Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Aprile 2003 - Anno Quinto

1. Di minuscole forme

"Non lasciate che la persona amata resti troppo lontano da voi. L'amore e` strano e spietato, e pur se quando a voi forte la stringete non sembra esservi al mondo forza tanto grande da potervi separare, e` anche pur vero che basta vederla a qualche passo di distanza, perché anche la passione piu` forte cominci subito ad interrogarsi sulla propria natura e sui propri limiti. "E` davvero lei, l'anima gemella?" comincia a chiedersi il cuore. Certo, la piu` sublime delle magie resta nascosta nel fatto che la capacita` d'amare si rafforza continuamente sia dall'amare, sia dall'essere amati: come se ogni anima riuscisse a commisurarsi all'altra, e a rendere amore secondo le proprie capacita` e misure, in accordo con la passione che sente provenire dall'altro e in perfetta armonia con il respiro della Grande Madre Terra, la perfetta regolamentatrice. Ma i pochi passi di distanza gia` allentano le dimensioni assolute dell'Infinito, e se la distanza aumenta il legame si affievolisce, e si affievolisce ancora piu` velocemente di quanto l'aumentare della separazione sembrerebbe poter consentire. E se infine la persona amata scompare dietro l'orizzonte, se il vento ne cancella il profumo e se il tramonto ne oscura l'immagine, di quella passione infinita in pochissimo tempo non resta che il ricordo, e con esso il rimpianto. Per questo, non lasciate che la persona amata resti troppo lontano da voi."

E se fosse possibile governare con leggi e numeri i moti del cuore, minimizzare il dolore e massimizzare la gioia, solo ponendo a zero la derivata prima della funzione continua delle emozioni? Non ne siamo capaci, non ne saremo capaci probabilmente mai. E non e` affatto detto che questa sia una cattiva notizia.

E` assai probabile che agli albori della scienza qualcuno ci abbia provato, a farlo. Ci deve pur essere stato un momento nella storia, probabilmente tra il sedicesimo e il diciassettesimo secolo, in cui l'uomo ha giocato a riassumere gli eventi naturali, a riepilogarli in leggi brevi e maneggevoli, senza ancora distinguere troppo sulla natura stessa degli eventi che provava a descrivere. E se avesse avuto i pensieri riportati in corsivo all'inizio di quest'articolo in testa, come avrebbe provato a metterli in formule?

Avrebbe forse definito l'amore come "Folle passione", e avrebbe cercato delle regole che ne descrivessero il comportamento. Avrebbe forse provato a definire i "moti del cuore", e avrebbe presto stabilito che ne occorrono due, interagenti. E interagenti in maniera tale che "rendano amore secondo proprie capacita`", e secondo "l'armonia della Grande Madre". E in qualche maniera, il moto del primo cuore e` rafforzato, moltiplicato, dal moto del secondo. Ma il messaggio piu` forte dello scritto e` che i due cuori devono restare vicini, battere all'unisono, sentirsi e ritrovarsi d'appresso, perché la lontananza uccide rapidamente la comunione dei sentimenti. La passione "si affievolisce" e muore assai piu` rapidamente di quanto cresca la separazione stessa. La distanza e` veleno assoluto, per la "Folle passione".

E cosa ci vuole, allora? Limitiamo i segni alle iniziali, e siano **m** e **m`** i "moti del cuore"; sia **G** il respiro della "Grande Madre", sia **F** la "Folle passione". E **d** sia la "diabolica distanza" che nella doppia "d" iniziale porta gia` con se la sua potenza al quadrato, tanto e` crudele il demonio nel combattere l'amore tra gli esseri umani. E, quel che i moti del cuore moltiplicano con l'ausilio della Grande Madre che pure moltiplica, il diavolo tenti di distruggere, rendere piccolo, con il crudele artificio della divisione. Sara` allora:

$$F = G\frac{mm'}{d^2} \qquad [1]$$

Non fate quella faccia, adesso.

Non temete, il vecchio Isaac non sarebbe scandalizzato nel vedere la sua formula della gravitazione universale massacrata in questi giochi dal basso effetto narrativo: e neanche i milioni di romantici dovrebbero arrabbiarsi poi troppo. L'amore sfugge ancora al determinismo, soprattutto perché sfugge alle definizioni. E la legge che abbiamo appena scritto non e` affatto una legge, e per molte ragioni.

Ad esempio, esiste una teoria che addirittura sostiene il contrario di quanto afferma la nostra [**1**]: laddove noi sosteniamo che la forza dell'amore decresce in ragione inversa del quadrato della distanza, due esimi studiosi affermano una regola piu` complessa. Sostengono infatti che la grandezza **d** della nostra formula non ha una collocazione univoca, visto che addirittura dovrebbe essere posizionata al numeratore, almeno per **m** e **m`** sufficientemente grandi; resterebbe invece al denominatore (e presumibilmente con un esponente elevato) per **m** e **m`** piccoli[1].

Ma, soprattutto, quello che e` assolutamente inimmaginabile e` la rigorosa applicazione quantitativa della legge. Supponendo la piena validita` della **[1]**, infatti, dovremmo aspettarci che due innamorati alla distanza di due metri si amino esattamente un quarto di quanto si adorino ad un solo metro di distanza. E questo, signori, e` pura follia sperarlo, come sa chiunque sia passato sotto le forche caudine

[1] Modugno-Cinquetti, "*La lontananza sai e` come il vento, spegne i fuochi piccoli, accende quelli grandi*" – Festival di Sanremo 1970

della passione amorosa. E in fondo, che la **[1]** non funzioni in realta` ci rassicura, e soprattutto non ci stupisce.

Ed e` proprio perché non ci stupisce il suo non-funzionamento sugli affari di cuore, che dovrebbe invece lasciarci di stucco il fatto che funzioni cosi` bene per gli affari gravitazionali. Perché per descrivere quelli va benissimo: e` perfetta fino ad un bel numero di decimali[2]. E se adesso riuscite davvero a mettervi nei panni di un fisico di quei tempi, la sensazione di stupore che vi assale dovrebbe davvero essere grandissima: piu` o meno la stessa che proveremmo noi adesso, se venissimo a scoprire che la **[1]** funziona bene anche per gli innamoramenti. Le pagine piu` belle di Galileo sono dettate da questo preciso ed esattissimo stupore, ed e` uno stupore che perdura: in pieno ventesimo secolo Eugene Wigner dichiara: "L'enorme utilita` della matematica nelle scienze della natura e` qualcosa che confina con il mistero e che non ha alcuna spiegazione razionale"[3].

"Formula" e` gia` un diminutivo. Significa "piccola forma", e per le formule della fisica il significato e` proprio questo. Le formule racchiudono e riassumono il comportamento, la "forma" estesa e complessa del fenomeno che tentano di descrivere. Tutto il moto dei pianeti e delle stelle, della forchetta che cade dal tavolo e delle traiettorie dei razzi, riassunti in pochi segni su carta. Una sintesi esattissima e micidiale.

In fondo, quel che fanno le formule dei fisici e` stabilire una analogia. Come potremmo ricordare in qual misura decresce la gravita` del Sole? Basta ricordarsi come si comportano i numeri quando li eleviamo al quadrato e ne facciamo l'inverso. Analogia tra un fenomeno naturale e la nostra maniera di conoscere il comportamento numerico. Il fatto che questa analogia si sia finora sempre mostrata attuabile resta senza spiegazione, misteriosissima. Ma almeno ci spiega perché i fisici amano le formule: per loro hanno una capacita` di sintesi totale, nel conoscimento della natura: minuscole forme maneggevoli, trasportabili e trasformabili. Non ci fossero loro, non resterebbe che la descrizione puntuale e verbosa di ogni evento; per descrivere il piu` piccolo fenomeno occorrerebbe sempre qualcosa delle dimensioni di un'enciclopedia, e la certezza assoluta e perenne della sua incompletezza. Senza poi contare che l'analogia produce, di fatto, nuova conoscenza: fidandosi di essa, i fisici che trovano una formula "sintetica", una cioe` che sintetizza efficacemente un evento del mondo fisico, non esitano a sottoporla a tutte le torture matematiche che a quella "forma di formula" sono applicabili, nella speranza che l'analogia perduri. Perché se perdura si otterranno a basso costo altre conoscenze, o, quantomeno, previsioni di altre conoscenze. E` per questo che la fisica teorica assomiglia tanto alla matematica.

Nel secolo dell'informatica, altre formule si incontrano nascoste nei linguaggi di programmazione. Assimilate genericamente a formule matematiche o fisiche, sono spesso in realta` delle cose assai diverse. La banalissima formula

$$A = B + C \qquad \textbf{[2]}$$

Viene di solito letta da un fisico come "La cosa (generalmente reale e tangibile, anche se non sempre) simboleggiata da **A** e` uguale alla somma delle cose (anche queste in genere reali a tangibili, anche se non sempre) **B** e **C**! Chi lo avrebbe mai detto?" Laddove il "chi lo avrebbe mai detto?" e` tanto piu` entusiasta e allegro quanto piu` **B** e **C** rappresentano "cose" che non sembravano inizialmente aver nulla a che vedere con **A**.

[2] Oltre un certo numero di decimali arriva un tizio di Ulm a dire che la [1] non va piu` bene... pero` nel farlo ci regala un'altra formula piu` accurata, quindi per i nostri scopi la cosa non cambia.

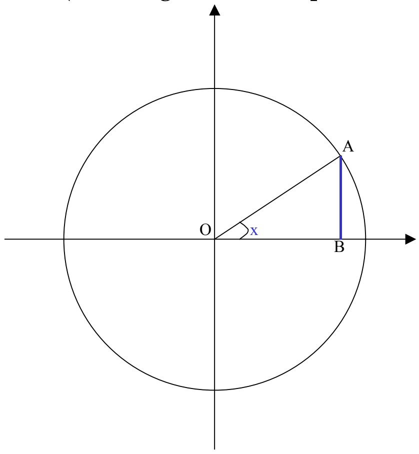
[3] "L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze della natura" – Eugene P. Wigner, 1959.

La stessa formula **[2]**, in un programma (sintassi di linguaggio a parte), significa semplicemente "Da adesso in poi ricordati che abbiamo questa roba che abbiamo deciso di chiamare **A**, e che fino a nuovo ordine vale quanto la somma di **B** e **C**. Te li ricordi, **B** e **C**? Ne avevamo parlato un attimo fa... Sette istruzioni fa avevamo deciso che **A** aveva un altro valore? Fa niente, da adesso in poi vale **B + C**".

C'e` insomma una bella differenza tra lo scoperta di una uguaglianza imprevista e una assegnazione, eppure si usa lo stesso simbolo "=" con una certa nonchalance. Simbolo che qualche antico genio ha proposto a guisa di ideogramma: il disegno due bastoncini uguali fra loro, per rappresentare il concetto di "uguale".

Sia i fisici che gli informatici hanno rubato ai matematici l'idea di mettere in formule i punti consolidati del sapere anche se, a ben vedere, le formule matematiche sono diverse sia da quelle fisiche che da quelle informatiche. Al principio di ogni trattazione matematica, le formule sono di solito delle "definizioni". Una definizione e` un battesimo, la decisione di un nome per un concetto o un insieme di concetti: non e` una cosa banale quanto puo` sembrare a prima vista, ma e` in genere assorbita dal discente senza troppi patemi. La **[2]**, per un matematico, va pertanto letta in maniera diversa a seconda che si tratti di una definizione o di un teorema. Se e` una definizione, significa piu` o meno: "adesso che abbiamo ben compreso cosa siano **B** e **C**, iniziamo a risparmiare inchiostro e parole, e invece di riscrivere molte volte l'espressione **B + C**, vi avverto che al suo posto mi limitero` a scrivere **A**". Se invece e` un teorema, vuol dire tutta un'altra cosa: "Vi ricordate quando all'inizio vi ho detto che cosa erano **A**, **B** e **C**? Beh, da quelle definizioni e dal resto della trattazione che avete appena letto, discende che **A** e` esattamente la stessa cosa che **B + C**".

E, anche qui, trattiamo di cose maledettamente diverse. La prima e` quasi solo lo stabilirsi di una convenzione[4], la seconda e` la notizia (che magari non sospettavamo neppure) che due cose sono in realta` la stessa cosa. Il simbolo resta lo stesso; nonostante il proverbiale rigore dei matematici, l` "uguale per definizione" non e` diverso dall` "uguale per conclusione". Cosa che non cessa di stupire alcuni acuti critici delle notazioni.



Non sempre la cosa e` evidente, del resto. E non lo e` quasi mai agli studenti. Prendiamo ad esempio quella perversa branca della matematica zeppa di seni e tangenti[5]. La definizione di **sen(x)** e` tranquillamente assorbita da tutti come rapporto di due segmenti ben definiti e sposati da un angolo, ma dopo un po` che la si usa, ci si dimentica quasi che sia una definizione:

[4] Qui stiamo avventurandoci in terreni assai rischiosi, pascolo abituale e luogo di risse per epistemologi e filosofi della scienza. Non abbiamo intenzione di percorrere strade inadatte all'innata modestia di RM, ma non vorremmo neppure lasciar intendere che interpretiamo le definizioni come mere convenzioni, perché presupponiamo che gia` a questo livello le definizioni (e anche gli assiomi) devono avere una consistenza interna ben marcata e anche una coerenza (o quantomeno, assenza di incoerenza) verso le altre sezioni della matematica. Come disse il buon Frege:"Le proprieta` degli enti matematici sono contenute nella loro definizione, ma come la pianta e` contenuta nel seme, non come le travi sono contenute nella casa".

[5] Il piu` smaliziato degli studenti della classe blocca in un angolo la studentessa piu` carina, e con occhi accesi indica le dotazioni toraciche della fanciulla "Seno e Coseno...", e prima che la ragazza si renda conto dell'inevitabile conclusione, lancia le mani in stretta relazione biunivoca di contatto: "...Tangente e Cotangente!". Probabilmente succede un milione di volte all'anno, almeno in Italia, alla seconda lezione di trigonometria piana.

$$\operatorname{sen}(x)=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$$ **[3]** [6]

e che come tale ce la si porta appresso per tutta la trigonometria: ci si arrabatta con bisezioni e prostaferesi, si tirano in ballo un sacco di altri concetti, ma di fatto resta una definizione, e per passare "dal concetto al numero" si fa un grande uso di tavole (quando eravamo giovani noi vecchi), di regoli calcolatori, di calcolatrici o di fogli elettronici. Nulla di male, certo: e, in fondo a tutto, c'erano sempre i teoremi di Pitagora e le formule di Erone che giustificavano le tavole piene di mantisse. Insomma, anche il segno di "uguale per definizione" ha una gran bella importanza.

Poi, qual fulmine a ciel sereno, arriva improvvisamente[7] una formula di questo tipo:

$$\operatorname{sen}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots$$ **[4]**

che dovrebbe lasciare gli astanti a bocca aperta per lo stupore.

Una formula come la **[4]** stravolge quasi il concetto stesso di "formula". Certo, come spesso accade durante le "rifondazioni" della matematica, una volta appurata la sua esattezza[8] la si puo` addirittura assumere come "definizione della funzione seno", ma il suo ingresso nella storia e` assolutamente piu` forte e devastante di quello di una definizione. A dirla tutta, ha forma e contenuto talmente insoliti che anche l'inserimento nelle formule di tipo "teorema" sembra andargli stretto.

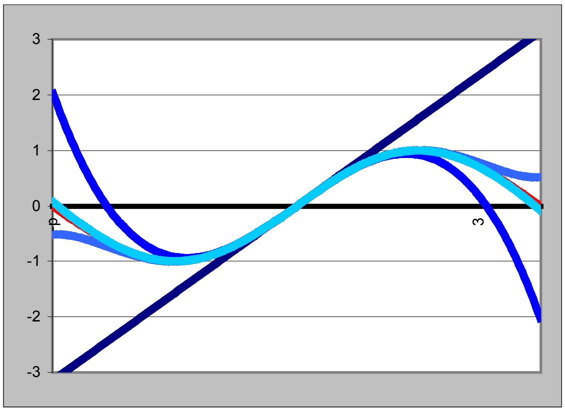
Chi non frequenta la matematica tende spesso a considerarla fredda, asettica, troppo precisa, perfino. Sono persone che spesso sentono il "rigore" come una catena, come una limitazione alla liberta`. Pur senza entrare in una diatriba sciocca e senza fine, viene da chiedere a quelle persone se conoscono altre attivita` mentali, al di fuori della matematica, in cui esista una teoria rigorosa dell'approssimazione: quasi un ossimoro, con tutto il fascino che ne consegue. La **[4]** uguaglia una grandezza finita ad una somma infinita, e gia` questa piccola sciocchezza si porta dentro qualche secolo di filosofia greca e di paradossi eleatici. Ha la precisione di tutte le formule matematiche, se si decide di estendere la somma dei termini all'infinito, ma consente anche di fermarsi, di guardare come e quanto la somma sia "approssimabile" alla

[6] Solo per mostrare quanto sia fragile il territorio dell'epistemologia, gli autori di questo pezzo si sono ritrovati a discutere a lungo su "cosa sia" effettivamente la "x" che compare in "sen(x)". Viene usualmente considerato, almeno operativamente, un "angolo"; quasi tutte le definizioni formali parlano pero` di "arco" (cosa che si ritrova anche nella funzione "inversa", *arc*sen(x)). L'arco e l'angolo sono rappacificati dalla definizione del radiante, ma lo spirito "fisico" che aleggia in alcuni elementi della redazione ha tirato in ballo anche il concetto (probabilmente una bestemmia, in matematica) di "calcolo dimensionale". La cosa ha assunto toni via via piu` drammatici, sino al punto topico in cui si e` cercato di capire se il concetto di angolo nasca piu` verosimilmente da una visione monodimensionale ("linea" dell'arco sotteso dall'angolo) o bidimensionale ("area" spazzata dal moto di un'asta rigida con un estremo fissato); a questo punto ha fatto la sua comparsa la frase "sottoprodotto della spazzatura", che ricordava in maniera imbarazzante il riciclo e la raccolta differenziata dei rifiuti, e la abbiamo piantata lì. In ogni caso, in ultima analisi (e lo diciamo quasi inconsapevolmente poco piu` avanti nell'articolo), nulla vieta che "x" si limiti ad essere un numero reale e basta. Ci consoliamo pensando che abbiamo scoperto un sacco di cose divertenti, dalle sagitte alle corde, fino ai goniometri degli antichi Babilonesi. Ovviamente, non abbiamo risposte certe alla domanda iniziale, ma noi sopravviviamo anche così, e il senso dell'articolo non dovrebbe soffrirne troppo, quindi proseguiamo...

[7] Arriva cosi` improvvisamente che nella didattica non si sa mai bene quando la si "incontra" per la prima volta. Non nei corsi di trigonometria, comunque.

[8] E verificarla, almeno in maniera formalmente non rigorosa, e` facilissimo. Calcolate (con le tavole, i regoli o i pc) il valore d'un qualsiasi sen(x), e poi con gli stessi strumenti i primi termini della serie infinita. Ne bastano pochi.

funzione cercata, e valutare di quanto si sbaglia nell'interrompersi all'ennesimo termine. Una misura precisa dell'imprecisione.



Provate a riportare sullo stesso grafico i valori della **[4]**, magari animandoli, in ordine successivo: prima la retta data dal solo primo termine, poi la parabola data dalla somma dei primi due, poi la cubica dei primi tre, e cosi` via. Ne risulta questo "avvicinarsi oscillante" alla funzione sen(x) che ha una sua innata eleganza. Curve imprecise nell'avvicinarsi, che migliorano sempre, e si avvicinano all'obiettivo in una danza armonica: troppo alto, troppo basso, ancora un po` troppo alto, ancora un po` troppo basso... e la certezza di sovrapporsi, alla fine. All'infinito[9].

Per quanto rigorosa possa essere, la **[4]** sorprende; e il fatto che sorprenda gia` e` insolito, se la matematica, per propria natura, deve davvero limitarsi a "constatare evidenze di uguaglianza". E sorprende la semplicita` di quelle potenze e fattoriali dispari, e l'alternanza ripetuta dei segni: e` praticamente impossibile non chiedersi cosa generano allora le potenze e i fattoriali pari, e la risposta non sorprende:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots \qquad [5]$$

Ma non sorprende solo per "analogia". Certo, in questo caso l'analogia e` una sorta di analogia "interna", diversa da quella cara ai fisici. Ma in qualche maniera saremmo rimasti stupiti se la **[5]** non avesse avuto un significato "analogo " alla **[4]**; e questo anche se, dal solo esame visivo della sua "forma", niente ci autorizzava a concluderne la **[5]**.

Le formule prolificano, in questa maniera: ma, per quanto ci si possa attendere ancora altri frutti dall'analogia, il passo successivo e` ancora un passo stupefacente:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad [6]$$

Non discende direttamente dalle precedenti: quelle hanno quell'alternanza di segni che la **[6]** non ha, ma la sequenza dei termini e` gia` li` pronta, a dirci che certo ci sara` qualche parentela tra seno, coseno, e il magico "**e**".

Guardate che quelle formule funzionano: sono formule da provare, da verificare, perché non sono immediatamente evidenti. Fatelo: usate il vituperatissimo Excel, calcolate, stupitevi, sorprendetevi. Avevamo detto all'inizio che non dovrebbero esserci sorprese, nelle formule di matematica. Le regole dovrebbero alla fin fine

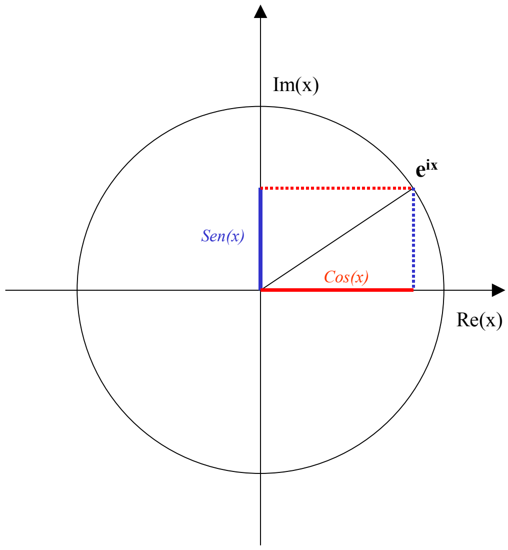
[9] Se c'e` una cosa che ci consola (e non e` la prima volta che lo diciamo) dell'esistenza di RM, e` che frasi come queste sono quasi "indicibili" in qualsiasi altro posto: scrivere di matematica usualmente richiede un rigore particolare, che noi bellamente ignoriamo. Sia come sia, almeno in nota a pie` di pagina, ci premuniamo di avvertire che quello che e` certo, all'infinito, e` il coincidere della funzione sen(α) con lo sviluppo in serie sempre in α. Stiamo pertanto parlando "localmente", di quel che succede al punto α, non necessariamente in tutto l'asse delle x. Ovviamente, succede per qualsiasi α (almeno nel caso citato dello sviluppo del seno) arbitrariamente fissato, ma non ci stiamo sbilanciando a dire che succede "contemporaneamente" per tutti gli α. Mamma mia.. questa e` probabilmente la nota a pie` di pagina che vince il premio speciale della giuria "Come confondere al meglio un concetto gia` confuso".

ripercorrere la logica, il logos, il percorso dei nostri cervelli: una dimostrazione matematica dovrebbe essere una scoperta, non una creazione[10]. E dovrebbe essere una scoperta gia` segnata, solo da "riconoscere" grazie alla dimostrazione. Le definizioni sono davvero solo una maniera comoda di impacchettare le cose? I teoremi matematici davvero solo delle "conseguenze inevitabili"? Allora, come fa ad esserci stupore?

A voler approfondire la cosa, pur continuando a restare miglia e miglia lontani dal rigore matematico, potremmo notare un aspetto per cosi` dire "psicologico" delle tre funzioni in esame. Guardate le facce degli studenti che si cimentano per le prime volte con le derivate: seno e coseno sono legate strette fra loro essendo una la derivata dell'altra (piu` o meno... si, e` un gioco di parole terribile); questo le rende "facili" dal punto di vista della derivabilita`. La funzione esponenziale e` comunque imbattibile, da questo punto di vista, essendo sempre pari alla sua funzione derivata; e questo la rende deliziosa agli occhi di chi deve farci esercizi di calcolo. Basta questa "facilita` di derivazione" a deporre in favore della "parentela" sopra accennata? Probabilmente no. Pero` approfondiamo appena un poco: seno e coseno non sono solo una la derivata dell'altra, sono anche "una la traslazione dell'altra". Date un colpetto alla funzione seno per farla scivolare di $\pi/2$ lungo l'asse delle x, e otterrete la funzione sorella. Ovvio e banale? Certo. Solo che, ad esempio per le rette e le parabole, una traslazione lungo gli assi si perde del tutto, durante la derivazione, cosi` come si perde, almeno nell'aspetto finale, il disegno della primitiva nella derivata. Seno e coseno, invece, "traslano" l'una nell'altra, e mantengono intatta la loro forma anche dopo ripetute derivazioni. Sappiamo che e` solo un'immagine romantica, ma in questo senso si "sente" che le due funzioni trigonometriche sono le due anime dell'immutabile (derivabilmente parlando) $\mathbf{e^x}$.

Riprendiamo la figura di prima: se, come si fa di solito, prendiamo **OA** come pari ad 1 (definizione!), allora **AB** e` il coseno e **OB** e` il seno di **x**. Applichiamo Pitagora, ma con uno scopo diverso dal solito: non per trovare la lunghezza dell'ipotenusa, che sappiamo gia` essere lunga 1, ma per vedere che **AB** e **OB** ci possono servire per definire proprio dove va a finire **OA**: insomma, per definire l'angolo che **OB** fa con l'asse delle **x**. Solo una definizione: si trascina dietro il concetto di "coordinate polari" per i matematici e quello di "fase" per i fisici, ma e` pur sempre una definizione, niente più.

L'altra definizione che ci serve e` l'invenzione del piano complesso: Buttiamo a mare la **y**, nelle ordinate, e decidiamo che quell'asse serve a marcare la parte immaginaria di **x**, la "**ix**".



Solo un'altra definizione, niente di più.

Ma sono definizioni devastanti. Viene da chiedersi se, come sembra leggendo i libri di testo, il piano complesso sia stato introdotto davvero solo per "collocare" i numeri complessi e tutte le estensioni che riescono a generare, o se invece sia stato fatto apposta per sistemare la **[4]** e **[5]** nella **[6]**. Perché e` stupefacente che **i** nasca "solo" come $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$, se poi riesce

[10] Su questo, in realta`, combattono ferocemente due scuole di pensiero. Come gia` detto altrove, non vorremmo prendere una posizione troppo decisa, in questioni di filosofia della scienza.

a fare quel che riesce a fare[11]. Guardate: sommando la **[4]** e la **[5]**, tenendo pero` conto che "sen(x)" deve essere moltiplicato per "**i**", come da definizione di piano complesso, otteniamo:

$$\cos(x)+i\cdot\operatorname{sen}(x)=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\ldots \qquad [7]$$

ma, visto che (per definizione!)

$$i^1=i;\quad i^2=-1;\quad i^3=-i;\quad i^4=1;\quad \ldots \qquad [8]$$

la magia puo` liberamente operare:

$$\cos(x)+i\cdot\operatorname{sen}(x)=1+(ix)+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\ldots=e^{(ix)} \qquad [9]$$

Ci deve essere qualcosa di naturalmente stupefacente, anche nella matematica, che per propria natura non dovrebbe stupire. L'invenzione del piano complesso sembra del tutto disgiunta dagli sviluppi in serie, eppure grazie alle "ovvieta`" contenute nella **[8]** si riescono a saldare le serie trigonometriche e la esponenziale. Com'e` possibile? Era tutto gia` in qualche modo implicito nella definizione di "**i**"? Era inevitabile a causa della "forma" delle **[4]**, **[5]** e **[6]**? Il processo deriva solo da definizioni e operazioni elementari come l'addizione e la fattorizzazione di (**ix**); e allora, se la matematica e` davvero solo una imago dei nostri processi mentali, come possono processi noti generare concetti cosi` sorprendenti?

Perché poi, gia` lo sapete, basta prendere la **[9]**, e porre **x=π**, per avere il fuoco artificiale finale:

$$e^{i\pi}+1=0 \qquad [10]$$

della quale gia` parlammo a suo tempo[12].

Le formule della matematica, dicevamo, quelle che non dovrebbero sorprendere...

A dire il vero, esistono anche formule piu` semplici e lineari, che pero` hanno quasi la natura delle leggi fisiche, come questo gioiellino:

$$\mathbf{V-S+F=2} \qquad [11]$$

che ricorda come sono messi in relazione, su un qualsiasi poliedro, I vertici (**V**), gli spigoli (**S**) e le facce (**F**). A differenza della **[10]**, che sembra forzarci a considerare le conseguenze delle nostre stesse definizioni e della nostra maniera di pensare, la **[11]** ci da informazioni sullo spazio tridimensionale: lo spazio fisico che frequentiamo ogni giorno potrebbe essere diverso da quello euclideo tridimensionale, e i nostri poliedri fisici sono solo grezze approssimazioni dei poliedri matematici che considera la **[11]**: per questo e` matematica, e non fisica. Ma e` diversa dalla **[10]**, no? Non solo per l'ovvia diversita` di contenuto, ma per propria natura, in un certo modo.

Di solito, in queste pagine di RM, celebriamo il compleanno di qualche famoso matematico nato nel mese. Perché, allora, in questo mese d'Aprile non abbiamo fatto altro che parlare di formule?

Per troppa grazia.

Gauss, Shannon, Poincarè, Godel, Wittengstein, Kolmogorov, Pauli, Klein, Planck, Rolle, Wiles, Leonardo da Vinci, Huygens, Lindemann, Sophie Germain; sono solo

[11] Se poi, per buon peso, aggiungiamo che storicamente **i** nasce come mero artificio algebrico per risolvere le equazioni cubiche, la cosa fa ancora piu` ridere.

[12] Soprattutto a beneficio dei nuovi arrivati su RM, il riferimento e` al numero 19, Agosto 2000, dove si provava a raccontare un po` della bellezza della [10].

alcuni dei nomi piu` celebri nati in Aprile. Quello che T.S. Eliot chiamava "il mese piu` crudele"[13] sembra essere il piu` fecondo, per le menti matematiche. E anche noi, nel nostro piccolo CdR e con tutta la modestia possibile, celebriamo stupiti il genetliaco del miglior macinatore di numeri in questo mese. Le troppe ramificazioni delle scelte ci hanno bloccato, come l'asino di Buridano, indecisi fino all'ultimo su quale nome far cadere la scelta. Perché, come al solito, da una parte volevamo evitare di celebrare i nomi gia` troppo celebrati, dall'altra ci rendevamo conto di dover scommettere sul giubileo dei venticinque anni di RM, per avere la speranza di completare i nomi d'Aprile.

E allora volevamo quasi saltare il mese, fare di Aprile il mese universale, per non far torto a nessuno... parlare piu` di matematica che di matematici. Non saremmo neanche stati troppo originali, in questo: La comunita` matematica gia` da tredici anni ha decretato che Aprile e` il "Month of Mathematical Awareness"; non sappiamo se per colpa di Eliot, del punto di accumulazione dei compleanni matematici sul calendario, o per altre ragioni.

Solo che e` molto piu` facile dire che fare una cosa del genere: e questo non soltanto perché nell'elenco di nomi notevoli che abbiamo accennato non abbiamo riportato il piu` altisonante. Non soltanto perché ad Aprile e` nato quello che potremmo chiamare "il vecchio Bach della matematica". Quello che, come Bach, non produceva cose geniali sull'onda dei colpi di genio, ma con un continuo, perenne e ininterrotto esercizio del genio. Quell'artigiano dei numeri, impiegato delle equazioni, che dava e da` ancora l'idea di poter generare senza sforzo alcuno teoremi su teoremi, con la stessa metodicita` di un impiegato che evade le pratiche.

Ci sembrava davvero impossibile non parlare di lui: a voler romanzare la sua vita, basterebbe ricordare che e` stato cieco da un occhio per gran parte della sua vita, e cieco del tutto per i suoi ultimi, lunghi e ancora produttivi anni. "Adesso avro` meno distrazioni", disse, quando anche l'occhio migliore smise di raccogliere luce.

Un genio che scrisse settanta libri. Non dieci, settanta: la prima edizione delle sue opere, con i tempi di allora (nacque a Basilea il 15 Aprile 1707) termino` quaranta anni dopo la sua morte. "E` un bene che talvolta il principio di priorita` non sia rispettato, perché altrimenti tutti i teoremi dell'analisi e gran parte degli altri sarebbero noti solo con il suo nome", dissero di lui[14].

Lo si ritrova ovunque. Il bel libro di Odifreddi sulla Matematica del secolo scorso[15] termina con l'elenco di quattro tra le questioni matematiche piu` importanti ancora insolute: il problema dei numeri perfetti, l'ipotesi di Riemann, la congettura di Poincarè, il problema P=NP. Tutti e quattro i paragrafi contengono il suo nome; i primi tre perché i piu` grandi progressi in quei fronti sono stati fatti da lui, il quarto, problema recente e contemporaneo, perché per risolverlo "...ci vorrebbe il suo ingegno".

Noi, per non far torto a nessuno dei matematici d'Aprile, avevamo deciso di parlare di formule: le formule onnipresenti nel linguaggio dei matematici, e quasi del tutto assenti nelle nostre piccole celebrazioni mensili. Ma anche così, non saremmo riusciti

[13] "*April is the cruellest month, breeding lilacs out of the dead land, mixing memory and desire, stirring dull roots with spring rain...*" T.S. Eliot – The Waste Land, 1-4. – Se qualcuno, tanto per restare su livelli piu` sanremeschi e italici, e` abbastanza vecchio da ricordare il testo della "canzone dei mesi" di F.Guccini, rammentera` che anche il nostro si chiedeva quale mistero avesse intravisto il poeta nel quarto mese dell'anno.

[14] A memoria, e sfugge il nome dell'autore della citazione. Menzione d'onore speciale a chi lo nomina per primo...

[15] P. Odifreddi – La matematica del 900 – (2000) PBE Einaudi; 193 pagine, 26.000 vecchie lire

ad essere equi. Anzi, forse proprio dedicare alle "formule" questa celebrazione e` la maniera piu` diretta per celebrare lui: la prima formula che compare in quest'articolo e` quella della Gravitazione Universale. Proprieta` assoluta di Isaac Newton, sicuramente, ma Newton probabilmente non saprebbe riconoscerla. Non riconoscerebbe neanche la altrettanto sua $F=ma$. I concetti espressi sono tutti autenticamente newtoniani, ma lui e i suoi contemporanei scrivevano la matematica in maniera diversa e, diciamolo pure, meno bella. La "forma delle formule", la maniera di scrivere matematica, e` un'altra, forse la piu` grande, eredita` lasciataci dal nostro genio d'Aprile.

I matematici sono sensibili al bello, anche se non piace loro parlarne troppo, visto che e` di cosi` difficile definizione. Ma alcuni di loro si sono perfino lasciati sottoporre a indagine referendaria, qualche tempo fa. Dovevano indicare, senza altra ragione che il proprio personale gusto estetico, quale formula matematica ritenessero "piu` bella".

Vinse quella che in questo articolo ha il numero **[10]**.

Arrivo` seconda quella che noi abbiamo chiamato **[11]**.

Al terzo posto si classifico` la dimostrazione di Euclide dell'infinita` dei numeri primi.

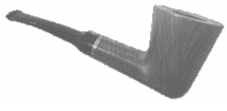
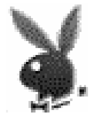
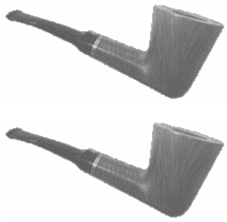
Quarta, la prova che i poliedri regolari sono solo cinque.

Seguita dalla prova di convergenza della serie dei reciproci dei quadrati.

Le prime due, la quinta, tutto il modo contemporaneo di scrivere la matematica e quasi tutte le cose serie[16] che sostengono le ciarle di quest'articolo sono opera di Leonhard Euler.

[16] Scegliete voi il senso da dare alla parola "serie": sia esso il contrario di sciocchezze, sia pure quello delle molte somme infinite che tappezzano le pagine appena trascorse.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Dura molto?			
Il problema del Millennio			

2.1 Dura molto?

Questa volta il dado e` onesto.

Quante volte vi aspettate di tirarlo, per avere il ***90%*** di sicurezza di ottenere tutti i valori?

2.2 Il problema del Millennio

Questo me l'hanno proposto un po` di tempo fa: per prima cosa vi do` un aiutino: avete ancora un po` di tempo per pensarci.

Ogni anno, tra il 2000 e il 2999 puo` essere espresso come somma di interi positivi consecutivi; ad esempio, ***2000=398+399+...+402***, oppure ***2001=1000+1001***, e avanti cosi`.

Tranne uno.

Quale?

3. Bungee Jumpers

Risolvere, per $x, y, z \in N$:

1. $\sum_{i=1}^{x} i! = y^2$

2. $\sum_{i=1}^{x} i! = y^z$

Forse un po` di "tentativi" non guastano...

Grande Sagra del **Pesce Algebrico -** Frazione Calde` di Castelveccana

(Luino sul Lago Maggiore)

2-3 Agosto 2003

Aumentare le Soluzioni per Raggiungere la Sagra del Pesce Algebrico! [RdA]

Nella foto di repertorio, un gruppo di previdenti lettori di RM prepara la partenza per la Sagra del Pesce Algebrico.
(Sullo sfondo, brillantemente superato, il Pons Asinorum)

4. Soluzioni e Note

4.1 [045]

4.1.1 Sono cavoli vostri...

Si, anche ***BraMo logicar*** ha deciso di giocare all'antiquario... E` "un po`" di tempo che lavora dietro il problema delle lanterne, cercando delle generalizzazioni. Ben felici, pubblichiamo... Prima pero` una noterella. Ogni tanto, qualcuno si lamenta che un qualche problema e` "troppo facile". Beh, visto quello che riuscite a cavare dai problemi facili, credo ne metteremo di piu`. La cosa e` ritenuta molto divertente da due terzi della Redazione (il restante terzo e` quello che si occupa dell'impaginazione...) Comunque, guardate un po` cos'e` saltato fuori:

> Ve lo dico subito: la mail e` di quelle lunghe, ma il risultato e` buono: il problema delle lanterne e` risolto anche nella sua forma generalizzata ! Chi ha voglia di seguirmi ... si accomodi ...
>
> **Introduzione**
>
> Uno dei peggiori incubi di questi ultimi mesi e` stato senz'altro rappresentato dal maledetto problema delle lanterne pubblicato sui Rudi Mathematici n 45 dell'ormai lontano ottobre 2002. Il problema originale, che invito chi non l'avesse visto a farsi un po` del male leggendolo e provando a risolvere almeno la forma base, era il seguente *[E` tristemente presente nelle menti du tutti noi... RdA]*:
>
> Da qui, con lunghe elucubrazioni, thread di email, generalizzazioni, tentativi, dai che si e` capito che e` stata un'odissea, siamo arrivati al seguente problema:
>
>> Data una stringa di bit, con infiniti zeri ai due estremi, e data l'unica mossa possibile consistente nel cambio di stato di 3 bit adiacenti, e` possibile:

1. decidere se e` raggiungibile dalla sequenza nulla oppure, equivalentemente, se e` possibile ottenere da essa la sequenza nulla
2. in caso positivo, esiste un algoritmo per azzerare la stringa ?

Algoritmo di Roberto

L'ho sempre chiamato cosi` per cui non vedo perche` cambiargli ora il nome: a ciascuno i suoi meriti. Roberto ha trovato un algoritmo, naturale e semplice, per risolvere il caso b):

1. identificare il bit 1 piu` a sinistra
2. selezionare tale bit e i due adiacenti immediatamente alla sua destra (in tal modo il primo bit si annulla e la distanza tra i due bit 1 estremi si riduce)
3. iterare lo step 2 fino a raggiungere una configurazione nota

E` semplicissimo vedere che, se la lunghezza della stringa e` n (nel senso di distanza tra i due bit 1 estremi) l'algoritmo ha un costo

```
T(n) <= n - 2
```

prima di giungere ad una delle seguenti configurazioni:

C1:	()	problema risolto
C2:	(1)	non risolubile (la dimostrazione e` nel thread di mail, anche se diventa evidente dopo il metodo che trovate poi)
C3:	(11)	non risolubile

La notazione (S) indica la stringa S in cui potete "agganciare" quanti bit 0 si vogliono a sx o a dx. L'algoritmo di Roberto potrebbe essere in realta` utilizzato anche per la domanda a), ma sarebbe un po` come cercare la radice quadrata di un numero provando a moltiplicare tutti gli interi fino a che il quadrato non supera tale numero. Insomma, un conto e` un algoritmo, un altro e` una funzione f che applicata ad una stringa dia f(S) = 0 o 1. Sembra quasi impossibile, per lo meno dopo aver scambiato tante idee e provato e riprovato piu` volte, ma la maledetta esiste. Andiamo avanti con il nostro viaggio.

Lights out

Disperati dai tentativi vani, ho preso l'iniziativa di condividere l'incubo con altri, e ho tirato in ballo il gruppo rec.puzzles, il piu` importante in assoluto per, appunto, puzzle come questo. Un certo Jaap Vattelapesca (tipico nome olandese, non cosi` il cognome pero') mi ha dato un'idea gigantesca. Il gioco che stiamo cercando di risolvere esiste in una forma piu` complessa, e qui Roberto si fara` delle grasse risate perche` l'ha proposto come generalizzazione del nostro (complimenti): quella bidimensionale. Non solo, udite udite, esiste in una forma commerciale, cioe` c'e` chi l'ha prodotto con la sua bella confezione e ne esistono persino diverse varianti, addirittura una elettronica.

Ehi, il problema bidimensionale ve lo consiglio, e` davvero molto bello e la matematichina che c'e` sotto e` molto elegante. L'unico problema e` che le varie versioni di Lights sono tutte finite, anzi molto limitate (l'originale e` un 5 x 5). Questo creera` dei guai al nostro bel problema infinito ?

Questo mi fa pensare che:

1. la generalizzazione che abbiamo pensato non e` stupida
2. ci deve essere un sistema per risolverlo, o no ?
3. potrebbe essere davvero difficile da risolvere

cioe` il massimo per scacciare qualunque pur remota possibilita` di mollare.

Intermezzo

Solo per dirvi che credo di non essere ancora arrivato a meta` mail, per cui chi vuole andarsi a sciacquare la faccia o a prendere un caffe', faccia pure.

Verso la soluzione

riassumendo:

1. l'ordine delle mosse non e` importante, e questo era forse ovvio, ma e` sempre meglio chiarirlo
2. l'insieme delle possibili configurazioni con la nostra operazione (il cambio di stato di 3 celle adiacenti) forma un gruppo abeliano, e questo forse frega a pochi ma da` un tocco di serieta` formale a tutto l'edificio

Il quiet pattern

E ora si parte ... immaginate la seguente stringa

```
((0XX)*)
```

Chi conosce le espressioni regolari salti pure a pie` pari la frase, else ... lo star (*) sta a significare la ripetizione, 0 o piu` volte, dell'espressione che lo precede. In questo caso usiamolo come "iteratore infinito", cosi` che la stringa e` formata da una sequenza infinita di terne del tipo 0XX, e dunque, in una notazione piu` "barbara"

```
...0XX0XX0XX...
```

Okkio: qui dobbiamo introdurre una novita` nella notazione (che non mi sembra comunque complessa vero?), dobbiamo "ancorare" le sequenze (sto usando indifferentemente i termini "stringa", "sequenza", "configurazione") determinando una posizione (poi capirete il perche').

Utilizziamo percio` il caret (^) per identificare la cella 0. E gia` che ci siamo diamo un nome alla nostra stringa: Q per quiet.

```
Q1: ...0XX0XX0XX0XX...
              ^
```

Vi chiederete: che roba e` ? E che c'entrano le X ? Bene, rappresentano un "contrassegno" per alcuni bit della nostra stringa. In questo caso cosi` i bit contrassegnati della nostra stringa saranno i numeri 1, 2, 4, 5 ... verso dx e -1, -2, -4, -5 ... verso sx. Per capire meglio mettiamo vicino la nostra nuova amica, Q1, con una stringa d'esempio che vogliamo valutare:

```
Q1: ...0XX0XX0XX0XX...
S1: ...001010011010...
```

I bit della stringa S1 (che e` il numero della bestia, 666) contrassegnati da Q1 sono i bit di S1 corrispondenti alle X di Q1.

Ed ora ecco la parte piu` importante di tutto il discorso: notate che "comunque scegliate la mossa su S1, il numero di bit contrassegnati che si modificano e` 2"

e dunque possiamo dire che

> **"qualunque mossa si faccia, il numero di bit a 1 nelle posizioni contrassegnate mantiene la parita'".**

Mi raccomando non proseguite se questo non e` assolutamente chiaro. Se non lo e', rileggetelo. Se non lo e` ancora, rileggetelo un'altra volta. Se continua a non esserlo, sigh, ditemelo.

Le stringhe come Q1 sono dette "quiet pattern". Perche` ? E` semplice: se vengono selezionate tutte le celle contrassegnate dalle X (nel senso che nella mossa scegliamo la X come bit centrale dei tre, vi ricordate la forma originale del gioco delle lampade ?) la stringa originale non varia.

Ce ne sono altri ?

Si', ce n'e` un altro. Chiamiamolo Q2. E` ottenuto semplicemente shiftando Q1 di 1 bit:

```
Q2: ...XX0XX0XX0XX0...
                ^
```

Intermezzo

Ora abbiamo superato sicuramente la meta', e ci siamo quasi.

Stringhe risolubili

Con i due nuovi amici, Q1 e Q2, diventa semplice testare se una stringa S e` risolubile o no. Consideriamo ad esempio Q1, e contiamo quanti sono i bit 1 della nostra stringa S corrispondenti alle X di Q1.

Se sono dispari, per quanto abbiamo detto, rimarranno per sempre dispari, qualunque mossa scegliamo e sceglieremo, dunque non sara` mai possibile raggiungere la stringa nulla.

Se sono pari sara` invece possibile, teoricamente, azzerarli tutti. Ma in questo caso che ne e` dei bit non corrispondenti alle X di Q1 ?

Semplice, utilizziamo ora Q2 e, come prima, contiamo quanti sono i bit 1 della nostra stringa S corrispondenti alle X di Q2.

Se sono dispari, nulla da fare. Se sono pari, il gioco e` fatto, la stringa S e` risolubile.

Bello vero ?

Se volete potete divertirvi a trovare una dimostrazione del teoremino che potrebbe suonare cosi':

> **"Condizione necessaria e sufficiente affinche` una stringa binaria S possa diventare nulla modificando lo stato di 3 bit adiacenti per volta e` che sia pari il numero di bit corrispondenti alle X di Q1 e di Q2".**

Beh, la condizione necessaria l'abbiamo gia` dimostrata. In pratica, se uno dei due numeri e` dispari, tale rimarra` ad ogni mossa. La sufficiente e` semplice considerando le stringhe minimali che restano dopo l'applicazione dell'algoritmo di Roberto.

Facciamo i formali

Se volete qualche formalismo, possiamo dire che:

> data una stringa binaria infinita S = 0*.{0,1}^n.0*, dove `.` e` l'operatore di concatenazione e dove la distanza tra i bit 1 piu` lontani e` <= n
>
> dati i due quiet pattern Q1 = (0XX)* e Q2 = (XX0)*
>
> la stringa S e` risolubile se
>
> cnt1(S AND Q1) pari e
>
> cnt1(S AND Q2) pari

dove cnt1(.) e` la funzione che "conta" i bit 1 di una stringa e AND e` l'operatore AND considerando gli X dei quiet pattern come degli 1.

Generalizzazione

"Bastaaa!!!" dira` qualcuno, e non so se alla mail o alle generalizzazioni che sono spuntate dal primo, originale, problema delle lanterne.

Solo per dirvi una cosa. Il metodo si puo` generalizzare anche a casi con mosse di piu` di 3 bit adiacenti. Vediamo solo il caso n = 4 ?

Il tutto e` assolutamente identico, eccetto per i quiet pattern. Io ho trovato questi 3, che dovrebbero essere sufficienti:

```
Q1: (00XX)*
Q2: (XX00)*
Q3: (0X0X)*
```

Ogni possibile mossa su S modifica esattamente 2 bit corrispondenti alle X di Q1, Q2 e Q3. Se provate a fare due esempi vedete poi che la condizione dei bit a 1 pari deve essere soddisfatta per tutti e tre. Ad esempio la stringa

```
S = ...001100...
          ^
```

soddisfa Q1 e Q2 ma non Q3, e infatti non e` risolvibile.

Per n = 5 ho trovato:

```
Q1: (000XX)
Q2: (00XX0)
Q3: (0XX00)
Q4: (XX000)
```

e forse lo schema va bene anche per gli n superiori. In effetti funziona anche per n = 4.

Conclusione

Sicuramente vi siete stancati, e non so se siete arrivati fin qui. Io mi sono divertito un mondo, sia a pensarci che a scrivere questa mail.

Quindi, che dire ... alla prossima ...

Ciao.

Marco.

Ps1 Ma credete che sia davvero finita ?

E bravo BraMo logicar... Il tutto da un problemino facilefacile. Cosa combinera`, con quelli di stavolta?

4.2 [050]

4.2.1 Inseguimento!

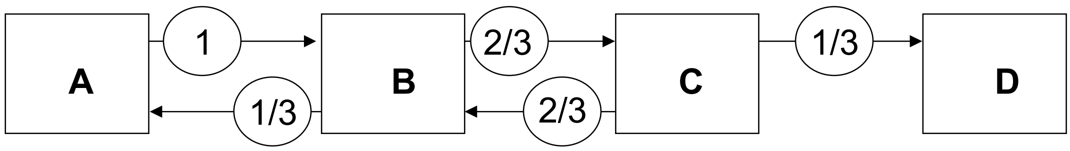
[Solo una nota: la prima soluzione,questa volta, e` di **Doc***! Col che, il nostro postino preferito vince il dubbio onore ma sicuro onere di mettere assieme le soluzioni. Insomma, fa il postino, scrive i compleanni, impagina le soluzioni, pulisce la redazione... Certe volte mi chiedo cosa ci stiamo a fare, qui, io e Alice. RdA]*

Lo abbiamo ripetuto fino alla nausea: quel che ci piace fare, su RM, e` soprattutto vedere quante e quali diverse soluzioni ad un problema possono essere trovate. E questo problema ci ha dato delle belle soddisfazioni, da questo punto di vista: nei cassetti della redazione dormivano gia` un paio di soluzioni assai diverse tra loro, e per buon peso qualche lettore si e` scatenato, trovandone di ancora diverse. Abbiamo allora deciso di prendercela con molta calma, perché la cosa ci sembra divertente e istruttiva.

Quasi tutti i metodi risolutivi passano attraverso una "rimodellazione del cubo": in alcuni casi, ci si limita a riportarlo su un grafo a due dimensioni, un paio di altre passano invece ad una semplificazione maggiore, riducendolo ad una "mappa di stati". Prima di entrare in dettaglio con le soluzioni vere e proprie, analizziamo questa fase. Sia allora il "Cubo del

Ragno" un vero cubo di lato unitario piazzato su un sistema di riferimento, e sia il vertice che il Ragno occupa l'origine (0,0,0). La Formica, povera bestia, se ne sta al vertice opposto (1,1,1), impossibilitata a muoversi. Notiamo che ogni "passo del ragno" cambia (sempre e per forza) uno solo dei valori della tripletta di coordinate: da (0,0,0) si puo` passare solo a (1,0,0) o (0,1,0) o (0,0,1). Da (1,0,0) – tanto per continuare gli esempi – si puo` passare solo a (0,0,0), (1,1,0) e (1,0,1). Il bello e` insomma che il gioco finisce a (1,1,1), che si parte da (0,0,0) e che si puo` cambiare solo un "indice" per volta: insomma, la sola presenza delle coordinate cartesiane ci da` gia` una bella semplificazione: considerando la "somma delle tre coordinate" abbiamo solo 4 valori possibili (0, 1, 2 e 3): sappiamo che il gioco finisce a 3, e che, stando su "somma 0" si puo` passare solo a "somma 1" (per forza), stando su "somma 1" si puo` passare solo a "somma 0" o a "somma 2", e che stando su "somma 2" si puo` passare solo a "somma 1" o a "somma 3", dove finisce il gioco.

Graficamente:



Sembra piu` trattabile d'un cubo, no? Abbiamo quattro "stati" e nella figura abbiamo anche evidenziato che non tutte le "transizioni di stato" sono equiprobabili. Infatti, anche se da ogni vertice si dipartono tre spigoli, i vertici di arrivo non sono necessariamente tutti del medesimo "stato-somma".

Dall'origine (unico vertice di "somma Zero", ovvero di quello stato che abbiamo chiamato **A** sulla figura) tutti e tre gli spigoli portano allo stato **B** [che rappresenta la "somma Uno", ed e` quindi popolato dai tre vertici (1,0,0)-(0,1,0)-(0,0,1)]. Quindi la transazione da **A** a **B** ha probabilita` 1 (e lunghezza 1). Ma dallo stato **B** posso tornare ad **A** (se cambio la sola coordinata che vale 1) con probabilita` 1/3, o passare allo stato **C** (se cambio una delle due coordinate che valgono 0) con probabilita` 2/3. Discorso quasi del tutto analogo per lo "stato **C** – somma Due": ho 2/3 di probabilita` di passare da **C** a **B**, e 1/3 di finire il gioco passando da **C** a **D**. Il passaggio da **D** a **C** e` vietato (probabilita` zero, perché l'inseguimento e` gia` finito).

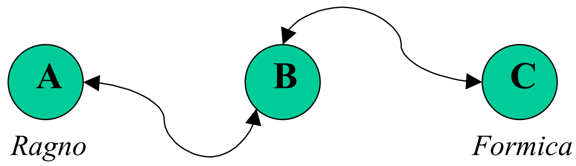
E adesso possiamo cominciare.

Lento & Violento

Il metodo e` "lento" perché lungo, e procede passo passo; e` "violento" perché usa la forza bruta. Ricordiamo che trovare il valore atteso equivale a trovare la "lunghezza media" di tutti i percorsi possibili. Per "forza bruta", in questo caso, intendiamo il laborioso calcolo di contare le lunghezze di tutti i percorsi, uno per uno,e farne la media. Il problema immediato, in questo caso, e` la serena osservazione che i "percorsi possibili" sono infiniti, e che alcuni di questi sono di lunghezza infinita. Si capisce immediatamente visualizzando il cubo, ma forse e` ancora piu` evidente dalla figura poco sopra: esiste il percorso direttissimo A-B-C-D, lungo tre spigoli, ma e` altrettanto facile immaginarsi quanti percorsi si vuole che ripetutamente passano per A, B e C senza mai giungere a D. E "contare" un numero infinito di percorsi, a volte, puo` sembrare faticoso. Siccome abbiamo chiamato questo metodo "lento", lo rallentiamo ancora un po` di più, nella speranza di interessare anche coloro (se mai ce ne fossero) che si sono spaventati proprio da questa presenza dei "possibili percorsi infiniti". A tale scopo, dimentichiamoci per un attimo del cubo, e immaginiamo la situazione piu` "semplice" possibile che pero` abbia la caratteristica di dover fare i conti con infiniti percorsi possibili; insomma, una specie di vaccino per non lasciarsi spaventare dal maledetto otto orizzontale.

(Allenamento contro i percorsi infiniti)

La situazione "facile" che ci e` venuta in mente e` la seguente:



Se vi viene in mente qualcosa di piu` semplice fatemelo sapere. Immaginiamo insomma un percorso a tre soli "vertici", con formica ferma in **C** e ragno che parte da **A**. Il ragno va sicuramente da **A** a **B**: poi puo` tornare ad **A**, o pranzare con la formica in **C**. L'infinita` dei percorsi e` data solo dal ragno superidiota che continua ad oscillare da **A** a **B** e viceversa senza mai incappare nella porta per arrivare a **C**.

Abbiamo detto che intendiamo essere vergognosamente lenti e didascalici, in questa parte. Siccome non so la teoria, provo a cimentarmi con questo problema, vergognosamente piu` scemo di quello del cubo. Chiediamoci allora quale sia un valor medio (valore atteso) dei percorsi possibili percorribili nel semplice schema ABC di cui sopra. Tutto quel che dobbiamo fare e` contarli tutti, vedere quanto sono lunghi, e fare la media aritmetica.

Tabellina delle transazioni possibili:

Nome	Da	A	Probabilita`	Lunghezza
α	A	B	1	1
β	B	A	0,5	1
γ	B	C	0,5	1
δ	C	B	0	1

Il percorso piu` allegro e` semplicemente $\alpha\delta$, con probabilita` di avvenimento pari a

$$\mathbf{1 \times 0,5 = 0,5}$$

e di lunghezza pari a **2**. Gli altri percorsi possibili quali sono? Sono $\alpha\beta\alpha\gamma$, $\alpha\beta\alpha\beta\alpha\gamma$, e cosi` via. Allora ricambiamo notazione: il percorso $\alpha\gamma$ (cioe` da **A** a **B** e poi da **B** a **C**), gia` visto sopra, lo chiamo **X**, e so che probabilita` 0,5 e lunghezza 2. Il percorso $\alpha\beta$ (cioe` da **A** a **B** e poi di nuovo da **B** ad **A**) lo chiamiamo **"Y"** ed e` parimenti di probabilita` 0,5 e lunghezza 2.

La tabella infinita dei percorsi possibili e` allora questa:

Nome	N	Probabilita`	Lunghezza	Prob. x Lung.
X	1	0,5	2	1
YX	2	0,5x0,5	4	1
YYX	3	0,5x0,5x0,5	6	0,75
YYYX	4	0,5x0,5x0,5x0,5	8	0,3125
YYYYX	5	0,5x0,5x0,5x0,5x0,5	10	0,1875
YYYYYY........YYYYYX	N	$(0,5)^N$	2N	$(0,5)^N$ x 2N

Quello che mi serve e` allora solo la somma dell'ultima colonna, dove ogni percorso e` gia` ben "pesato" con la propria brava lunghezza. La somma e` infinita, e dovrebbe essere facilmente rappresentabile come:

$$2\sum_{N=1}^{\infty}\frac{N}{2^N}$$ **[004.001]**

Quel bel sigma maiuscolo che rappresenta la serie lo abbiamo messo apposta, perché sappiamo per certo che qualcuno lo ha in forte antipatia. Vorremmo invece provare a renderlo familiare. Facciamo allora ancora un altro passo indietro (ancora? Si, ancora...) e prendiamo la seguente cosa come assodata :

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{2^N}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2^N}=1$$ **[004.002]**

Diciamo "assodata" non perché sia elementare, ma perché in un modo o nell'altro la si incontra spesso: pensate ad Achille e la Tartaruga. Oppure, alla visualizzazione di un cerchio bianco che al primo passaggio diventa rosso per meta`, poi per tre quarti, poi per sette ottavi, poi per quindici sedicesimi, e cosi` via... Non e` certo una dimostrazione, ma crediamo che praticamente tutti sappiano che questa serie degli inversi dei quadrati vale 1 (se cominciamo a contare da ½).

Adesso notiamo che quella che si deve calcolare è:

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{N}{2^N}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+...+\frac{N}{2^N}$$ **[004.003]**

e siccome vogliamo tornare a qualcosa tipo la [2], che e` qualcosa di noto, scriviamo i termini (dal secondo in poi...) in una maniera che ci piace di più:

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{N}{2^N}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{16}\right)+...+\left(\frac{1}{2^N}+\frac{N-1}{2^N}\right)$$ **[004.004]**

Orpola`... visto? Il primo termine e gli infiniti "primi membri" delle parentesi formano la mia cara [2]. Quello che ancora resta fuori e` la sommatoria dei secondi termini delle parentesi, ovvero:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+...+\frac{N}{2^{N+1}}=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{N}{2^{N+1}}$$ **[004.005]**

Se non vogliamo calcolarla, almeno possiamo riepilogare:

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{N}{2^N}=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{2^N}+\sum_{N=1}^{\infty}\frac{N}{2^{N+1}}$$ **[004.006]**

E, solo riepilogando, arrivano i fuochi d'artificio: la prima serie del secondo membro gia` sappiamo che vale 1. La seconda, invece, notiamo che possiamo scriverla come:

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{N}{2^{N+1}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{N=1}^{\infty}\frac{N}{2^N}$$ **[004.007]**

e, di fatto, ormai di "serie" ne abbiamo piu` solo una, che ci permettiamo di chiamare M. La nostra [6] possiamo allora scriverla come:

$$M=1+\frac{1}{2}M$$ **[004.008]**

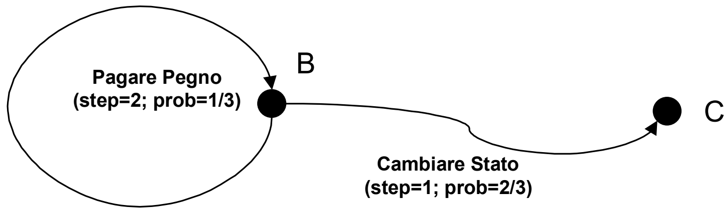
che e` la leggendaria equazione del ***mattone che pesa un chilo piu` mezzo mattone***! Incredibile.

Quindi **M** vale 2, e la [1] che esprime il "valore atteso" del "caso semplice" vale 4. Visto che l'infinito si puo` domare? E senza neanche troppi calcoli, in fondo.

(Fine Allenamento contro i percorsi infiniti)

Adesso, si puo` provare a considerare la "situazione locale" di ognuno dei tre stati **A**, **B** e **C** (quelli veri iniziali, non quelli del caso "facile"). **D** non serve analizzarlo, perché appena ci arriviamo il gioco finisce. Anche, **A**, comunque, non e` che dia molta soddisfazione...

Stato A: Si passa di sicuro a stato **B**. Si "spende un passo", ma tutto qui. Un'analisi travolgentemente veloce.



Stato B: Questo e` gia` piu` divertente. Dal punto di vista di **B**, ho solo due possibilita`: "pago pegno", o arrivo in **C**. "Pagare pegno" significa che spreco 2 unita` di tempo/percorso se torno ad **A** (che poi mi riporta inevitabilmente a **B**) e la probabilita` di "pagare pegno" vale 1/3. Altrimenti, ho semplicemente 2/3 di probabilita` di arrivare a **C**:

Ci sono molte somiglianze con l'esempio precedente: anche qui, tutti i percorsi possibili sono del tipo X, YX,YYX,YYY...YX, dove, ritornando alla notazione di cui sopra, Y sta a significare "Pago Pegno" e X significa "Cambio Stato". Pero` occhio! Sono diverse sia le probabilita` che le lunghezze dei percorsi! Ma basta fare un po` di attenzione... la tabella, diventera`:

Nome	N	Probabilita`	Lunghezza	Prob. x Lung.
X	1	2/3	1	2/3
YX	2	1/3x2/3	3	2/3
YYX	3	1/3x1/3x2/3	5	10/27
YYYX	4	1/3x1/3x1/3x2/3	7	14/81
YYYYX	5	1/3x1/3x1/3x1/3x2/3	9	18/243
YYYYYY........YYYYYX	N	$(2/3)\text{x}(1/3)^{N-1}$	2N-1	$(2/3)\ \text{X}\ (1/3)^{N-1}\ \text{x}\ (2N-1)$

E insomma, stavolta la serie da sommare è:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n-1)}{3^n} \qquad \texttt{[004.009]}$$

Ora, per quanto sia vero che abbiamo deciso di prendercela mooolto lenta, spero comprenderete che se rallentiamo ancora un po` si prova l'ebbrezza del moto retrogrado. Come esercizio, potreste provare a dimostrare che il "caso piu` generale" della [2] e` stabilito dalla seguente uguaglianza:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a-1} \qquad \texttt{[004.010]}$$

che si puo` ben vedere che vale, per n=2, esattamente come la [2]. Se l'esercizio vi e` riuscito bene, potreste accordarci ancora un po` di fiducia, e divertirvi a dimostrare che vale anche l'uguaglianza che segue:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=\frac{a}{(a-1)^2} \qquad \texttt{[004.011]}$$

che poi, a ben vedere e` proprio quella che abbiamo calcolato nell'esempio precedente (cfr. [6]). Forti di queste preziose informazioni teoriche, possiamo usare spudoratamente lo stesso artificio di prima:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n-1)}{3^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}=2(\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{5}{27}+\frac{7}{81}+...)\qquad [004.012]$$

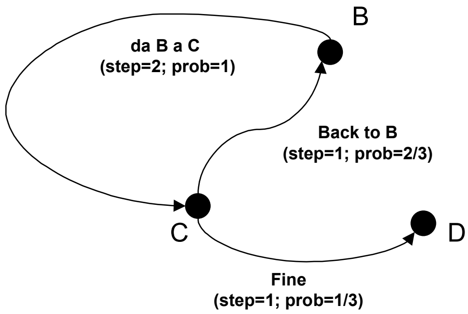
come prima, procediamo con lo "spezzatino":

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{5}{27}+\frac{7}{81}+...=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{3}{27}+\frac{2}{27}\right)+\left(\frac{4}{81}+\frac{3}{81}\right)+...$$

e quindi:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\right)=2\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)=2\qquad [004.013]$$

dove abbiamo bellamente usato la **[11]**, che per **a=3**, vale ¾. Lo sappiamo, lo sappiamo: esistono metodi piu` veloci, anche nel sommare le serie di potenze. Ma vi ricordate che abbiamo detto che questo e` il metodo "Lento e Violento"? Bene, dopo tutta 'sta fatica, sappiamo solo che per passare dallo stato **B** allo stato **C** ci il ragnetto ci mette mediamente **2** spigoli.



Stato C: A ben vedere, quello che abbiamo fatto prima per lo stato **B** e` stato "inglobare" in esso lo stato **A**. Ora, quel che ci resta da fare, e "inglobare" lo stato **B** nel caso **C**. Vediamo: da **C** si puo` andare a **D** (e finire) con un percorso lungo 1 spigolo e probabilita` 1/3, o tornare a **B** (sempre con un percorso lungo 1) e probabilita` 2/3. Quanto ci "costa" andare da **B** a **C** lo sappiamo gia, quindi non dovrebbe esserci altro in ballo.

Definiamo:

Nome	Da	A	Probabilita`	Lunghezza
ε	B	C	1	2
δ	C	B	2/3	1
ζ	C	D	1/3	1

Delta e Zeta sono sempre loro, le altre sono collassate in Epsilon.

Ma appena scatta Zeta il gioco finisce, mentre Delta e` inevitabilmente seguita da Epsilon che ha probabilita` pari a 1.

Allora, tornando alle nostre care vecchie X e Y, abbiamo che, partendo da **C**, X equivale a Zeta, mentre Y equivale a Delta+Epsilon. Allora X ha probabilita` 1/3 e lunghezza 1, mentre Y ha probabilita` 2/3 e lunghezza 3.

Nome	N	Probabilita`	Lunghezza	Prob. x Lung.
X	1	1/3	1	1/3
YX	2	1/3x2/3	4	8/9
YYX	3	1/3x2/3x2/3	7	28/27
YYYX	4	1/3x2/3x2/3x2/3	10	80/81
YYYYX	5	1/3x2/3x2/3x2/3x2/3	13	208/243
YYYYYY........YYYYYX	N	$(1/3)x(2/3)^{N-1}$	3N-2	$(1/3)$ X $(2/3)^{N-1}$ x (3N-2)

Non ci posso credere... forse si vede la fine!

La nostra ultima serie è:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot(3n-2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}(3n-2)}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3n}{2}-1\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \qquad \texttt{[004.014]}$$

Adesso, decidiamo unilateralmente che **a=(3/2)**, cosi` la [14] diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an-1}{a^n} \qquad \texttt{[004.015]}$$

Uffa... non e` esattamente una delle "forme" che conosciamo. Però...

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an-1}{a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\frac{1}{a}}{a^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{a}}{a^{n-1}}=a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n} \qquad \texttt{[004.016]}$$

Sembra una cosa complicata, lo so... però, a dire il vero, e` solo scritto in maniera sintetica e un po` piu` formale quello che abbiamo gia` fatto nei passaggi precedenti.

L'obiettivo era ovviamente arrivare a trasformare la **[15]** in qualcosa che sapessimo trattare, e infatti cosi` accade: le due serie risultanti sono infatti proprio la **[10]** e la **[11]**, di cui sappiamo il risultato. E allora, quello che viene finalmente fuori è:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an-1}{a^n}=a\left(\frac{a}{(a-1)^2}\right)-\left(\frac{1}{a-1}\right) \qquad \texttt{[004.017]}$$

che, per il nostro caro vecchio **a=3/2** genera un deliziosissimo **7**.

Si chiude, finalmente! Quello che abbiamo trovato e che, ***partendo dallo stato C,*** la media di tutti i percorsi possibili ci dice che si arriva alla formica dopo **7** passi. Ma per arrivare allo stato **C** si deve per forza passare da **B**, e la "lunghezza media" da **B** a **C** e di **2** passi, come visto sopra. Infine, non dimentichiamo che il punto di partenza vero e` pero` lo stato **A**, che ci porta ineluttabilmente a **B** al costo di **un** solo passo. Ergo, il maledetto valore atteso e` **7+2+1=10.**

Così. Siamo riusciti a dimostrare che si riesce ad aver ragione del cubo anche con le utilitarie di piccola cilindrata... Un po` di pazienza, e tutti gli infiniti percorsi vengono macinati, anche se in maniera un po` arruffata e poco spettacolare.

Pero` diamine, mica tutti hanno le utilitarie...

Newton & Markov

No, a dire il vero Markov non c'entra: e` solo che il "Vate delle Catene" e` una delle tre passioni di ***Viggio***, che per l'occasione ha deciso (visto che il problema sembrava proprio fatto apposto per Markov) di lasciarlo in pace, a favore della sua seconda passione, il binomio di Newton. Con un colpo da prestigiatore, e` riuscito a saldarlo nel cubo, state a vedere... come? La terza passione? Non possiamo mica dirlo qui. Probabilmente, la sua terza passione ci sta leggendo, in questo momento...

Vista la prolissita` del "Lento & Violento", non possiamo permetterci di tagliar via troppo, da questa soluzione: sappiate solo che fa la stessa rimodellazione del cubo in "stati" come nella prima figura, dove li chiamavamo A, B, C e D. Solo che lui li chiama rispettivamente 3, 2, 1,e 0:

A questo punto facciamo i conti. Una generica sequenza che porti dallo stato 3 allo stato 0 consta di almeno 3 passi, e ha probabilita` data dal numero di modi in cui si realizza la sequenza 3→2→1, che sono 3x2x1 (ho moltiplicato i pesi), divisa per il numero di spostamenti possibili che sono $3^3$ ➔6/27 e` la probabilita`.

Eventuali passaggi intermedi, che tendono ad allungare l'agonia della formica e ad aumentare la fame del ragno, possono essere di due tipi: sequenza P: 3→2→3 e sequenza Q: 2→1→2 (non scervellatevi per trovare un significato ai nomi P e Q, non ne hanno). Queste sequenze hanno probabilita` rispettivamente $p=3x1/3^2$ e $q=2x2/3^2$.

E` evidente allora che il ragno puo` giungere alla meta solo in un numero N di passi dispari e non inferiore a 3: 3, 5, 7, 9, ... Di questi passi, 3 sono obbligatori (3→2→1→0) gli altri N-3 derivano da K=(N-3)/2 sequenze intermedie. Come si combinano queste sequenze? Se P=0 (ossia: numero di sequenze di tipo P nullo) allora Q=K (ossia tutte le sequenze intermedie sono di tipo Q), se P=1 allora Q=K 1, ecc. La generica combinazione Q=a, P=K-a, si presentera` a!(K-a)!/K! volte e quindi avra` probabilita`:

$$\frac{a!(k-a)!}{k!}p^a q^{k-a} \qquad \textbf{[004.018]}$$

Dovro` sommare per a che va da 0 a K, e ricordo che K = (N-3)/2. Si dira`: che razza di calcolo. Ma non vedete che questa somma e` la classica espressione di Newton delle potenze del tipo $(a+b)^n$?

Percio` la probabilita` di K sequenze intermedie sara` semplicemente:

$$(p+q)^k = \left(\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^2}\right)^k = \left(\frac{7}{9}\right)^k \qquad \textbf{[004.019]}$$

La probabilita` che il ragno raggiunga la formica in esattamente N passi sara`, ricordando il contributo "fisso" 3→2→1→0:

$$P(N) = \frac{6}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{N-3}{2}} \qquad \textbf{[004.020]}$$

La media si ottiene sommando i termini del tipo NxP(N) (con N=3, 5, 7, ecc.) che si puo` riscrivere come (posto k=(n-3)/2):

$$M = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{6}{27}(2k+3)\left(\frac{7}{9}\right)^k = 10 \qquad \textbf{[004.021]}$$

(ricordando che $\sum q^k = \frac{1}{1-q}$ e ricavandosi $\sum kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$ dove q<1).

Percio` il ragno raggiungera` la formica in un numero medio di passi pari a 10. Il valore minimo e` 3. Se volete, calcolatevi la varianza, a me non va.

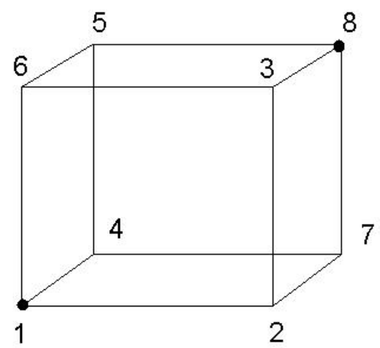
Visto? Quello che ci sembra molto istruttivo e` che, in fondo, il metodo e` il medesimo di "Lento & Violento", ma scritto in maniera sintetica e efficace. Insomma, e` come se noi avessimo detto a Viggio: "Ecco, questa e` la nostra soluzione, ma ci sembra un po` troppo lunga e didascalica. Ce la tradurresti mica in matematica elegante e sintetica?". O, se preferite, e` come se noi avessimo "riscritto" la sua a beneficio di chi non ha familiarita` con le serie e con l'espressione binomiale di Newton. Poi, gia` che c'è, Viggio sfiora anche il discorso sulla "parita`" degli spigoli, cosa che non abbiamo toccato per niente... ma da questo punto di vista, c'e` chi sale decisamente in cattedra...

Pari & Dispari

Diego e` arrivato da poco, e non sappiamo con quale allonimo preferisce essere chiamato. Quello che gli attribuiamo d'ufficio, al momento, e` ***BegoMaggiore***, ma lo lasciamo libero di cambiare. Si presenta bene, con una pungente osservazione gia` nel titolo della mail ("*All'inseguimento della formica ferma!*") come a sottolineare ironicamente che, finché la formica e` incollata su un vertice, non si tratta di un vero e proprio inseguimento. In realta`, come ci siamo resi conto leggendo una sua preziosa nota a pie` di pagina, quel che BegoMaggiore ha notato e` che, stante le condizioni al contorno, esiste una strategia vincente per una formica che abbia dalla sua la possibilita` di muoversi, un buon senso dell'udito, e niente altro: non le servirebbe neanche il cervello. State a sentirlo:

> A condannare la formica e` certamente l'immobilita`. Anche una formica cieca e disorientata si salverebbe, se solo iniziasse prontamente a spiccare salti sincroni a quelli del ragno. Infatti, essendo partiti da vertici di opposta parita`, cacciatore e preda si troverebbero, dopo un numero arbitrario di salti, ancora su vertici di parita` opposta. L'inseguimento non avrebbe mai fine...ed il titolo del problema sarebbe davvero adeguato.

Davvero notevole, no? Le direzioni dei salti non contano niente, e` vero: se la formica si peritasse solo di mantenere la parita`, nessun ragno potrebbe mai catturarla! Tra lei e il ragno (che potrebbe anche avere vista d'aquila e cervello einsteiniano, a questo punto) resterebbero 1 o 3 spigoli, inevitabilmente. E la parita`, BegoMaggiore se la porta appresso per quasi tutta la sua soluzione:

> Etichettiamo i vertici del cubo nella maniera riportata in figura: gli spigoli connettano, cioè, vertici di parita` opposta. Il ragno (cieco, disorientato e affamato) è, inizialmente, in 1 mentre la formica (in crisi di panico) e` inchiodata in 8.
>
> 
>
>
> Come e` evidente i vertici pari (dispari) potranno essere raggiunti dal ragno solo con un numero dispari (pari) di salti. Consideriamo [solo mentalmente, la figura potete scordarvela (PRS)] il diagramma ad albero che rappresenta tutti i possibili sviluppi dell` inseguimento. Dopo k salti avremo $N(k) = 3^k$ possibili percorsi: indichiamo con $V(k)$ il numero di percorsi vincenti fra essi.
>
> Per definizione un percorso di k salti e` vincente se il ragno, percorrendolo, si imbatte nella formica dopo un numero di salti $m \leq k$. Ad esempio sono vincenti i percorsi: 1→2→1→4→7→8→3 (per il quale $k = 6$ ed $m = 5$) e 1→6→3→8 (per il quale $k = m = 3$).
>
> Il rapporto $F(k) = V(k) / N(k)$ rappresenta, allora, la probabilita` (cumulativa) che il ragno incontri la formica dopo un numero di salti minore o al piu` uguale a k.
>
> Valgono le seguenti relazioni di ricorrenza:
>
> $$k \text{ pari, } k \geq 2 \ \Rightarrow \ V(k) = 3V(k-1) \qquad \textbf{[004.022]}$$
>
> $$k \text{ dispari, } k \geq 3 \ \Rightarrow \qquad \textbf{[004.023]}$$

$$V(k) = 2\left(3^{k-2} - V(k-2)\right) + 3V(k-1) =$$
$$= 2\left(3^{k-2} - V(k-2)\right) + 3^2 V(k-2) =$$
$$= 7V(k-2) + 2 * 3^{k-2}$$

mentre ovviamente:

$$V(0) = V(1) = 0 \quad \textbf{[004.024]}$$

Ne consegue:

$$k \text{ pari, } k \geq 2 \;\Rightarrow\; F(k) = F(k-1) \quad \textbf{[004.025]}$$

$$k \text{ dispari, } k \geq 3 \;\Rightarrow\; F(k) = \frac{7}{9}F(k-2) + \frac{2}{9} \quad \textbf{[004.026]}$$

e:

$$F(0) = F(1) = 0 \quad \textbf{[004.027]}$$

Utilizzando iterativamente [26] e [25] e ricordando la [27] se ne conclude:

$$F(2n+2) = F(2n+1) = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{7}{9}\right)^k \text{ per } n = 1,2,... \quad \textbf{[004.028]}$$

Muniti dell'espressione esplicita per la probabilita` cumulativa [28]. possiamo ricavare la funzione $f(m)$ che rappresenta la probabilita` che il ragno incontri la formica proprio all` m-esimo salto:

$$f(m) = F(m) - F(m-1) \quad \textbf{[004.029]}$$

Riesce:

$$\text{m pari : } m = 2h\text{, h=1,2,...} \;\Rightarrow\; f(m) = f(2h) = 0 \quad \textbf{[004.030]}$$

$$\text{m dispari: } m = 2h+1\text{, h=1,2,...} \;\Rightarrow$$
$$f(m) = f(2h+1) = \frac{2}{9} * \left(\frac{7}{9}\right)^{h-1} \quad \textbf{[004.031]}$$

con:

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \textbf{[004.032]}$$

La [30] e` coerente con quanto gia` rilevato circa l'impossibilita` di raggiungere vertici pari (quale il numero 8 in cui e` inchiodata la formica) con un numero di salti pari.

Il numero atteso di salti perché il ragno sazi la sua sete di acido formico puo` dunque scriversi:

$$E(m) = \sum_{m=0}^{\infty} m * f(m) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1) * f(2n+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1) * \frac{2}{9} * \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \quad \textbf{[004.033]}$$

Ricordando che, purche` sia $|z| < 1$, riesce

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \quad \textbf{[004.034]}$$

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{m=1}^{\infty} m*z^{m-1} \qquad [004.035]$$

si ottiene per [33]. il valore numerico:

$$E(m)=10 \qquad [004.036]$$

Visto che roba? E poi venite a dirmi che pari e dispari e` piu` noioso della morra cinese. Inoltre, il giovanotto mostra di essere a suo agio anche tra i classici, visto che per aggiungere la nota di colore finale tira in ballo Leopardi, ovviamente fatta salva la traduzione delle bestie guerreggianti in acconcia parola colta sempre dal sapore ellenico:

> **Paralipomeni all` aracnomirmecomachia.**
>
> Ottenuto che ebbi il risultato, mi punse vaghezza di testarlo con una piccola simulazione. Immaginavo di gia` la struttura del programma Fortran che avrebbe fatto all'uopo (il Fortran e` l'unico linguaggio di programmazione col quale abbia un po` di dimestichezza) *[sai cosa significa questo, Bego? Significa che non sei poi cosi` tanto "giovanotto"...(PRS)]*, quando mi sovvenne il tristo pensiero: "Poffarbacco! io non son munito di alcun compilatore Fortran". Non sopportando una seconda sconfitta (dopo quella inflittami dal diagramma ad albero) fui indotto a tentare il gesto eroico: far girare la simulazione sulla mia vecchia, cara calcolatrice scientifica. Purtroppo l'amabile congegno si trovava nelle grinfie del fratellino, futuro ingegnere civile (ahime` succede anche nelle migliori famiglie), a suo dire indaffaratissimo nella preparazione di non so quale esame.
>
> Ne sorse una sanguinosa contesa.
>
> Prevalsi, infine. Ora, pur confortato dall'esito della simulazione, non riesco ad eludere un terrifico pensiero: "E se il prezzo da pagare fosse il crollo, un giorno, di una diga?".

Tanto peggio per la diga. Il cubo mirmecoaracnizzato ne valeva la pena. E se il fratello minore protesta, minaccialo di iscriverlo d'ufficio a RM: l'allonimo ***BegoMinore*** e` ancora libero...

Eccole qua, tre belle soluzioni diverse, non solo di matematica, ma anche d'approccio! Ancora una volta abbiamo dimostrato che sono molte, diverse, varie, le strade per raggiungere una soluzione. Dovessimo proprio fare l'ultimo esame di coscienza, cosa potremmo trovare da ridire? Beh, a voler fare i pignoli... tutte le soluzioni presuppongono la capacita` di sommare almeno le serie geometriche, visto? Quella formula che in Lento&Violento appare con il numero [10] , compare sempre, in tutte le soluzioni. E` vero che abbiamo cercato di spiegarla, ma resta sempre una mezza sconfitta. Il problema del cubo non e` affrontabile con la normale "matematica da liceo", insomma...

...perché, a ben vedere, basta quella delle medie.

Veloce & Sagace

Speravamo proprio che non se accorgesse nessuno. Una delle ragioni per cui "Inseguimento" ci pareva cosi` carino era proprio la spettacolare distanza tra una soluzione come la prima riportata e questa che ci accingiamo a scrivere. Invece non possiamo scriverla, perché il solito ***PuntoMauPunto*** e` arrivato a romperci le scatole. E si permette di iniziare la soluzione con un "Non capisco il problema..."

> Non capisco il problema. O meglio, non capisco il "ci si aspetta". Partendo dal principio che il ragno possa stare solo sugli spigoli, e` chiaro che se ci vedesse basterebbero tre spigoli. Se il ragno si muove in maniera completamente casuale da uno spigolo all'altro, il nostro amico Markov ci arriverebbe in aiuto, ma io continuo a fare i conti con le ricorrenze. Stendiamo un pietoso vel... ehm, stendiamo il cubo su un piano *[...ci si chiede se sia peggio la battuta o il disegno...(RdA)]*: il ragno sta

```
B----A
|\   /|
| G-F |
| | | |
| H-E |
| /  \|
C-----D
```

in A, e la formica - ma non dovrebbe essere una mosca? - in H. Nota che ho messo le lettere in modo da avere un cammino hamiltoniano :-) Abbiamo quindi un punto (A) a distanza 3; tre punti (B, D, F) a distanza 2; tre punti (C, E, G) a distanza 1; un punto (H) a distanza 0. A questo punto, supponendo che il ragno si muova casualmente, abbiamo le seguenti uguaglianza sul valore aspettato E(P) del numero di passi necessari per raggiungere la formica dal punto P.

(1) E(A) = 1 + E(B) *(ci si avvicina sempre... ma si e` fatto un passo)*

(2) E(B) = 1 + 1/3 E(A) + 2/3 E(C)

(3) E(C) = 1 + 2/3 E (B) *(a volte ce la fa)*

Sostituendo la (3) nella (2) otteniamo

(4) 5 E(B) = 15 + 3 E(A)

e sostituendo la (1) nella (4) ricaviamo finalmente E(B) = 9 , da cui E(A) = 10 e E(C) = 7 il che dimostra che essere piu` vicini non aiuta troppo, se si e` cecati.

Visto? Ad essere sinceri, quel che piu` irrita i sottoscritti e` una banale coincidenza. Avete visto che PuntoMauPunto (che non si spreca mai troppo con le parole) nella sua oculata scelta delle variabili indica come indici A (corrispondente del solo vertice A del suo orribile disegno), B (corrispondente dei vertici B, D e F; si limita poi a menzionare solo il primo in ordine alfabetico) e C (corrispondente ai vertici C, E e G). Il suo velocissimo risultato viene quindi a coincidere, anche nella notazione, con la laboriosissima soluzione "Lento&Violento", in cui sono gli "stati", e non i vertici, ad essere definiti con A (proprio quello per il quale il valore atteso risulta 10), B (quello che abbiamo sudato sette camicie per definire pari a 9) e il cuore di tutto, lo stato C, con valore atteso 7.

Assolutamente irritante, non vi pare?

4.2.2 Quattro "Mattimatici"

Si, lavorare in questi campi porta alla follia... Ma di questo ne parliamo dopo.

In tempo quasi-reale sono arrivate le soluzioni di ***Sam*** e ***PuntoMauPunto***, seguite da ***Viggio***; il buon Viggio se la cava con un correttissimo ragionamento basato sulle tavole di verita`, mentre il nostro PMP come al solito e` stringatissimo, e Sam deve avere il tasto dell'"Enter" che non funziona... Vediamo quest'ultima, che mi sembra un po` piu` discorsiva (a chiarezza sono valide tutte e tre, va detto...)

> [...]possiamo vedere che Cantor afferma di essere "Applicativo" e quindi non puo` essere che un matto, poiche` se fosse sano avremmo o un app. sano che dice la verita` o un teorico sano che dice il falso, entrambe contraddizioni. Ora, ne segue che Abel e Descartes dicono entrambi il falso e quindi Abel e` sano ed e` applicativo, mentre D e` matto ed e` un teorico. A questo punto e` evidente che Bernoulli dice il vero e quindi e` un teorico e per di piu` sano, ma allora Cantor mente ed e` quindi un teorico, anche se matto. Tutta questa confusione discende dal fatto che un teorico sano e un applicativo matto direbbero entrambi la verita`, mentre un teorico matto e un applicativo sano mentirebbero tutti e due. In definitiva, Abel e` un Applicativo Sano, Bernoulli e` un Teorico Sano, Cantor e` un Teorico Matto, Descartes e` un Teorico Matto. Scusa se scrivo confusamente, ma ho fretta perche` due signori con il camice bianco stanno venendo a prendermi!!

Don't Panic, come diceva Douglas Adams... In realta` i due vestiti di bianco stanno cercando ***Desmatron***: soluzione sbagliata, ma interessante...

> Il problema dei quattro mattimatici e` indubbiamente il piú ardito problema di teoria dei grafi mai apparso sulla terra. Ma altrettanto ardita e` la seguente soluzione: TTTT, ovvero tutti al Dipartimento di Matematica Pura.
>
> Il teorico dice quello che pensa ed Abel pensa di essere matto, ma non potremo mai stabilire se lo sia davvero se non prima ci mostra la sua cartella clinica.

Bernoulli dice di essere un teorico e perció pensa di esserlo (acuto direi). Cantor dice di essere un applicativo, ma in realtá non sa ancora di essere un teorico anche lui. Descartes dice di non esser matto, ma il fatto che sia comunque un teorico non lo vieta nessuno. Abel torna alla carica facendoci sapere che pensa che Cantor non sia matto, come il contrario pensa Bernoulli su Cartesio. Cantor pensa che Bernoulli sia un applicativo, ma in realtá gli manderemo una raccomandata per aggiornarlo sul mestiere di Bernoulli, cioe` quello di teorico. Infine Cartesio pensa che Cantor sia sano di mente.

Tanto piacere.

Ma veniamo al punto della dimostrazione. La configurazione che implica che siano tutti teorici e` una configurazione possibile vista l'ambiguitá del pensare di ognuno: *i teorici dicono quello che pensano* non implica che pensino il vero e dunque non ci permette di poter valutare il loro stato mentale solamente dalle loro affermazioni.

Potremmo affermare secondo voi che le informazioni in nostro possesso non sono sufficienti?

[Quello che si puo` affermare dalle informazioni in nostro possesso e` che c'e` da diventare dei Teorici, a reimpaginare le vostre soluzioni... (RdA)]

5. Quick & Dirty

Ci siamo finalmente decisi a fare le pulizie nella redazione (virtuale) di RM. Ora, quello che sappiamo e` che:

*Alice e Doc ripuliscono il tutto in **6** ore.*

*Rudy e Doc ripuliscono il tutto in **3** ore.*

*Alice e Rudy impiegano per fare lo stesso lavoro **1** ora e **12** minuti.*

Quanto impieghera` Alice se deve pulire tutto da sola?

...e tutti giu` a dire... "Buuu! Basta risolvere il sistema di equazioni!" Gia`, ma pochi di voi lo hanno fatto.

E quei pochi si sono accorti che ***Alice** da sola impiega meno tempo che insieme a Doc!* Come puo` testimoniare chiunque lo ~~conosca~~ abbia subito, i discorsi di Doc sono cosi` interessanti da distrarre chiunque dal proprio lavoro...

6. Pagina 46

(1).

Si verifica facilmente che, per $x < 5$, si hanno solo le coppie di soluzioni:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \texttt{[006.001]}$$

Inoltre, si nota che e`

$$\sum_{i=1}^{4} i! = 33 \qquad \texttt{[006.002]}$$

e quindi (terminando tutti i fattoriali maggiori di ***4!*** per zero) *la somma per valori di* $x \geq 5$ *terminera` sempre per* **3**.

Siccome i quadrati degli interi terminano sempre per ***1***, ***5***, ***6***, ***9***, l'equazione e` soddisfatta solo per i valori indicati in `[006.001]`.

(2).

Si possono considerare due casi:

(A) $z = 2n$ **(pari)**

In questo caso, possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{x} i! = y^z = \\ = y^{2n} = \left(y^n\right)^2 \qquad \texttt{[006.003]}$$

Ricadendo nelle condizioni del caso **(1)**.

(B) $z = 2n+1$ **(dispari)**

Caso ***z=1***

Si ha la soluzione banale.

Caso $z \geq 3$

Si consideri la sommatoria limitata ai primi ***otto*** termini:

$$\sum_{i=1}^{8} i! = 46233 \qquad \texttt{[006.004]}$$

Il quale e\` divisibile per ***9*** ma non e\` divisibile per $3^3 = 27$, mentre se $x \geq 9$ allora ***n!*** e\` divisibile per ***27***.

Questo significa che

$$\left\langle \sum_{i=9}^{x} i! \right\rangle_{27} = 0 \qquad \texttt{[006.005]}$$

Ossia la nostra sommatoria e\` divisibile per ***27***.

Ma questo implica, considerando la divisibilita\` dei due termini `[000.004]` e `[000.005]` sommati tra di loro,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{x} i! \right\rangle_{27} \neq 0 \qquad \texttt{[006.005]}$$

Questo significa che affinche\` $\left\langle y^z \right\rangle_9 = 0$ si deve avere (per $z \geq 3$) che $\left\langle y^z \right\rangle_{27} = 0$

Quindi, per $x \geq 8$ e $z \geq 3$ *l'equazione non ha soluzione*.

Per quanto riguarda $x < 8$, si vede per enumerazione che nessuna delle sommatorie da\` una potenza di un naturale.

Quindi, le soluzioni per ***x*** dispari si riducono a:

$$x = 1; y = 1; z \in 2N + 1 \\ x \in N; y = \sum_{i=1}^{x} i!; z = 1 \qquad \texttt{[006.006]}$$

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 "Z"

...Finalmente, una cosa interessante da fare durante le riunioni noiose!

Sorry friends, ma sto parlando d'altro: intenzione e` affrontare alcuni ostici argomenti, cercando di cavarci fuori qualcosa di divertente.

Per prima cosa, vi spiego lo schema del tutto. Esistono, in Teoria dei Numeri (argomento piuttosto noioso, se devo dire), alcuni teoremi che *devono* avere qualche risvolto interessante... Lo si sente a distanza. Un buon lavoro, nel campo, lo ha fatto *Manfred Schroeder* (autore di un libro del quale abbiamo gia` parlato: vi ho detto che non ve lo presto); questa volta, scopo del gioco e`:

1. Parlare di un teorema noiosissimo;
2. Vedere un metodo piuttosto simpatico per avvicinarsi alla soluzione;
3. Avere una (vaga) idea della strada esatta
4. Fornire un modo per assurgere a fama imperitura
    4.1. Incidentalmente, guadagnare un milione di dollari.

Voglio sperare che, se riuscite a soddisfare la richiesta 4.1, vi ricordiate di chi vi ha portato per manina nella matematica ricreativa (*c'est moi*).

Il teorema noioso e` quello della *distribuzione dei primi*; la cosa non mi ha mai emozionato particolarmente, almeno sin quando non sono riuscito a trovare una dimostrazione divertente del fatto. Qui, per dimostrazione "divertente" si intende una dimostrazione che, contrariamente ai canoni di pedanteria della matematica, taglia di brutto per i campi, arrivando ad un risultato ragionevolmente corretto. Cediamo la parola a Manfred Schroeder[17].

Credo vi ricordiate che un numero su tre e` divisibile per tre, un numero su cinque e` divisibile per cinque, eccetera. Piu` formalmente, la probabilita` che un numero sia divisibile per un ***primo*** p_i e` $\frac{1}{p_i}$.

Da questo, sempre proseguendo sul ragionamento probabilistico, si ha che la probabilita` che un numero arbitrario ***non*** sia divisibile per un primo $p_i$ e` $1-\frac{1}{p_i}$.

Supponiamo ora che la probabilita` di divisibilita` per primi diversi sia *indipendente* (non e` proprio vero, ma abbiamo ammesso i tagli per i campi...). A questo punto, la probabilita` che ***x*** *non* sia divisibile per nessun primo risulta:

$$W(x) \approx \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots = \prod_{p_1<x}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) \qquad \texttt{[007.001]}$$

Gia`, ma "non divisibile per nessun primo" significa che ***x e` primo***, quindi quella che abbiamo appena ottenuto e` la probablita` che il nostro ***x*** sia primo. Potremmo fare i raffinati e ridurre il calcolo della produttoria ai primi minori della radice quadrata di ***x***, ma per adesso lasciamo perdere.

[17] No, non era una riunione noiosa... Stava tornando a casa da un corso sulla *warscheinlichkeitsrechnung* (lo teneva Courant, quindi **non** era noioso) e il treno era molto lento... Un ringraziamento alle ferrovie tedesche.

Siccome la produttoria piace poco (peggio dei logaritmi), trasformiamola in sommatoria (usando i logaritmi):

$$\ln(W(x)) \approx \sum_{p_i<x} \ln\left(1-\frac{1}{p_i}\right) \qquad [007.002]$$

Se dobbiamo tagliare per i campi, che si tagli in modo deciso: sviluppiamo i logaritmi in serie di potenze, fermandoci al primo termine:

$$\ln(W(x)) \approx -\sum_{p_i<x} \frac{1}{p_i} \qquad [007.003]$$

Ora arriva il colpo gobbo: per ***n*** genericamente intero, sotto sommatoria l'elemento $\frac{1}{n}$ si presentera` con probablita` $W(n)$, cioe` la sua probabilita` di essere primo; estendendo la sommatoria a *tutti gli interi*, ricavo:

$$\ln(W(x)) \approx -\sum_{n=2}^{x} \frac{W(n)}{n} \qquad [007.004]$$

E, sostituendo la sommatoria con un integrale:

$$\ln(W(x)) \approx -\int_2^x \frac{W(n)}{n} dn \qquad [007.005]$$

Definiamo ora la ***distanza media*** come $A(x) = \frac{1}{W(x)}$ e sostituiamo:

$$\ln(A(x)) \approx \int_2^x \frac{dn}{n * A(n)} \qquad [007.006]$$

Che differenziato da`:

$$\frac{A'(x)}{A(x)} \approx \frac{1}{x * A(x)} \qquad [007.007]$$

Ossia

$$A'(x) \approx \frac{1}{x} \Rightarrow A(x) \approx \ln(x) \Rightarrow W(x) \approx \frac{1}{\ln(x)} \qquad [007.008]$$

...Il pensiero, a questo punto, e` che ormai il segno di "approssimativamente uguale" significhi in realta` "somiglia molto vagamente". Il bello e` che ci azzecca abbastanza bene, tant'e` che ci vuole un treno ***molto*** lento per trovare qualcosa di meglio.

Se ***W(x)*** e` la densita` media dei primi, allora il numero dei primi minori o uguali a ***x*** vale:

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dy}{\ln y} \doteqdot \mathrm{Li}(x) \qquad [007.009]$$

Dove l'uguale tripuntato sta per "uguale per definizione" (non ho il simbolo che uso a mano, sorry) e ***Li(x)*** e` il ***logaritmo integrale***.

Il buon ***Gauss*** aveva dato una prima stima $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$; non un gran che, effettivamente, tant'e` che successivamente aveva reso piu` accurati i conti utilizzando il logaritmo integrale. Anche questa, pero`, non e` propriamente una meraviglia, in quanto se consideriamo la funzione $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ (ricavando i valori di $\pi(x)$ per elencazione), vediamo che gia` dalle parti di $x = 10^7$ la funzione vale circa ***300*** e rimane sicuramente positiva per $x < 10^9$. Non e` comunque il caso di buttarla via, in quanto ***Skewes*** ha dimostrato (dalle parti del 1933) che $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ ha ***infiniti zeri***, almeno uno dei quali si trova al di sotto[18] di $x = 10^{10^{10^{34}}}$, probabilmente dalle parti di $x = 10^{370}$.

Anche ***Legendre*** si e` dato da fare in merito, e aveva trovato l'approssimazione $\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1.08366}$. Per ***x*** al disotto di (suppergiu`) cinque milioni si comporta meglio del logaritmo integrale, ma dopo comincia a fare decisamente le bizze.

Se vi ricordate, poco sopra avevamo detto che anziche` considerare i primi sino a ***x***, nella nostra (pseudo)dimostrazione, bastava lavorare con quelli al di sotto di $\sqrt{x}$. ***Riemann***, lavorandoci su, e` riuscito a dimostrare che

$$\pi(x) \approx R(x) \doteqdot \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}\left(\sqrt[3]{x}\right) - \ldots = \mathrm{Li}(x) - \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i}\mathrm{Li}\left(\sqrt[i]{x}\right)$$

che sembra comportarsi decisamente bene sin dalle parti di $x = 10^7$ (non che dopo si comporti male: i dati che ho si fermano li`...).

Un centinaio di anni dopo, ***Hadamard*** e ***de la Vallee`-Poussin*** hanno dimostrato che $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x) * \ln x}{x} = 1$; siccome pero` avevano usato metodi analitici, la cosa non era piaciuta; c'e` poi riuscito ***Erdös*** nel 1948, usando solo metodi della teoria dei numeri.

La cosa estremamente seccante in questo campo e` che esiste una formula ***esatta***, anche se un po` complicata:

$$\pi(x) = \lim_{k\to\infty} R_k(x) \qquad \texttt{[007.010]}$$

dove abbiamo (beh, no, "hanno"...) definito

$$R_k(x) \doteqdot R(x) - \sum_{l=-k}^{k} R(x^{\rho_l}) \qquad \texttt{[007.011]}$$

Dove ρ_l e` l'***l-esimo zero*** (non banale, anzi piuttosto "complesso") ***della funzione***

$$\zeta(s) \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad \texttt{[007.012]}$$

Che e`, finalmente, la nostra ***zeta di Euler*** (vi avevo detto che sarei riuscito a parlarne...). Facci capire, Rudy, vuoi dire che tutta 'sta roba che hai scritto sopra e` l'*introduzione*? Beh, si... Ma adesso viene il bello.

[18] Per un po` di tempo, questo e` stato il piu` grosso numero direttamente utilizzato in una dimostrazione matematica; dopo sono arrivati Charmichael e Godel (no, nessuno di loro usa Excel).

In realta`, Eulero non si e` alzato la mattina pensando alla Zeta; quello che lo preoccupava all'epoca era il fatto che la ***serie armonica*** ha somma infinita:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty \qquad \texttt{[007.013]}$$

in particolare, si stava chiedendo se fosse, per caso, colpa dei primi.

Ora, un passaggio piuttosto immediato (se vi chiamate Euler: sconsigliato nei compiti in classe) e` quello di dividere la somma in due parti:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\sum_{i\in P}^{\infty}\frac{1}{i}+\sum_{i\notin P}^{\infty}\frac{1}{i} \qquad \texttt{[007.014]}$$

(si vede, che la prima e` estesa a tutti i primi e la seconda a tutti i composti? Non stiamo a sottilizzare, ***1*** mettiamolo nella prima) e quindi, se riusciamo a dimostrare che la seconda converge, vuol dire che la divergenza della serie armonica e` colpa dei primi.

Gia`, ma il fatto che la serie armonica abbia un infinito numero di termini fa si` che il passaggio indicato non sia proprio di un'immediatezza lampante... Euler, allora, ha tirato un po` a barare.

Supponiamo (si e` detto Leonhard) di avere un numero ***s*** di poco maggiore di ***1*** e, anziche`alla serie armonica, diamo uno sguardo alla:

$$\zeta(s)\doteqdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}} \qquad \texttt{[007.015]}$$

Ora, *questa* converge, se ***s>1***. Allora possiamo spezzarla in due parti:

$$\zeta(s)=\sum_{i\in P}^{\infty}\frac{1}{i^{s}}+\sum_{i\notin P}^{\infty}\frac{1}{i^{s}} \qquad \texttt{[007.016]}$$

E, se riusciamo a stabilire che per ***s*** tendente a ***1*** la prima serie non e` limitata, siamo riusciti a capire di chi e` la colpa per la mancata convergenza della serie armonica.

Ora, si sa che, per ogni $0<x<1$, e`:

$$\sum_{i=0}^{\infty}x^{i}=\frac{1}{1-x} \qquad \texttt{[007.017]}$$

e, se imponiamo $x=\frac{1}{p^{s}}$ dove ***p*** e` un primo, possiamo costruire una funzione che e` un prodotto infinito di serie infinite (resistete un attimo, poi la cosa si semplifica...), in cui ciascuna delle serie infinite converge a un termine del tipo della serie geometrica, solo che *utilizziamo **p***. In sostanza, tutti gli elementi sono del tipo:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^{s}}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p^{is}} \qquad \texttt{[007.018]}$$

Credo che il genio di Eulero si veda nell'avere il coraggio di andare avanti, nonostante l'espressione totale sia terribile. Se trattiamo il prodotto infinito di somme infinite come se fossero finiti (in questo caso si puo`; siamo sicuri che convergono), abbiamo che saltano fuori dei termini del tipo:

$$\frac{1}{p_1^{k_1 s} * \ldots * p_n^{k_n s}} \qquad \textbf{[007.019]}$$

dove i p_i sono primi tutti diversi tra loro e i k_i sono interi positivi; inoltre, ogni "coppia" compare una e una sola volta.

Pero` dal Teorema Fondamentale dell'Algebra sappiamo che *qualsiasi intero positivo* puo` essere espresso nella forma $N = \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$ e quindi la robaccia che abbiamo sopra non e` altro che una variazione sul tema della $\zeta(s)$. Recuperando le nostre notazioni, possiamo scrivere:

$$\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s} = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \qquad \textbf{[007.020]}$$

Uffa! Ci siamo arrivati. Prego notare che la produttoria e` estesa a tutti i primi, mentre la sommatoria e` estesa ai numeri naturali[19]

Il giochino si fa piu` interessante quando cercate gli ***zeri*** della funzione; esistono degli zeri ("banali") per ***-2***, ***-4***, ***-6***,...; inoltre, ci sono gli zeri (complessi)

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2} + 14.134725\ldots i \\ \rho_2 &= \frac{1}{2} + 21.022040\ldots i \\ \rho_3 &= \frac{1}{2} + 25010856\ldots i \end{aligned} \qquad \textbf{[007.021]}$$

...e avanti cosi`.

Ora, ai piu` maneggioni di voi puo` sorgere un sospetto... Beh, siete in buona compagnia: infatti, ***Riemann*** ipotizzo` che: $\forall i > 0, \mathrm{Re}(\rho_i) = \frac{1}{2}$.

Poteste provare a dimostrarla, l'ipotesi di Riemann. Se ce la fate, mandateci la dimostrazione e ditelo anche alla Clay University; entrambi pubblicheremo, ma loro vi daranno anche qualche soldino. E` uno dei nove "Problemi del Millennio" (questo, non l'altro), e ognuno di questi ha un premio per il primo solutore di un milione di dollari.

Se siete degli *aficionados* del metodo esaustivo, potreste cercare uno zero che non rispetta l'ipotesi; sia a noi che alla Clay U. va bene lo stesso. Attenti pero` che per il primo paio di miliardi di zeri ha ragione Riemann, quindi la cosa non e` semplicissima.

Solo un piccolo *caveat*: a giudizio della Redazione, tra i nove Problemi del Millennio questo e` il piu` facile. Se siete interessati fatecelo sapere, che vi mandiamo un po` di materiale; siccome pero` abbiamo pieta` dei sani di mente, qui non ne parliamo.

No, non vi diamo la soluzione, il mese prossimo...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[19] Vorrei solo farvi notare che il valore di $\zeta(2)$ ve lo ha gia` fornito Piotr tempo fa; lui ha usato l'espressione attraverso sommatoria, ma e` la stessa cosa.