunghezza dello spigolo e ***f*** è una funzione additiva per cui $f(\pi)=0$. Quest'ultima affermazione, dalla definizione di funzione additiva, implica che sia anche $f(\pi/2) = f(2\pi) = 0$.

Ora, non è complicato vedere che ***F*** è invariante per equiscissione; supponiamo ***P*** sia equiscisso in $\boldsymbol{P_1,\dots,P_N}$; ogni spigolo originale ***s*** andrà a contribuire a pezzi di spigoli sui $\boldsymbol{P_i}$, ma la somma di quei pezzi sarà sempre quella; stesso discorso per quelli che erano gli angoli di ***P***. Già, però se io "taglio", genero nuovi spigoli... Assolutamente insignificanti, in quanto (se in origine erano "dentro" ***P***) la somma degli angoli su quegli spigoli vale 2π o π se erano su una faccia; in ogni faso, ***f*** vale sempre zero.

Adesso ci arriviamo, calma. Non dovreste avere problemi a calcolare ***F*** per quanto riguarda il cubo, considerato che gli angoli degli spigoli valgono $\pi/2$; infatti, questo azzera la nostra funzione.

Ben diverso il discorso per per il tetraedro; qui, l'angolo vale $\boldsymbol{\arccos}\left(1/3\right)$, ma questa grandezza non è un multiplo (razionale) di $\boldsymbol{\pi}$. Quindi, non potrà essere pari a zero, e quindi ***non sono equiscindibili***.

Bene, se siete riusciti ad arrivare fin qui, ci sono probabilità che sopravviviate alla prossima puntata.

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms