Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 049 - 2003-02

1. Stanlio e Ollio ... 1

2. Problemi ... 7

2.1 Basta meloni! ... 7
2.2 Torneo ... 7

3. Bungee Jumpers ... 8

4. Soluzioni e Note ... 8

4.1 [041] ... 8
4.1.1 Tutti in giardino! ... 8
4.2 [045] ... 10
4.2.1 Sono cavoli vostri... ... 10
4.3 [047] ... 10
4.3.1 Le Biglie di Alberto ... 11
4.4 [048] ... 11
4.4.1 I soliti logici ... 11
4.4.2 X-Files! ... 15

5. Quick & Dirty ... 19

6. Zugzwang! ... 21

6.1 Il gioco del tredici ... 21

7. Pagina 46 ... 21

8. Paraphernalia Mathematica ... 22

8.1 La Foresta di Stern-Brocot [001] ... 22

1. Stanlio e Ollio

"Ho dimostrato l'ipotesi di Riemann".

Le parole erano vergate in bella calligrafia sulla cartolina postale indirizzata al Trinity College di Cambridge; se si aggiunge anche il rimarchevole fatto che erano seguite dalla firma del piu` autorevole matematico inglese dell'epoca, abbiamo tutti gli ingredienti necessari per quella che sembra essere la cronaca della scoperta matematica del ventesimo secolo. E forse non solo del ventesimo.

L'ipotesi di Riemann[1] e` l'Araba Fenice, l'Ultima Thule, il Passaggio a Nordovest della matematica e dei matematici moderni, almeno secondo il parere di molti. Adesso che

1 Non basta una nota a pie` di pagina per parlare dell'Ipotesi di Riemann, quindi questa non e` una spiegazione (o, al più, questa non e` una nota a pie` di pagina). Se vi suona del tutto nuova, fate una ricerca sulla "Funzione Zeta di Riemann", o magari direttamente sugli "Zeri della Zeta di Riemann", per

il ventesimo secolo e` diventato storia, ci si puo` liberamente accapigliare nel decidere quale sia stata la scoperta matematica piu` importante del Novecento: molti propenderanno per il Teorema di Incompletezza di Gödel[2], che e` davvero un punto di svolta nella filosofia e nella matematica: ma proprio per questo non mancheranno coloro che affermeranno che si tratta piu` di logica, di filosofia, che di vera matematica. E ci sara` chi saltera` dall'inizio del secolo alla fine, da Gödel a Wiles, per affermare che la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat e` sicuramente la memoria matematica che merita il primo posto nella classifica novecentesca. Quattro secoli di sforzi, racchiusi in qualche centinaio di pagine di dimostrazione. Ma proprio per questo ci sara` chi sosterra` che quella dimostrazione e` troppo tecnica e misteriosa per essere davvero universale: non solo, ma che il fascino dell'Ultimo Teorema sta in fondo piu` nella nota assassina che Fermat scrisse a margine[3] della sua "Aritmetica" di Diofanto che nella forza della dimostrazione stessa.

Ma scommetteteci pure tutto quello che avete nelle tasche: se la frase scritta in quella cartolina postale fosse stata vera, non ci sarebbero stati dubbi nell'assegnazione del titolo, con buona pace di tutti i bastian contrari[4]. Quando fu chiesto a Hilbert quale fosse la conquista tecnologica piu` importante ancora da realizzare, rispose "il viaggio sulla Luna", perché era sua convinzione che arrivare lassu` avrebbe implicato la risoluzione della gran parte dei problemi materiali dell'umanita`[5]; quando subito dopo gli chiesero quale fosse invece la scoperta matematica piu` importante ancora da realizzare, rispose che era "...il problema degli zeri della Zeta di Riemann. Ma" - aggiunse - "non solo per la matematica: in assoluto."

Eppure, assai probabilmente quella cartolina non suscito` il gran clamore che avrebbe meritato. La firma in calce era quella di Godfrey Harold Hardy, e le stranezze del professor Hardy erano note a tutti, a Cambridge, dal magnifico rettore fino all'ultimo usciere. Come lo stesso Hardy poi spiegò, quella frase era in realta` una sua speciale "assicurazione": stava tornando da un congresso in Danimarca, e al momento di prendere il battello il mare era assai agitato, al punto di preoccupare molti dei passeggeri. Hardy compro` allora la

saperne di più. Oppure scrivete alla vostra rivista di matematica preferita per sollecitare uno "speciale". Dubito che vi accontenteranno, ma non si puo` mai dire... *[Tranquilli, arrivera` anche lei: in un PM in corso di scrittura (RdA)]*

2 Ecco, la nota numero due dovrebbe essere sostanzialmente identica, mutatis mutandis, alla numero uno. Fate voi le debite sostituzioni (Riemann/Gödel ; Zeta/Incompletezza) e noi risparmiamo un paio di righe.

3 "Hanc marginis exiguitas non caperet". Gia` sentito, da qualche parte ?

4 Doc sta seriamente studiando storia e cultura torinese: "(Se)Bastiano" (detto "Contrario") era l'organizzatore del "fatto d'armi" (si chiamavano cosi` le risse che non assurgevano al valore di battaglia) del 23 luglio 1672 contro i genovesi. Le sue scelte in merito furono cosi` azzeccate che l'impresa falli` e il suo nome passo` ad indicare una persona che si comporta all'opposto di come dovrebbe [RdA].

5 Se per puro caso state leggendo queste righe nel giorno di S.Valentino, regalate un saluto veloce a David Hilbert: e` morto esattamente sessanta anni fa. La sua opinione sulle implicazioni della conquista della Luna era probabilmente ottimistica, vero?

cartolina, scrisse la sua bugia e la imbuco` prima di salire sul battello. "Vedete" - spiego` ai compagni di viaggio - "se la nave affondasse, l'intera comunita` dei matematici rimarrebbe con il dubbio atroce che io abbia davvero dimostrato l'ipotesi di Riemann. Dio ha gia` permesso che una cosa del genere accadesse con Fermat, non permettera` certo che accada un'altra volta. Quindi, state tranquilli: questo battello arrivera` tranquillamente a destinazione".

Era il perfetto esempio di una delle molte "scommesse con Dio[6]" che G.H. Hardy era solito fare. Abbastanza strane pur se fossero state fatte da un credente, risultavano decisamente curiose se fatte da uno come lui, che dichiarava laplacianamente di non credere nell'Onnipotente. Un'altra sua frequente scommessa consisteva nell'andare a vedere le partite di cricket, sua fervente passione, ben preparato alla pioggia: ombrello, impermeabile, e valigia piena di carte da lavoro. "Dio credera` che io pensi che piova. E allora non fara` piovere. E io mi godro` la partita con il bel tempo[7]".

Nasce il 7 Febbraio 1877 in un paesino del Surrey, Inghilterra; e se il suo mese di nascita e` il pretesto che cogliamo per parlare di lui questo mese, l'anno e il luogo ci servono per notare alcune caratteristiche che lo inquadrano. E` forse il momento di massimo splendore dell'Inghilterra, quello in cui Hardy vede la luce. Sotto il regno della regina Vittoria, quando mai come prima "Britannia rules the waves"; l'epoca in cui all'incirca mezzo mondo era sotto il dominio dell'Union Jack. Pero` questo strapotere inglese sul globo terracqueo non ha eccessivo riscontro nelle scienze matematiche, anche se e` proprio grazie al lento maturare della Rivoluzione Industriale che la Gran Bretagna domina il mondo; infatti, alla fine del diciannovesimo secolo la matematica inglese non e` certo la punta di diamante del mondo accademico europeo.

Forse e` per questo che il suo nome si trova cosi` frequentemente negli aneddoti e nelle citazioni matematiche, nonostante pochi, tra i non addetti ai lavori, sappiano citare prontamente quali siano stati i suoi maggiori risultati tecnici: in qualche modo, rivitalizzo` la matematica anglosassone. Pubblico` molte memorie, e ricevette quasi tutti gli onori possibili per un matematico inglese; ma la sua personalita` sembra uscire fuori dai libri di storia della matematica con maggior prepotenza di quanto abbiano fatto i suoi, comunque innumerevoli, risultati.

Era di una onesta` intellettuale rara, e difficilmente domabile: non si adeguo` mai per comodita` alla corrente dominante del pensiero[8] e i suoi comportamenti eccentrici hanno probabilmente contribuito alla leggenda del "genio distratto". Odiava le macchine fotografiche (sembra non esistano piu` di cinque sue foto) e gli specchi (in albergo, li copriva subito con degli asciugamani) anche se sembra che la maggior parte dei contemporanei lo giudicasse assai bello. Ma le sue eccentricita` erano anche compensate dalla mancanza di pregiudizi. Con ogni probabilita`, l'aneddoto matematico piu` famoso che lo riguarda e` quello del "taxi di Ramanujan". Si racconta che il famoso matematico indiano, celebre per la sua impressionante familiarita` con i numeri e capacita` di calcolo, ricevette la visita di un collega mentre era ricoverato in ospedale a Putney. L'amico era arrivato in taxi, e tanto per far conversazione disse a

[6] La piu` famosa "scommessa" a carattere religioso fatta da un matematico resta comunque quella di Pascal: "Meglio credere in Dio che non credere: se credo e credendo sbaglio, perdo quasi niente. Se non credo e sbaglio a non credere, perdo il paradiso, la salvezza dell'anima, tutto: una posta infinitamente grande". Niente da dire, utilizza uno dei criteri classici per valutare l'onesta` nella teoria dei giochi: ma le scommesse di Hardy hanno un tono assai piu` leggero e divertente.

[7] Vi ricordiamo che in caso di pioggia (anche piuttosto leggera) le partite di cricket vengono bloccate senza possibilita` di essere riprese (Nota a cura del Glamorgan Quiet Hooligans Fan Club -RdA)

[8] "Non ha senso cercare di rientrare nell'opinione comune della maggioranza. Per definizione, c'e` gia` troppa gente che lo fa".

Ramanujan che il suo taxi aveva il numero 1729, che gli sembrava abbastanza poco interessante, come numero. "Assolutamente no!" - rispose il macinanumeri, senza pensarci un istante - "E` interessantissimo, invece! E` il numero piu` piccolo che si possa esprimere come somma di due cubi in due modi diversi[9]!".

Non compare in tutte le versioni dell'aneddoto il nome del visitatore di Ramanujan, ma quel visitatore era Hardy. E ne aveva ben donde... fu lui a scoprire il genio indiano. Ramanujan, ancora sconosciuto, aveva gia` scritto dall'India a due altri illustri matematici che pero` avevano snobbato, o quanto meno non giustamente considerato, le possibilita` che l'autore di quelle note aveva. Hardy invece lesse, rispose e accolse Ramanujan nel 1913. E per tutta la sua carriera, Ramanujan fu sempre protetto dalle larghe spalle di Hardy e da quelle del di lui amico fraterno, John Edensor Littlewood.

Forse proprio il fascino romantico del matematico indiano ha messo un po` in ombra lo straordinario rapporto di collaborazione che si era instaurato tra i due inglesi. Littlewood era di otto anni piu` giovane di Hardy, anche se visse poi abbastanza a lungo da celebrare il centenario della nascita dell'amico. Inglese del Kent, si formo` in parti diverse dell'impero, vivendo anche in Sudafrica. Nel 1903 torno` a Cambridge, e nel 1906 era gia` brillante studente dedito ad attivita` di ricerca. Per tornare a citare lo stato di inquietante isolazionismo della matematica di Albione, la "dimostrazione" dell'Ipotesi di Riemann fu proprio il secondo problema che gli venne posto a Cambridge, quasi che l'importanza e la difficolta` del compito fosse ignota al tutor[10] di Littlewood. Littlewood falli` nell'impresa, ma forse fu proprio quest'arduo compito a fargli dire la sua frase piu` famosa: "Provate a risolvere un problema difficile. Magari non lo risolverete, ma scoprirete certamente qualcos'altro".

La collaborazione tra Hardy e Littlewood durò, assidua e prolifica, per trentacinque anni. E funziono` in maniera impressionante, specialmente considerando che, a differenza di quel che accade oggi, a quei tempi le pubblicazioni erano in genere firmate da un solo autore, e non da una coppia o un gruppo. Ancora oggi si trova, nelle biblioteche di matematica d'Inghilterra, l'avviso che avverte coloro che ricercano i lavori di Littlewood di non stupirsi se ne trovano pochi, ma di estendere la ricerca anche al nome di Hardy, poiché la maggior parte dei lavori di Littlewood sono catalogati con duplice firma, e la "H" di Hardy precede alfabeticamente la "L" di Littlewood. E questo succedeva anche quando H&L erano entrambi in vita: e` passata alla storia la gaffe di un visiting professor che, quando gli presentarono Littlewood, se ne usci` con: "Oh, ma allora lei esiste veramente! Credevo fosse solo uno pseudonimo di Hardy!"

---

9 $(10^3+9^3)=(1^3+12^3)=1729$

10 E.W. Barnes.

Esistono anche pareri autorevoli che provano a spiegare la dinamica di una cosi` profonda e duratura unione professionale dal punto di vista psicologico, per non dire proprio "clinico". Hardy era sicuramente un anticonformista, ma, come si e` visto, estremamente onesto e corretto. Littlewood non era probabilmente da meno, visto che, in fondo, e` sempre stato (e la storiella dello pseudonimo rende bene l'idea) la meta` meno appariscente della coppia, e non sembra che questa mancata "presenza scenica" gli sia mai sembrata fastidiosa. Pare infatti che Littlewood fosse soggetto a profonde crisi depressive, e amasse vivere isolato e quasi invisibile nel suo stesso college. Quasi a sottolineare questa volonta` di non apparire, anche la stessa collaborazione con Hardy visse probabilmente il periodo piu` fecondo proprio quando, per ragioni professionali e di cattedre, Littlewood resto` a Cambridge e Hardy se ne ando` invece ad Oxford. Molto del lavoro in comune fu dunque essenzialmente epistolare, con beneficio per la riservatezza di John Edensor Littlewood.

Al momento di scegliere un titolo per queste righe celebrative, l'idea di chiamare il pezzo "Stanlio e Ollio" ci e` sembrata un po` irriverente, sulle prime. Ma solo all'inizio... i punti di somiglianza sono molti, ed era un peccato non conservarli. Il cognome Hardy, ovviamente, condiviso sia da Godfrey che da Oliver, e` stata la scintilla iniziale; poi, la foto del vecchio Littlewood, che potrebbe davvero essere una foto di Ollio in pensione, anche se il comico americano mori` troppo presto per avere una foto da ultrasettantenne[11]; la quasi contemporaneita` delle due coppie (Laurel & Hardy sono nati rispettivamente nel 1890 e nel 1892); ma, sopra ogni cosa, era la duplice capacita` di lavorare in coppia, a stupire. Non sono molte le coppie paritetiche, neanche nel cinema comico: e` piu` frequente la situazione in cui uno dei due fa da "spalla" al "battitore". Ma, anche se si puo` riconoscere una piccola predominanza di Stan Laurel come erogatore di vis comica, nel caso di Oliver & Hardy la situazione era quasi perfettamente paritetica.

E per Hardy & Littlewood c'era qualcosa di simile. Littlewood era meno appariscente, ma era lo stesso Hardy a riconoscere che Littlewood aveva maggiori abilita` "tecniche", in matematica, e riservava a sé stesso solo una maggiore capacita` di esporre con chiarezza i comuni risultati; e, cosa davvero rara nel mondo accademico, non erano minimamente animati da volonta` di reciproca affermazione sull'altro. Sono davvero tanti gli aneddoti su Hardy & Littlewood che non citeremo (anche perché non vorremmo trasformare RM in un volume della Treccani): ma quest'ultimo, pur essendo un aneddoto che non fa ridere, e` in fondo la ragione per la quale abbiamo scelto questa coppia per celebrare questo mese di Febbraio, quindi non possiamo certo tralasciarlo.

Quale fosse il modo con il quale Hardy & Littlewood erano riusciti a collaborare con successo per cosi` tanto tempo era il mistero che a lungo era serpeggiato tra i colleghi e gli addetti ai lavori; con loro somma soddisfazione, nel 1947 (anno della morte di Hardy) Bohr[12] dette pubblica lettura della formula magica che i due matematici avevano stabilito. Si trattava di quattro regole, non si sa bene se fossero state "ufficializzate" per iscritto tra i due, o no. Eccole:

1. Quando uno dei due scriveva all'altro, era del tutto indifferente se quel che scriveva era giusto o sbagliato.
2. Quando uno dei due riceveva una lettera dall'altro, il ricevente non aveva alcun obbligo di leggerla, e tantomeno aveva l'obbligo di rispondere.

[11] Oliver Hardy mori` sessantacinquenne. Comunque, qualche buontempone della Redazione sostiene che non solo Littlewood somiglia a Ollio, ma anche che G.H.Hardy somiglia un po` a Stanlio.

[12] No, non il grande Niels Bohr, che alcuni (come Doc) ritengono il piu` grande fisico del XX secolo. No: questo e` Harald, matematico di rango, suo fratello.

3. Sebbene non fosse in fondo importante che entrambi pensassero simultaneamente allo stesso dettaglio, alla fin fine era preferibile che non lo facessero.
4. Era assolutamente senza importanza se uno di loro avesse realmente contribuito o meno a una memoria che sarebbe poi stata comunque pubblicata sotto il nome di entrambi.

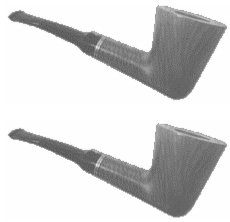
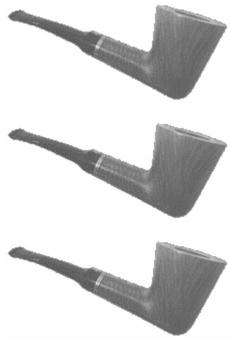
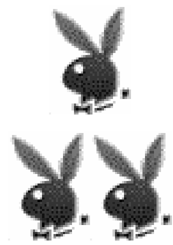
Non abbiamo (purtroppo) una grande esperienza diretta di ricerche e pubblicazioni accademiche[13], noi di RM. E allora siamo tenuti a sospendere il giudizio: forse le quattro regole d'oro degli Stanlio e Ollio della matematica non sono poi cosi` insolite, cosi` clamorose, cosi` degne di essere ricordate.

Ma qualcosa ci dice che sono rare, in realta`. E preziose come tutte le cose veramente rare.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[13] Zero, se si esclude la tesi [RdA]

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Basta meloni!			
Torneo			

2.1 Basta meloni!

Bene, visto che il problema delle zucche che si accendono e spengono da sole e\` piaciuto, vediamo qualcosa di simile. Contrariamente alla proposta di GreyHawk, pero\`, usiamo delle monetine anziche\` dei bicchieri; vi ricordate che ho una collezione piuttosto ampia di vecchi cinquanta lire "mini", vero?

Allora, partiamo da $\boldsymbol{N}$ monete in cerchio; di queste, $\boldsymbol{n}$ indicano ***testa*** e, evidentemente, $N-n$ indicano ***croce***: potete scegliere voi come alternarle.

Le regole sono queste:

1. Si sceglie una ***testa***.
2. Si toglie la testa dal cerchio
3. *Se esistono*, si capovolgono i vicini immediati (nel senso che se avete un "buco" da una parte, da quella parte non capovolgete).

Scopo del gioco e\` togliere ***tutte*** le monete dal tavolo.

Quello che ci chiediamo e\` se esistano delle strategie, in funzione dei valori e della disposizione...

2.2 Torneo

Dovete sapere che, da quando ha scoperto che qui c'e\` una rubrica che si intitola *Zugzwang!*, Alberto si e\` messo in testa di inventare giochi. Al momento siamo a due, un giorno o l'altro ve li racconto.

Uno dei due (per il quale ho proposto il nome di *Boltzmann*... ma questa e\` un'altra storia) abbiamo deciso di testarlo, organizzando un torneo all'italiana tra Alberto, Federico e alcuni amici; il torneo e\` all'italiana, quindi ogni giocatore gioca contro tutti gli altri e riceve un punto per la vittoria, mezzo punto per la patta e una brioche alla fine del torneo.

Quando hanno finito di giocare, mentre rimettevano a posto tutti i pezzi, mi e` arrivato Alberto in cucina a dirmi: "Io e Fred abbiamo totalizzato tra tutti e due ***8*** punti, gli altri sono arrivati tutti a pari merito e io, *chiaramente*, ho vinto...".

L'ultima affermazione la dice lunga sulle capacita` di improvvisazione di regole non proprio oneste da parte del nostro... Comunque la domanda e`:

Quante brioches devo preparare?

3. Bungee Jumpers

Trovare i numeri di quattro cifre uguali al quadrato della somma dei due numeri di due cifre ottenuti prendendo le prime due cifre del numero e le ultime due cifre del numero.

4. Soluzioni e Note

L'intestazione del prossimo paragrafo ***non*** e` un errore di stampa. Preparatevi, che ***Sam*** sta scavando nelle zone polverose del nostro archivio...

4.1 [041]

4.1.1 Tutti in giardino!

Vi ricordate, vero, che avevo chiesto se qualcuno trovava la dimostrazione? Bene, Sam ci ha lavorato sopra; sostiene che *"non mi pare questa la si possa considerare una dimostrazione..."*, beh, apprezziamo moltissimo lo stesso. Tanto per cominciare, si e` accorto che il problema viene da un'altra parte, tant'e` che lo intitola "*I Cerchi Osculanti*". Mettetevi comodi che non e` semplicissimo (sono convinto che gli "*ovviamente"* presenti siano delle prese per i fondelli...) e cediamogli la parola.

In breve: il problema dei tre cerchi di Descartes, richiama da vicino (ed anzi, ne e` un caso particolare) il problema di Apollonio delle tangenze. Il metodo piu` veloce per risolvere quei problemi in cui sono coinvolte tre circonferenze e` quello dell'inversione: si traccia opportunamente un cerchio di raggio a piacere e si invertono rispetto ad esso le forme in questione, ovvero sia, dato un punto **P** *da invertire e detto* **O** *il centro del cerchio inversore, si deve trovare un punto* **Q** *tale che* $OP * OQ = r^2$*, dove* **r** *e` il raggio del cerchio inversore. Senza scendere nei dettagli delle soluzioni al problema di Apollonio, diro` solo che un cerchio passante per* **O** *viene trasformato con l'inversione in una retta e che i punti sulla circonferenza vengono trasformati in se stessi.*

Inoltre si puo` vedere che a tale trasformazione corrisponde la seguente sostituzione di coordinate (qualora **O** *sia* **(0,0)***):*

$$\begin{cases} x \to \dfrac{X_r}{X^2+Y^2} \\ y \to \dfrac{Y_r}{X^2+Y^2} \end{cases} \qquad \texttt{[004.001]}$$

Quindi, potremo cosi` disporre le figure: faremo in modo che due dei tre cerchi dati passino per l'origine e disporremo un cerchio inversore anch'esso centrato in* **(0;0)**. *In tal modo quei due cerchi corrisponderanno a due rette. Poiché il terzo cerchio e` tangente ai primi due, il suo inverso sara` compreso tra le due rette, come anche l'inverso del cerchio soluzione. Quindi, dovendo essere tangente anche all'inverso del terzo cerchio, l'inverso del cerchio soluzione sara` l'inverso del terzo traslato di un valore pari alla distanza tra le rette.

Algebricamente sara` sufficiente invertire il terzo cerchio, traslarlo di due raggi e reinvertire il risultato.

Una circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$.

Chiamiamo ora N il termine noto $x_0^2 + y_0^2 - r^2$ *ed effettuiamo la sostituzione sopra riportata, semplificando e raccogliendo fino ad ottenere:*

$$X^2 + Y^2 - \frac{2T^2x_0X}{N} - \frac{2T^2y_0Y}{N} + \frac{T^4}{N} = 0 \qquad [004.002]$$

dove T e` il raggio del cerchio inversore.

Ovviamente $X_0 = \frac{T^2x_0}{N}$ *e* $Y_0 = \frac{T^2y_0}{N}$.

Sappiamo che il raggio del cerchio invertito vale

$$R^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma \qquad [004.003]$$

e quindi $R = \sqrt{\frac{T^4}{N^2} * \left(x_0^2 + y_0^2 - N\right)}$ *ma sostituendo N si ha* $R = r * \frac{T^2}{N}$.

*Ora si consideri lo stesso cerchio traslato di **RR** e si riapplichi la formula per il raggio del cerchio inverso sostituendo*

$$\begin{cases} N \to X_0^2 + (Y_0 + 2R)^2 - R^2 \\ r \to \dfrac{rT^2}{\left(x_0^2 + y_0^2 - r^2\right)} \end{cases} \qquad [004.004]$$

e riportando tutto alle coordinate originali (in minuscolo) e considerando che $Y_0 + 2R = \frac{T^2}{N * (y_0 + 2R)}$:

$$r_{sol} = \frac{\dfrac{RT^2}{x_0^2 + y_0^2 - r^2} * T^2}{\left(\dfrac{x_0T^2}{x_0^2 + y_0^2 - r^2}\right)^2 + \left(\dfrac{(y_0 \pm 2r)T^2}{x_0^2 + y_0^2 - r^2}\right)^2 - \left(\dfrac{rT^2}{x_0^2 + y_0^2 - r^2}\right)^2} = \frac{r\left(x_0^2 + y_0^2 - r^2\right)}{x_0^2 + y_0^2 + 3r^2 + 4ry_0} \qquad [004.005]$$

A questo punto si possono sostituire le coordinate : i due cerchi che si trasformano in rette saranno con centro **(-a;0)** *e raggio* **a** *e con centro* **(b;0)** *e raggio* **b**. *Il terzo, che ci interessa, avra` raggio* **r=c** *e centro:*

$$\begin{cases} x_0 = c * \dfrac{a-b}{a+b} \\ y_0 = \dfrac{2}{a+b} * \sqrt{abc(a+b+c)} \end{cases} \qquad [004.006]$$

Sostituendo nella formula precedente e scrivendo tutto in termini di curvature ($A=a^{-1}$, $B=b^{-1}$, $C=c^{-1}$, $R_{sol}=r_{sol}^{-1}$*) si otterra`:*

$$R_{sol} = A + B + C \pm \sqrt{AB + AC + BC} \qquad [004.007]$$

Come anche nella formula precedente il doppio segno indica una traslazione verso l'alto o verso il basso e permette di ottenere il cerchio piu` piccolo o quello piu` grande, tangente esternamente o internamente.

Tutto chiarissimo... Beh, quasi. Almeno, lo ha scritto in matematichese corrente, senza scomodare l'italiano del Seicento.

4.2 [045]

4.2.1 Sono cavoli vostri...

Ebbene, si... le Zucche di Halloween colpiscono ancora! No, non e` una soluzione, ma una *complicazione*. Ci arriva da ***Oha***, una delle new entry[14] di questo mese (Scritto giusto, l'allonimo? Chiediamo perche` c'e` qualcuno che mette le maiuscole nei posti piu` strani, con grande gioia del correttore automatico...)

Leggendo RM mi sono ricordato di un giochino che ruppi almeno 3 anni fa (Questo ci ha fatto immediatamente supporre che il Nostro fosse un Ingegnere. Lui nega, ma ne restiamo convinti [RdA]).

Si basa similarmente sul problema di accendere e spegnere delle luci su un tabellone agendo in XOR su un gruppo di esse. il tabellone e' diviso in cinque colonne e cinque righe, con 25 lampadine. Ogni lampadina e' a sua volta un tasto che se premuto inverte lo stato della lampadina e delle 4 adiacenti. Il diagramma non e' ciclico, quindi agendo su una lampada ad angolo abbiamo 3 inversioni, su una laterale 4 e su una centrale 5. Il gioco mostrava alcune lampadine accese e agendo sul tabellone era necessario spegnerle tutte. Esiste un algoritmo per spegnerle tutte non esaustivo?

Io ne ho trovato uno non ottimale: dato un diagramma, analizzo riga per riga partendo dalla seconda e agisco su tutti i tasti che stanno sotto ad una luce accesa. E' evidente che cosi` spengo tutte le luci della riga precedente. Passo dunque alla riga successiva e ripeto. Alla fine ottengo in ultima riga delle luci accese che non riesco a spegnere, memorizzo le posizioni delle luci accese e faccio ripartire il gioco. Pigio i tasti in prima riga corrispondenti a quelli rimasti accesi alla fine del gioco precedente in ultima riga e poi ripeto l'operazione. Arrivato in fondo all'ultima riga avro' lo XOR fra la vecchia soluzione e le righe aggiunte, che essendo identiche si escluderanno e risolveranno il problema. Questo meccanismo, applicato al gioco che conta le mosse necessarie per terminare il gioco, ha conseguito che nella maggioranza dei casi risolvevo il problema in via ottimale, in alcuni casi con +2 mosse e in altri in +4.

Volendo rialzare, qual'e' il numero massimo di mosse in piu' che questo algoritmo non ottimale puo' comportare in un diagramma come questo?

Buona domanda... Qualcuno vuole provarci? Se decidete prima di fare "un po` di prove" costruendovelo in software e volete distribuirlo (allo stesso prezzo della rivista, beninteso), fatecelo sapere che provvederemo.

Il Nostro, tra l'altro, non contento di questo trova anche una similitudine tra il giochino delle lanterne e il buon caro vecchio "Life".

4.3 [047]

Su questi problemi si sono accaniti alcuni amici new entry (gli avaracci che li hanno iscritti avevano deciso, probabilmente, di anticipare il regalo di Natale...). Come ha gia` detto Doc nelle mail di risposta, le soluzioni sono gia` state pubblicate (*una cosa che invidio tremendamente a Doc e` la capacita` di dire la stessa cosa piu` volte senza usare*

[14] Siamo felici di notare che questo mese ha deciso di raggiungerci un mucchio di gente. Felicissimi di avervi tra noi, ma quelli che vi hanno regalato l'abbonamento per Natale, ve l'hanno detto che e` *gratis*?

mai le stesse parole. Non diventera` mai un burocrate. Per fortuna [RdA]). Comunque, "Benvenuti!" a ***Andrea*** e a ***Daniel***.

Solo una cosa... Dare del "lei" a Rudy gia` fa ridere, ma darlo a Doc... Ma l'avete visto?

4.3.1 Le Biglie di Alberto

Dovete sapere che quando c'e` stato il Comitato di Redazione prima di Natale, Rudy ha fatto notare che la soluzione ricevuta dava un risultato *diverso* rispetto alla soluzione redazionale. Siccome non e` vero che a Natale sono tutti piu` buoni, ma semplicemente anche i cattivi sono piu` stanchi, l'idea e` stata: "*Lasciamola cosi`, e vediamo chi se ne accorge...*". Beh, se ne sono accorti ***Viggio*** e ***Katia***. E hanno anche scoperto il perche`.

No, non ve lo diciamo.

4.4 [048]

4.4.1 I soliti logici

Ragazzi, qui ne sono successe di tutti i colori. Promesso, di questi problemi il meno possibile.

Una soluzione (che non pubblichiamo: sara` in seguito piu` chiaro il perche`) ci arriva dal tizio che, il sette gennaio, ha causato l'ingorgo sul cavalcavia di Monteceneri (Milano) fermandosi in mezzo alla strada perche` doveva prendere un appunto relativo ad un problema su dei logici... trattasi di ***PuntoMauPunto***. Comunque, soluzione corretta ma, come vedremo dopo, ne ha trovata una "migliore".

La soluzione piu` breve arriva da ***Sam***: occupa poche righe (attenti ai segni di negazione).

in onore a Boole:

```
A:"No"=> ~("VV;RR;RR;VV" o "RR;VV;VV;RR")
B:"No"=> ~("VV;RR;VV;RR" o "RR;VV;RR;VV")
C:"No"=> ~("VV;VV;RR;RR" o "RR;RR;VV;VV" o
           "RR;VV;RV;RV" o "VV;RR;RV;RV")
A:"No"=> ~("RV;RR;VV;RV" o "RV;VV;RR;RV" o
           "RV;RR;RV;VV" o "RV;VV;RV;RR")
```

tutte le combinazioni rimanenti hanno al secondo posto RV quindi Boole puo` ben capire di avere appiccicati in fronte un francobollo verde ed uno rosso.

NOTA: Le prime due esclusioni sono abbastanza ovvie e cosi` la prima meta` della terza; per quel che riguarda la seconda meta` il ragionamento e` il seguente: C vede A e B, ognuno ha due francobolli dello stesso colore, ma tra loro sono diversi, ora, se lui avesse due francobolli dello stesso colore finiremmo in una delle situazioni escluse in precedenza e quindi non puo` essere, rimane una soluzione possibile, che quindi va esclusa, altrimenti Cartesio, logico perfetto, avrebbe risposto "Sì"; passiamo alla quarta e vediamo che i quattro casi ricalcano il ragionamento svolto da C precedentemente per le ultime due.

Andrea ci manda una graziosa soluzione tabellare (un po` complicata da capire, ma quando ci si arriva e` decisamente comoda) e riesce, tra le alte cose, a determinare che Boole e` piu` sveglio di Cartesio che e` piu` sveglio di Aristotele (nel senso che ci azzeccherebbero in quest'ordine), concludendo con un "*Aristotele e` finito, non riesce piu` a ragionare*" (Dissento: sto leggendo l'ultimo "Aristotele" di Margaret Doody e, anche se un po` rimbambito, sembra tutt'altro che incapace nel ragionamento [RdA])

Jack202 (visto cosa succede, ad utilizzare allonimi "comuni"?), altra new entry di questo mese, affronta il problema con una simpatica tabella in cui esamina tutti i casi e poi procede all'esclusione di quelli impossibili. Anche ***Viggio*** ha preso questa strada, ma utilizzando delle tabelle di dimensioni minori. Inoltre, trova un buon metodo per semplificarsi la vita. Come direbbe mio figlio Alberto, inventarsi le regole man mano che servono aiuta moltissimo.

Non amo molto risolvere i problemini sui logici, percio` stavolta ho deciso di provare un approccio piu` sistematico, inventato al momento e le cui regole non sono ben chiare neanche a me...

Come primo passo mi costruisco l'albero delle possibili soluzioni, nella seguente maniera: A *(Aristotele) puo` avere in testa o due francobolli rossi (***RR***) o due verdi (ma non lo scrivo perche` il gioco e` simmetrico tra* **R** *e* **V** *e ho gia`* **RR** *- questa e` la* prima regola empirica*), oppure uno rosso e uno verde (***RV***).*

Da questi due rami ne partono altri per indicare le possibili combinazioni di B *(Boole). Percio` se A e`* **RR***, B sara`* **RR** *o* **VV** *(stavolta devo metterlo perche` e` effettivamente un altro caso -* seconda regola empirica*) oppure* **RV***. Infine l'albero si ramifica ancora scrivendo le combinazioni di* C *(Cartesio). In definitiva le sequenze risultanti sono, a meno della simmetria R/V ottenuta sostituendo R a V e viceversa, e indicando i francobolli nell'ordine A/B/C (ometto il torturatore, indicandolo con la T di Torquemada, che si becca i due francobolli restanti)* Il Torturatore Graziosamente riformatta la tabella e ve la rifila qui da qualche parte, sperabilmente sulla sinistra [RdA].

RR	RR	VV
RR	VV	RR
RR	VV	RV
RR	VV	VV
RR	RV	VV
RR	RV	RV
RV	RR	RV
RV	RR	VV
RV	RV	RR
RV	RV	RV

Tabella 1

A questo punto mi metto nei panni di A che vede sulle lucide fronti di B e C francobolli tali da non consentirgli di portare a casa il risultato. Ora l'unica sequenza che darebbe ad A un risultato certo e` la* ***RR/VV/VV*** *(o simmetrica* ***VV/RR/RR****) e che quindi elimino perche` "troppo logica". Tanto per fare un esempio, da cui si puo` ricavare l'n-esima regola empirica (ormai ho perso il conto), x/****RR/VV*** *non puo` essere scartata poiche` per A darebbe luogo ai possibili risultati ***RR*** *o* ***VV*** *o* ***RV****. Pertanto rimangono le seguenti sequenze, che verranno usate da B per il suo ragionamento* e che trovate nella tabellina questa volta sulla destra [RdA].

RR	RR	VV
RR	VV	RR
RR	VV	RV
RR	RV	VV
RR	RV	RV
RV	RR	RV
RV	RR	VV
RV	RV	RR
RV	RV	RV

Tabella 2

Come sopra ci mettiamo nei panni di B, considerando pertanto le sequenze del tipo ***RV/x/RV****. La sequenza* ***RR/VV/RR*** *puo` essere scartata poiche` darebbe a B risultato certo. E` l'unica della serie, e quindi la gatta da pelare, un po` piu` pelata ora, passa a C* e che e` rappresentata dalla tabella ***3*** piu` sotto [RdA].

Qui prendiamo in considerazione le sequenze del tipo RV/RV/x, poiche` siamo nei panni di C che vede appunto i francobolli su A e B. La sequenza* ***RR/RR/VV*** *e` unica e quindi eliminabile; stesso discorso vale per ***RR/VV/RV****. Restano quindi le combinazioni* indicate in tabella ***4*** che, per problemi di paginazione, finira` chissadove per la pagina.

RR	RR	VV
RR	VV	RV
RR	RV	VV
RR	RV	RV
RV	RR	RV
RV	RR	VV
RV	RV	RR
RV	RV	RV

Tabella 3

Si ritorna allora ad A che elimina le sequenze ***RV/RR/VV*** *e* ***RV/RR/RV****. Si potrebbe obiettare che anche le sequenze* ***RR/RV/VV*** *e* ***RV/RV/RR*** *sono uniche, ma non e` cosi` poiche` A non sa cosa ha in teste e quindi ad esse andrebbero aggiunte le sequenze (per simmetria)* ***VV/RV/RR*** *e* ***RV/RV/VV*** *(le abbiamo cancellate all'inizio per semplicita` di scrittura, ma sono sempre li'!).*

RR	RV	VV
RR	RV	RV
RV	RR	RV
RV	RR	VV
RV	RV	RR
RV	RV	RV

Tabella 4

*Pertanto A consegnera` a B la seguente situazione* esemplificata nella tabella ***5*** che, visto il disordine, probabilmente finira` sul prossimo numero...[RdA].

RR	RV	VV
RR	RV	RV
RV	RV	RR
RV	RV	RV

Tabella 5

*Embe'? non notate che le sequenze rimanenti sono del tipo x/**RV**/y? Pertanto B avra` in testa un francobollo rosso e uno verde, verifica quello dei due e rivelera` a Torquemada quelli che lui si e` messo in saccoccia.*

Carina, vero? A me e` piaciuta, quest'esemplificazione dei passaggi (che originariamente *non* era in forma tabellare: volendo pero` mantenere il numero al di sotto delle ~~venti~~ trenta pagine, abbiamo riformattato la cosa.

Se notate, nella riga precedente c'e` una correzione... Beh, i commenti restanti relativi a questo problema arrivano da Doc. Sono relativi a due soluzioni "creative" o, se preferite, a due meta-soluzioni basate entrambe sullo stesso assunto. Titolo: "***Alice***, ***PuntoMauPunto*** e i poveri logici"

Primo Tempo

Lo abbiamo gia` detto qualche volta, dalle pagine di RM: in genere, da quando l'intersezione degli insiemi "redazione di RM" e "lettori di RM" non coincide piu` esattamente con gli insiemi medesimi, i problemi che il GC procaccia e redige vengono esaminati (e talvolta risolti) dagli altri due terzi della redazione **prima** *della loro pubblicazione su RM. Per me, questa e` un'ottima scusa per evitare di affrontarli, ma Alice qualche volta si cimenta.*

Orbene, queste righe sono scritte prima ancora che il problema dei "tre logici" sia stato pubblicato su RM (devo ancora comprare i regali di Natale, gente!): il GC ce l'ha mandato come al solito in anteprima, e come al solito io ho evitato di risolverlo, anche perché, una volta tanto, lo conoscevo gia`. Ma Alice non lo conosceva, e, in un momento di rara pigrizia, lo ha affrontato.

Ora, scrivendo prima della pubblicazione del problema, scrivo "a fortiori" prima di aver ricevuto le soluzioni di tutti gli amati lettori. Mi aspetto che ce ne siano diverse, come al solito precise e armate di ferrea logica. Ma sono davvero curioso di vedere se ce ne e` qualcuna che abbia scelto la terribile scorciatoia di Alice. Riporto integralmente le poche righe scritte di suo pugno:

> *I poveri logici: il buon Boole ha un francobollo per colore (rosso e verde). Si puo` fare un ragionamento lungo, ma ce n'e` uno corto: il problema e` ovviamente simmetrico, e non si potrebbe richiedere di che colore sono i francobolli se fossero entrambi dello stesso colore... quale scegliere? Quindi se il GC chiede di quale colore sono, allora devono essere diversi...*

Ok, lo confesso. All'inizio non ho proprio capito cosa volesse dire: grazie al cielo, il CdR e le birre del CdR erano vicine, e non appena ho incrociato la mia media rossa con i boccali da un litro di Alice e di Rudy, le ho chiesto delucidazioni. Per me rosso e verde restavano ben diversi (anche se trovo che stiano benissimo insieme, sulle maglie dei calciatori) e non vedevo la simmetria. Poi Alice me la ha spiegata, e io sono rimasto a bocca aperta. Come sempre.

La fanciulla terribile ha fatto un "salto di livello". A mio parere, e` tale e quale al salto di livello significativo che si fa quando si cerca di capire come funziona il paradosso di Russell, ma lei e` modesta, e dice che io dico boiate.

Comunque, il principio e` questo. Vi ricordate quando andavate al cinema, da bambini, e c'era una scena che metteva paura? Vi scorrevano brividi lungo la schiena, vi si rarefaceva il respiro, vi stringevate forte contro la mamma o il papa`, finché il genitore preoccupato ricordava: "Ehi, e` solo un film, in fondo!" e solo al quel punto ritornavate a guardarvi intorno, vedevate il cinema e le poltrone, la signora grassa tre file piu` avanti e le lucine che indicano le uscite di sicurezza e i bagni. La catarsi funziona sempre bene, ma funziona benissimo sui bambini. E c'e` un po` di catarsi anche nei problemi, no? Io, ad esempio, ragionavo piu` o meno cosi`, con quel problema: "Eccomi qua, sono Aristotele: ho *due francobolli appiccicati sulla fronte, vedo due davanti a me che ne hanno un paio anche loro, come fossimo tre raccomandate espresso... Se gli altri due li avessero tutti e quattro dello stesso colore, allora io saprei subito di averli entrambi dell'altro colore, ma siccome il testo dice che io devo rispondere che non lo so, allora so solo che non li hanno tutti e quattro uguali... Allora adesso sono Boole, e posso pensare che...." E cosi` via.*

Ecco la catarsi. Si entra "dentro" il problema, scordandoci che e` pur sempre un problema-oggetto, una roba scritta su una rivista, insomma, una cosa anche "maneggiabile" dall'esterno. E Alice infatti l'ha "maneggiata dall'esterno".

Lei dice che, in ultima analisi, non c'e` niente all'interno del problema che "distingua" il comportamento dei francobolli rossi da quelli verdi; non c'e` insomma alcun dato che introduca una rottura di simmetria, qualcosa del tipo "i francobolli verdi possono stare solo su un logico il cui nome non inizia per "B", oppure "i rossi possono stare solo due a due". No, niente: rossi e verdi sono perfettamente simmetrici, nell'esposizione del problema: scambiate le parole "rossi" e "verdi", e avete esattamente lo stesso problema (non lo stesso a colori invertiti: proprio lo "stesso" problema).

Appurato questo, qual'e` il range possibile delle "soluzioni" al problema? Boole, come gli atri due, puo` avere solo una delle tre combinazioni "VV", "RR" e "RV". Ma se c'e` simmetria nelle caratteristiche "cromatiche", secondo quale percorso logico potremmo mai arrivare a dare la risposta "RR" o "VV", visto che sono indistinguibili? Ne segue che, se soluzione logica esiste, questa deve necessariamente essere "RV".

Ecco qua. Alice non e` "entrata dentro" il problema, lo ha guardato da fuori, e ha tirato fuori la soluzione giusta. Io mi sono attaccato a quel che restava della mia mezza birra rossa, e le ho contestato che, comunque, anche questo ragionamento presuppone alcuni "assunti"... per esempio che la soluzione esista, e che tale soluzione sia univocamente raggiungibile (il GC poteva anche scrivere una boiata cromatica qualunque, e farla seguire da una domanda pure qualunque, non necessariamente conseguente al testo...), ma bisogna riconoscere che e` un assunto che e` quasi sempre dato per scontato (almeno nei giochi matematici: un po` meno nella vita reale, d'accordo, ma in questo caso...).

La cosa piu` sconvolgente di tutto e` che, ragionando come Alice, quello che dicono i tre logici non conta assolutamente niente. Loro, poveretti, sono "dentro" il problema e, per cosi` dire, non lo possono maneggiare dall'esterno, almeno finché non si arriva alla domanda finale. Ad Alice (e a tutti noi, che stiamo "fuori" del problema) basta sapere che non c'e rottura di simmetria tra rosso e verde, e che la soluzione esiste ed e' univoca. A quel punto, e` solo quello che ha i francobolli di colore diverso che puo` dire di sapere qualcosa, e quindi, se dice di sapere, vuol dire che ha i francobolli di colore diverso (Mamma mia, che salto mortale logico all'indietro!).

I logici non possono applicare il ragionamento "esterno" di Alice anche perché, ovviamente, la "domanda" alla quale loro devono rispondere e` diversa da quella cui deve rispondere la persona alla quale si pone il problema. Inizialmente, non tenendo conto di questa cosa evidente, avevo sperato che ci fosse una bella commistione di autoreferenza (di modo che anche i logici, dall'interno, potessero cortocircuitare la risposta vedendosi "dal di fuori"): ma non credo piu` sia così. Peccato.

Secondo Tempo

Piaciuto il "primo tempo"? Beh, ad Alice non e` piaciuto tantissimo, quando glielo ho fatto leggere. Con una modestia bella e maestosa quasi quanto la sua treccia, ha detto che, come al solito, esagero. Esagero nel considerare cosi` brillante la sua "scorciatoia"; e non basta, ha pure detto che di scorciatoie cosi` e` pieno il mondo della matematica ricreativa, e che su RM ci sono un sacco di solutori che appena possono tagliano per i campi. "Guarda quel rompiscatole di PMP, ad esempio" - mi fa - "di questi giochetti ne fa a bizzeffe, ogni volta che ce n'e` la possibilita`".

A questo punto mi sono lanciato in una vibrante filippica: "Tutte balle!" - ho veementemente urlato via mail - "PMP e` la perfetta rappresentazione del bravo* *matematico pigro, ma tra queste due caratteristiche la migliore (la pigrizia, ovviamente) non basta a salvarlo dalla peggiore (quella di essere un matematico). Sì, e` vero, gli dai un problema con un'ellisse e lui considera prima il caso del segmento e poi quello della circonferenza, perché sono casi limite piu` maneggiabili: poi fa una media aritmetica tra i due casi, ti dice che in realta` sta semplificando un integrale triplo del secondo ordine equinoziale come dettato dal diciottesimo corollario di Weierstrass-Ipazia, tira fuori un numero dal cappello a cilindro e spesso ci azzecca. Ma questi sono mezzucci, non sarebbe mai in grado di "guardare da fuori" un problema come hai fatto tu, proprio perché e` visceralmente un matematico, anche se pigro". Riesco ad essere ferocissimo, quando mi attaccano sui miei idoli.

Tacitata cosi` vigorosamente l'inopportuna protesta di Alice, mi siedo trionfale ad aspettare la pubblicazione di RM e conseguenti soluzioni. Il perfido PMP di solito scrive le sue sette, certe volte anche otto minuti dopo l'orario di distribuzione di RM, e il suo silenzio, questa volta, mi gratificava moltissimo. Ma non e` durato molto: reduce da bagordi parigini, se l'e` presa comoda, il perfido. Poi ha mandato una lunga soluzione analitica sui logici, piena di frasi del tipo "consideriamo tutte le possibili configurazioni RR RV VV, etc. etc.".

State gia` immaginando il salto di gioia che ho fatto, vero? Beh, immaginate male.

Prima della soluzione analitica, il maledetto ha scritto queste noticine:

> *Ad ogni modo, il "barare" e` dovuto al fatto che io (il solutore)* ***so*** *che c'e` una risposta . Ma il problema e` completamente simmetrico rispetto a rosso e verde, quindi se la risposta fosse "Rosso/Rosso" non avrei potuto distinguerla da "Verde/Verde", il che e` assurdo, appunto perché so che c'e` una risposta.*

Ecco qua. Una splendida dimostrazione tripla, con salto mortale. Tripla perché, oltre a dimostrare la soluzione del problema (in maniera vergognosamente simile a quella di Alice: non ho contato le parole, per paura che ne abbiano usato lo stesso numero), dimostra anche che Alice conosce bene i suoi polli, e che io (ma questa era la parte facile da dimostrare...) certe volte farei meglio a stare zitto.

Doc deve aver capito che lo paghiamo un tanto a pagina... Avanti di questo passo, la rivista la fara` tutta lui[15].

4.4.2 X-Files!

No, non mi arrabbio... Noto solo che prima mi fate le pulci sulla formulazione dei problemi e poi, quando vi chiedo la *strategia*, mi rifilate il valore atteso.

Noto anche, con piacere, che avete smesso di lamentarvi per i "problemi facili" e, quando ne arriva uno, cominciate ad elucubrare. Bravi ragazzi.

Allora, comincia ***Viggio***: il pregio di questo calcolo e` che ci permette di stabilire quanto siano buone le strategie (o quanto siano pigri i solutori, fate voi...).

Allora, il nostro ha fornito ***due*** soluzioni: la prima e` piuttosto veloce:

I due geniali investigatori dell'extraterrestre si alzano la mattina, tirano un dado extraterrestre a 17 facce rimediato in un'avventura precedente [carino! La somma delle facce opposte, e` costante? (RdA)] *e stabiliscono ognuno in quale stanza andare a controllare.*

Allora la probabilita` di beccare 'sto invasore e` 2/17. A noi interessa valutare quanti tentativi serviranno in media, e per far cio` ci costruiamo la variabile aleatoria **X**=*"numero di tentativi", il cui generico elemento k (ossia: "servono k tentativi") ha probabilita':*

[15] Visto che parliamo di Doc, volevamo ringraziare tutti quelli che hanno espresso considerazioni (positive) sull'editoriale del mese scorso; questo e` per lui un potentissimo stimolo a continuare [Alice & RdA] .

$$p(k) = \left(\frac{15}{17}\right)^{k-1} \frac{2}{17} \qquad \forall k >= 1 \qquad \texttt{[004.008]}$$

E quindi (sapendo che $\sum_{k=1}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}$*, se a<1) la media sara':*

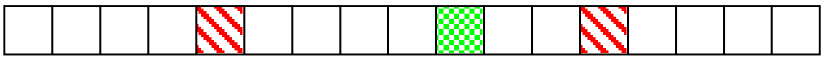
$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(k) = \frac{2}{17} \sum_k k \left(\frac{15}{17}\right)^k \frac{17}{15} = \frac{2}{15} \frac{\frac{15}{17}}{\left(1-\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{17}{2} = 8{,}5 \qquad \texttt{[004.009]}$$

Per onesta` intellettuale devo ammettere che la probabilita` calcolata potrebbe essere un po` diversa da quella reale, poiche` non tiene conto delle limitazioni nello spostamento di Roswell, ma direi che come metro di paragone puo` andar bene.

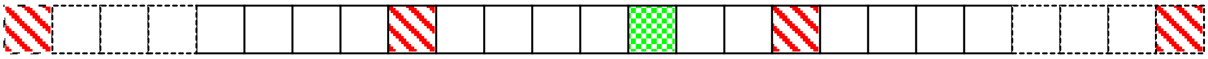
La seconda (sempre da ***Viggio***) invece affronta il problema in un modo un po` diverso... Sembra che il Nostro voglia dimostrare un teorema in base al quale "*Quando si usano le catene di Markov,il risultato e` diverso per definizione*". Infatti, il Nostro tiene ***fermi*** i due polli, e fa agitare Roswell... Vediamo:

Questa strategia puo` essere enunciata in questa maniera: "ogni mattina i due investigatori controllano sempre la stessa stanza". Sembra una strategia stupida, ma se l'extraterrestre non osserva lo strano comportamento dei due, e si comporta di conseguenza, nel suo peregrinare casuale un giorno o l'altro cadra` nella rete!

Questioni di simmetria suggeriscono di usare la seguente configurazione, in cui A e B si stabiliscono nelle posizioni fisse 5 e 13 e X si muove a caso tra le caselle.



Quando X arriva a una delle estremita', "rimbalza" e percio` le estremita` possono essere modellate "a specchio" ipotizzando che le caselle abbiano una struttura infinita come nella figura sotto:



La possibilita` di spostamento di X e` limitata a uno dei 3 settori della figura sopra (ogni settore e` delimitato dalle righe diagonali che indicano le posizioni di A e B). Indicando allora con P(s,n) la probabilita` di essere catturato nel settore s dopo n movimenti, e limitando a 3 i settori (quello centrale e i due estremi "specchiati"), si ha che la probabilita` di essere catturato dopo n tentativi e` ovviamente :

$$P = \frac{1}{3}P(1,n) + \frac{1}{3}P(2,n) + \frac{1}{3}P(3,n) = 3\frac{1}{3}P(n) = P(n) \qquad \texttt{[004.010]}$$

dove P(n) e` la probabilita` di essere catturato nel generico settore (ogni settore e` uguale all'altro!) all'n-esimo istante e 1/3 e` la probabilita` di muoversi in un dato settore.

Il processo di "spostamento e cattura" nel settore e` sicuramente di tipo markoviano, poiche` indicata con X la variabile stocastica "posizione di X all'istante n", si ha che:

1. *X ha un numero finito di stati (9 per settore);*
2. *gode della proprieta` di Markov, ossia lo stato all'istante n+1 dipende solo da quello nello stato precedente (n);*
3. *le probabilita` di transizione (cioe` di passaggio da uno stato all'altro) sono costanti nel tempo e indicheremo con* p_{ij} *la probabilita` di passare dallo stato i allo stato j;*

4. *abbiamo un insieme di probabilita` iniziali per n=1 (ogni casella di un settore avra` probabilita` di essere occupata da X all'inizio pari a 1/9).*

La matrice di transizione P sara` la seguente, in cui indico con 1 e 9 gli stati estremi di cattura. Si noti come arrivato in tale posizione X non ha piu` possibilita` di muoversi e per tale motivo questi due stati sono detti di "assorbimento". Si osservi inoltre come ogni stato da 2 a 8 si evolva in maniera equiprobabile in uno dei due stati confinanti, mentre non e` permesso "restare sul posto".

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 1/2 & & 1/2 & & & & & & \\ & 1/2 & & 1/2 & & & & & \\ & & 1/2 & & 1/2 & & & & \\ & & & 1/2 & & 1/2 & & & \\ & & & & 1/2 & & 1/2 & & \\ & & & & & 1/2 & & 1/2 & \\ & & & & & & 1/2 & & 1/2 \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \texttt{[004.011]}$$

(le caselle vuote indicano gli 0, che ho omesso).

Quel che interessa a noi sono le probabilita` di primo passaggio per gli stati 1 e 9. Cosi` indicheremo con $f_{ij}^{(n)}$ *la probabilita` che si passi* <u>*per la prima volta*</u> *dallo stato i allo j all'n-esimo istante. In genere calcolare le probabilita` di primo passaggio non e` facile, pero` in alcuni casi (e il nostro e` uno di questi) si puo` usare la seguente formula ricorsiva valida per gli stati di assorbimento:*

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \overset{j=1}{\Rightarrow} f_{i1}^{(n)} = p_{i1}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{i1}^{(k)} \qquad \texttt{[004.012]}$$

dove l'ultimo passaggio vale perche` se lo stato finale e` 1 (equivalente a 9) si ha j=1 e quindi che p_{jj}*=1 sempre (stato di assorbimento).*

Questi valori vanno pesati per le probabilita` di stato iniziale (1/9 per ogni stato), e alla fine costruendo istante per istante le probabilita` di primo passaggio si ottiene una variabile aleatoria F che rappresenta il "tempo di cattura", che sara` del tipo:

$$F = \begin{pmatrix} k \\ f_{ij}^{(k)} \end{pmatrix} \qquad \texttt{[001.013]}$$

la cui media da` la soluzione del problema. Ho fatto i conti con Matlab (a mano sono troppi), e ottengo un valore vicino a 6, comprovato anche da alcune simulazioni del gioco. Ne consegue che "6" e` il numero medio di giorni che dovranno attendere gli investigatori per catturare l'alieno.

Si, siamo d'accordo. Vediamo quanto sono stati pigri gli altri.

Teo, ad esempio, mimetizza la sua pigrizia sotto lo storyboard di una nuova serie...

*Ma perche` le cantine sono diciassette?????* [Perche` "otto" era troppo facile e "duemilatre" assolutamente inutile. (RdA)]

Secondo me Roswell non ha problemi ha spostarsi per via della gravita` e cosi` anche M&S, tutto dipende dal vino che si scolano rispettivamente ogni notte e ogni giorno.

Comunque sia, appurato che sono tutti ubriachi, altrimenti il problema non avrebbe motivo di esistere, i nostri devono scegliersi una delle due cantine esterne (la prima o l'ultima,scegliete voi,anzi scelgano loro,della fila...) indi perlustrare attentamente quella e quella contigua, nonche` scolarsi parte del vino di quelle due cantine per poter continuare a far sussistere il problema.

Fatto questo i supereroi aspettano ebbri l'indomani e, consci che Roswell si sara` fatto pure lui una bella sborniona che limitera` pure i suoi di spostamenti, passano a controllare l'ultima cantina controllata il giorno prima e quella a lei contigua, che non sia gia` stata controllata. E cosi` (ripetendo quest'ultimo passaggio piu` lo scolamento delle bottiglie delle cantine) vanno avanti giorno dopo giorno fino al ritrovamento del viaggiatore intergalattico...

Questo assicura che al massimo in sedici giorni Roswell sara` scovato, portato in catene in un laboratorio, analizzato e, sempre in catene, mandato a lavorare in miniera (tanto non e` che l'FBI gli puo` dare una casa in periferia con tanto di nome falso perche` se ne accorgerebbero tutti e allora sarebbe un casino...) dove morira` lontano dalla sua astronave (che nel frattempo cerca di teletrasportarlo a bordo ma non ci riesce, anche questa volta non per la gravita` troppo forte, ma perche` Roswell era proprio l'addetto al teletrasporto, e i suoi compagni verdi sono scarsi in tale mansione cosicche` ogni notte sbagliano, tirano su` un po' di vino e si ubriacano pure loro con tanti saluti al vecchio Roswell...),quindi deportato in una conserva per carne aliena dell'area 51 e filmato nella scena di Men in Black al fianco di Will Smith, che peraltro Roswell non aveva mai avuto in simpatia sin dai tempi di Indipendence Day... se i film non sono usciti in quest'ordine basta invertire i nomi) [No, le parentesi non tornano neppure a me. Ma questo mi sembra il meno. (RdA)].

E` basilare, per la sussistenza del problema che il padrone della cantina sia in ferie e che ne` Roswell ne` i suoi inetti compagni ne` Mulder ne` Scully esauriscano tutto il vino di una delle cantine in cui potrebbero capitare gli stessi Mulder, Scully o Roswell che potrebbero infatti non ubriacarsi e mandare all'aria le regole del gioco...

Jack202 pone un problema che anche qualcun altro ha considerato: "*Non mi e` chiaro se il percorso e` ciclico*". Beh, no. Altrimenti la mia soluzione non funziona. Indi, risolve secondo il metodo precedentemente esaminato, ma risparmiandoci il finale strappalacrime.

Anche ***Sam*** si e` dato da fare in merito, con un'elucubrazione: sfoggiando un periodo di quattrocentoottanta parole, trasforma il corridoio delle cantine in circolare e prova a giocare a "Life" ('sto gioco ci perseguita, in questo periodo...) su questa ciambella. Siccome questo pero` occupava poco posto, trova anche una strategia (non una meraviglia, ma sempre di strategia si tratta...). Tutto nello stesso periodo (sintattico). Ve lo risparmiamo, anche perche` il prossimo numero conterra` un pezzo piuttosto lungo, del nostro amico.

Andrea trova un buon metodo, anche se forse un po` lunghetto. Infatti, si rende conto che la cantina *va controllata due volte*: se ROswel e` in (faccio per dire) cantina ***2*** e voi siete in cantina ***3***, il giorno dopo voi andate in cantina ***2*** e Roswell si piazza in cantina ***3***... Infatti, il metodo di Andrea, basato su cantine viste come intervalli di una retta che in realta` e` il corridoio, e` sintetizzabile nella regola: *Visto che il nono intervallo è quello che costituisce il baricentro della nostra retta(8-0-8), M. si potrebbe posizionare sull'ottavo intervallo e S. sul decimo e controllare per due giorni. Poi M. sul settimo e S. sull'undicesimo e controllarli per due giorni e così via.*

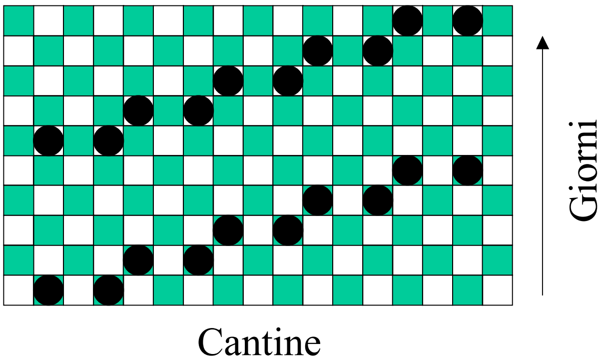
Forse la cosa diventa piu` chiaro se vi passo la "redazionale" (Ampi contributi da parte di Doc, per il quale, se ricordate, il problema era facile...).

Ammetto che quei due (sto parlando di Mulder & Scully, non dei nostri amici!) siano cosi` noiosi che, posti di fronte al problema, il primo pensiero sia "ce la caviamo con diciassette puntate, se ci sono diciassette cantine...". Beh, no. Vorremmo eliminare i due un po` prima...

Come vi dicevo, siamo interessati alla ***strategia***, non al valore medio.

Quello che mi piace, di questo problema, e\` che il ***modello*** sembra non c'entrare nulla.

Nel disegno sotto/a fianco/altrove, le *righe* sono le cantine, ripetute per i vari giorni (colonne); i puntini rappresentano la posizione dei due inetti al volo col trascorrere dei giorni. Potete posizionare Roswell su una qualunque casella della riga in basso e muoverlo verso l'alto di una casella in diagonale.



In pratica, Roswell diventa una pedina della dama (anche se puo\` liberamente scegliere il colore della casella di inizio) ***vincolato a rimanere sul colore iniziale*** e *soprattutto* a non poter tornare indietro (cambiare la freccia del tempo e\` una cosuccia che permettiamo ad Hawking e ai fisici teorici, ma non ai personaggi della fantascienza). Tenendo fermi questi due vincoli e anche ben presente la dislocazione delle pedine nere che rappresentano i due incapaci, provate a muovere Roswell: si vede bene che qualsiasi casella scelga come iniziale lo porta, dopo non molti passi, alla cattura. Provate: Roswell su casella iniziale ***1*** ha diversi percorsi (***1-2-1-1***, ***1-2-3-4***, eccetera...) ma si vede benissimo che il piu\` lungo e\` ***1-2-3-4-5-6-X*** (dove la "x" significa cattura), lungo ***7*** giorni. E, se avete la pazienza di verificare per tutte le celle iniziali, si vede anche che i "tempi massimi" di cattura sono:

Partenza	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
Tempo	7	1	8	1	9	2	10	3	10	4	10	5	9	5	10	5	10

La qual cosa ci dice che i famosi "sedici giorni al massimo" sono un bello spreco (visto che anche supponendo che Roswell utilizzi la strategia migliore viene comunque preso in dieci giorni), e che il valore atteso di cattura e\` di poco inferiore alla settimana (***6,411765*** giorni).

L'unica speranza e\` che Roswell, conscio della noia che quei due ci hanno causato, estragga il suo TeraBlaster cosotronico e... finita la serie, finalmente!

5. Quick & Dirty

*Di un numero intero sappiamo che termina per **2** e che, se spostiamo il **2** all'inizio, otteniamo un numero che e\` il doppio del numero originale.*

Qual'e\` il numero di partenza?

Allora, qui avevo una soluzione scarsamente Quick e decisamente Dirty; per fortuna, e\` arrivato ***Teo*** con una soluzione meno Quick della mia ma anche decisamente meno Dirty.

Teo, cambio un po\` la notazione. Giusto per sfoggiare il mio Formula Editor...

*Innanzitutto il numero cercato e\` 105263157894736842. So che ce n'e\` un altro piu\` umano ma che ci posso fare se ho trovato solo questo monster?* [Non puoi farci niente, anche perche\` ***non*** ce n'e\` un altro piu\` "umano" (RdA)] *Comunque i conti mi tornano [con la calcolatrice di windows e\` ancora piu\` fattibile la cosa (no, non lo so usare granche\` excel, a meno che non si tratti di fare tabelle e grafici e poi con la calcolatrice si fa prima)] quindi.*

Ecco come ci sono arrivato:

Traducendo il testo del problema in formule matematiche viene

$$2\left[a_n * 10^n + \ldots + a_1 * 10^1 + 2\right] = 2 * 10^n + a_n * 10^{n-1} + \ldots + a_1 \qquad \texttt{[005.001]}$$

cioe` il doppio del nostro numero N, che termina per due, e` uguale allo stesso numero senza il due in fondo e con il due messo invece davanti.

Ora portiamo al primo membro tutto quanto tranne $2 * 10^n$ *cui invece affianchiamo un bel* **-4** *(il* **+2** *raddoppiato e portato al secondo membro).*

Raccogliamo tutte le varie **a** *in questo modo:*

$$19 * a_n * 10^{n-1} + 19 * a_{n-1} * 10^{n-2} + \ldots + 19 * a_1 \qquad \texttt{[005.002]}$$

cioe` raccogliamo la lettera moltiplicata per la potenza di dieci ad esponente minore in tutti i termini simili: per a_1 *viene* $10^{n-1} * (2 * 10 - 1) = 19 * 10^{n-1}$ *per le altre lettere non cambia quasi nulla.*

Possiamo raccogliere adesso il 19 e portarlo al secondo membro in modo da avere (al secondo membro sempre) $2 * \frac{10^n - 2}{19}$

E' chiaro che 19 non puo` dividere 2 e che quindi deve dividere per forza il simpatico* $10^n - 2$ *(dico simpatico perché calcolare con le congruenze quale fosse il valore di* **n** *piu` piccolo che facesse al caso nostro mi e` costato almeno un paio di decimi di vista e una buona dose di salute mentale, non voglio neanche pensare che ce ne potrebbe essere uno piu` grande)

Calcoliamo con le congruenze, come anticipato, il nostro valore di n. Risulta essere 17; infatti 10^{17} *e` congruo a* **+2** *modulo* **19** *(i simboli per le congruenze non so proprio dove trovarli.) e quindi ci e` utile per il nostro fine.*

Qui entra in gioco la calcolatrice (certo che usarla per quick & dirty non e` proprio il massimo, ma ormai...) con cui ci si calcola 10^17 ( tra l'altro quegli intelligentoni di microsoft non hanno nemmeno fatto uno straccio di tasto per l'esponente quindi mi e` toccato schiacciare diciassette volte lo 0 [Prova a settarla come "Scientific" (RdA)]*) gli si toglie 2 e si divide il tutto per 19 e lo si moltiplica per 2.*

Il numero che si ottiene e` l'altrettanto simpatico10526315789473684.

Questo e` il nostro numero N iniziale solo diminuito di due e quindi diviso per 10

Bastera` fare il procedimento inverso ( moltiplicare per 10 e aggiungere 2, crepi l'avarizia di passaggi!!!) per ottenere 105263157894736842 che moltiplicato per 2 da, come ho grandemente sperato la prima volta che ho visto questa serie di 18 cifre, 210526315789473684 cioe` il doppio, tolto il due dal fondo e messo all'inizio con le cifre in mezzo invariate.

Corretto, ma forse esistevano delle vie piu` brevi... Ad esempio, partire dall'idea che la cifra piu` significativa del numero originale sia un ***1*** (il che e` abbastanza logico), ma poi si ferma li`...

> Partendo invece dall'ultima cifra nota ***(2)*** del primo numero, la penultima sara` il suo doppio ***(4)***. La precedente sara` il doppio di questa ***(8)*** e la quartultima il suo doppio (cifra meno significativa) ***(6)***. la quintultima sara` il doppio della quartultima alla quale *dovro` sommare il riporto del passaggio precedente* ***(2+1=3)*** e avanti in questo modo ***sin quando non trovo un*** **2** ***senza riporto***.

Ci vuole un po`, ma alla fine si trova ***105263157894736842***. Che quindi e` anche il minimo numero avente questa caratteristica.

6. Zugzwang!

6.1 Il gioco del tredici

No, niente analisi complete. Solo due note. La prima da parte di ***Sam***: "*ti faccio sapere appena asciuga la colla sui dadi*". Questo e` lo spirito che ci piace.

Infatti, il Nostro (nonostante in questo periodo sia terribilmente e giustificatamente impegnato a fare altro), ci passa questa perla:

"*Se il secondo giocatore (a meno che non possa vincere con una sola mossa) risponde sempre con una mossa simmetrica centralmente a quella del primo, sicuramente il primo giocatore non potra` vincere, al massimo potra` pareggiare".*

Sam continua dicendo "*Non e` un Teorema, e` un'intuizione".* Posso confermarti che e` un teorema[16], valido per molti giochi di posizione in cui le pedine non si muovono.

Il Nostro prosegue con "*Il secondo giocatore non potra` mai fare una mossa perdente se prima non l'ha fatta il primo; l'unica mossa che per simmetria rimane sulla stessa linea e` quella sulla diagonale; non e` possibile che il primo giochi un numero che il secondo non ha*".

Ho solo un dubbio (lo lasciamo chiarire a Doc, cosi` e` contento). E se la mossa vincente la trova il primo? Non faccio a tempo, a "replicarla"...

7. Pagina 46

Forse aiuta qualche prodotto notevole (e qualche "brutta" soluzione)...

Sia ***a*** la parte (a due cifre) piu` significativa di un numero ***N*** soddisfacente le condizioni e sia ***b*** la parte meno significativa; allora $N = 100a + b$ e le condizioni del problema ci portano a:

$$100a + b = (a+b)^2 \qquad \texttt{[007.001]}$$

Che puo` essere riscritta come:

$$\begin{aligned} 99a &= (a+b)^2 - (a+b) \\ &= (a+b) * (a+b-1) \end{aligned} \qquad \texttt{[007.002]}$$

Ossia, l'ultimo risultato (il prodotto) deve essere divisibile per ***99***.

Indaghiamo sui possibili valori di ***a*** e ***b***:

$$a + b = 99k\,,\ a + b - 1 = \frac{a}{k}$$

Siccome ***a*** e ***b*** sono numeri di due cifre, deve essere $k \le 2$. Inserendo il valore ***k=2*** nell'equazione `[002]`, si ha ***a=b=99***.

Per quanto riguarda ***k=1***, si ha:

$$\begin{aligned} k &= 1 \\ a + b &= 99 \\ a &= a + b - 1 = 98 \\ N &= 9801 = (98+1)^2 \end{aligned} \qquad \texttt{[007.003]}$$

[16] Sam, hai reso triste Doc. Lui sostiene che quello e` l'unico teorema che abbia mai capito... Voleva dirlo lui!

Che rappresenta la prima soluzione

$a+b=11m$, $a+b+1=9n$, $mn=a$

Questo significa che:

$$9n=11m-1 \qquad [007.004]$$

Ossia che ***11m-1*** e` divisibile per ***9***. Allora ***m*** dara` un resto pari a ***5*** se diviso per ***9*** (per qualunque altro resto, ***11m-1*** non sarebbe divisibile per ***9***).

Da cui, $m=9t+5 \Rightarrow 9n=99t+54 \Rightarrow n=11t+6$ e la nostra espressione diventa:

$$\begin{aligned} a &= mn \\ &= (9t+5)*(11t+6) \\ &= 99t^2+109t+30 \end{aligned} \qquad [007.005]$$

ora, siccome ***a*** deve essere di due cifre, deve essere ***t=0*** e di conseguenza,

$$\begin{aligned} a &= 30 \\ a+b &= 11m = 55 \\ b &= 25 \\ N &= 3025 = (30+25)^2 \end{aligned} \qquad [006]$$

Che rappresenta la seconda soluzione

$a+b=9m$, $a+b-1=11n$, $mn=a$

Con lo stesso ragionamento della parte precedente, si ottiene

$$N=2025=(20+25)^2 \qquad [007]$$

Che rappresenta la terza soluzione.

$a+b=33m$, $a+b-1=3n$ oppure

$a+b=3m$, $a+b-1=33n$

La condizione e` impossibile in quanto ***a+b*** e ***a+b-1*** sono primi tra loro.

$a+b-1=99k$, $a+b=\dfrac{a}{k}$

$$\begin{aligned} a+b-1 &= 99 \\ a+b &= 100 \\ a &= \frac{(a+b)(a+b-1)}{99} = 100 \end{aligned}$$

Che e` impossibile.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 La Foresta di Stern-Brocot [001]

Allora, la cosa e` complessa e, come al solito, comincia tutta da un'altra parte. Provo a spiegarvela come ci sono arrivato io.

Tutto comincia dal ***Paradosso di Simpson***: non proprio una *Godeleria*, ma il risultato e` abbastanza in contrasto con il senso comune, tant'e` che pensavo di sfruttarlo per un Q&D; proviamo a partire da qui.

Allora, avete due urne, una ***blu*** e una ***rossa***, che contengono palline ***bianche*** e ***nere***. Vostro compito e` scegliere un'urna ed estrarre una pallina; vincete se e` ***nera***. Tanto per cominciare, esaminiamo due casi (ve li ritrovate in una tabella da qualche parte).

Caso	**Urna Blu**		**Urna Rossa**	
	Nere	**Bianche**	**Nere**	**Bianche**
(1)	5	6	3	4
(2)	6	3	9	5

Nel primo caso, la probabilita` di prendere una pallina nera dall'urna blu e` pari a $\frac{5}{5+6}=\frac{5}{11}$, mentre per quanto riguarda l'urna rossa abbiamo una probabilita`di $\frac{3}{3+4}=\frac{3}{7}$. Voglio sperare siate ancora in grado di stabilire quale sia la maggiore tra due frazioni senza Excel, e che quindi vi dirigiate con una certa qual sicurezza verso l'urna ***blu***. Con calcoli decisamente simili, vi invito ad esaminare il secondo caso; qui, forti del fatto che $\frac{6}{9}>\frac{9}{14}$, vi dirigete con aria vagamente annoiata verso l'urna ***blu***. Resistete ancora un passaggio che poi e` finito.

Adesso *sommiamo le urne* secondo il colore; ossia mettiamo in un'urna blu tutte le palline che erano nelle urne blu, e lo stesso per le urne rosse; abbiamo quindi due urne contenenti la situazione qui a fianco.

Caso	**Urna Blu**		**Urna Rossa**	
	Nere	**Bianche**	**Nere**	**Bianche**
(3)	11	9	12	9

Adesso, senza calcoli, che urna scegliete? Visto che prima "vincevano" sempre le blu e qui ho sommato le blu, la risposta dovrebbe essere "blu". Li fate voi, i conti, o li faccio io? Spiacente deludervi, ma in questo caso $\frac{11}{20}<\frac{12}{21}$. Quindi, conviene scegliere l'urna ***rossa***. Carino, vero?

Il tutto nasce dal fatto che, se ***n*** e` il numero delle palline nere in un'urna e ***t*** il numero delle palline totali, si ha sempre:

$$\frac{n_1}{t_1}<\frac{n_1+n_2}{t_1+t_2}<\frac{n_2}{t_2} \qquad \texttt{[008.001]}$$

e, cucinando (ma poco) i numeri opportuni, ottenete il Paradosso di Simpson.

Non per niente, date due frazioni, la frazione avente per numeratore la somma dei numeratori e per denominatore la somma dei denominatori e` detta ***mediante***.

Bene, teniamo li` questo concetto e parliamo d'altro.

Prego i piu` matematicamente ferrati di voi di non cominciare a pestare i piedi; lo so anch'io che non bisogna dividere per zero, ma qui ci serve solo come simbolo.

Partiamo dai due "cosi" $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{0}$; scriviamoli rispettivamente in alto a sinistra e in alto a destra su un foglio e, nella riga sotto, in mezzo, scriviamo il *mediante*, che sara` $\frac{1}{1}$. Nella riga ancora sotto, a meta` strada, scriviamo il mediante tra le due frazioni a destra e a sinistra; otterremo due frazioni, una mediante tra $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$, l'altra mediante tra $\frac{1}{1}$ e $\frac{1}{0}$. E andiamo avanti cosi` per un po`. Volevo fare un bel disegnino in PowerPoint, ma a quanto pare il signor Gates non e` d'accordo. Cerchiamo di cavarcela con una tabella.

$\frac{0}{1}$																	$\frac{1}{0}$
								$\frac{1}{1}$									
				$\frac{1}{2}$									$\frac{2}{1}$				
			$\frac{1}{3}$				$\frac{2}{3}$			$\frac{3}{2}$					$\frac{3}{1}$		
		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{4}{1}$	
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{1}$	

Spiacente, ma le righe dovete immaginarvele (non vorrei ritrovarmi con l'istrice di qualche numero fa, a sovrapporre robe strane...)

Giusto per essere sicuri di non dover rifare un obbrobrio di questo genere, cerchiamo di spremere *qui* tutto lo spremibile.

C'e` da dire che 'sta tabella permette di notare facilmente una cosa: se guardate i denominatori di una riga, vedete che sono *i numeratori in ordine inverso*; per comodita`, quindi, possiamo limitarci a parlare dei numeratori (il che semplifica notevolmente lo schema).

Numeriamo anche le righe, in un modo un po` strano, come nello schema qui sotto (spero).

Per prima cosa, si vede che ogni riga e` formata per meta` dalla riga sopra e per meta` da un pezzo "diverso"; questo "qualcos'altro" non e` proprio immediato, quindi ve lo dico. Volendo ad esempio costruire la riga "3", prendiamo la riga "2" e scriviamola due volte, una volta per dritto e una volta al contrario; quindi, sommiamo i rispettivi elementi. Se tutto va come deve, il risultato e` qui di fianco.

```
-1                            0     1
 0                               1
 1                            1     2
 2                         1  2     3  3
 3                   1  2  3  3     4  5  5  4
 4       1  2  3  3  4  5  5  4     5  7  8  7  7  8  7  5
```

1	2	3	3
3	3	2	1
4	5	5	4

Un grande delle riunioni noiose, se possiamo tornare ad un nostro vecchio, caro tormentone.

Altre caratteristiche interessanti: se andate avanti con l'opportuna dose di pazienza, grazie alla proprieta` del mediante vista sopra, la struttura *conserva l'ordine*, ossia i valori che ottenete sono sempre ordinati (come frazioni, chiaramente). Inoltre, presupponendo di andare avanti il giusto numero di passaggi, prima o poi ottenete *tutti* i numeri razionali (nella loro forma ridotta: prego notare che nessuna delle frazioni che saltano fuori e` semplificabile).

Vi risparmio le dimostrazioni di 'sta roba, ma se vi volete male avete solo da chiedere (sono piuttosto noiose, anche se semplici)

Perche` hai numerato in quel modo strambo le righe? Beh, per un'altra strana caratteristica di questo aggeggio; *la somma dei termini della riga* **n** *vale* 3^n. Questo, logicamente, per $n \geq 0$; comunque, mi aspetto che quel brillante polemista di Doc pretenda di estendere questo risultato anche ai valori negativi, trovando finalmente un valore finito per $\frac{1}{0}$. Non varra` la Fields, ma pur di farlo stare zitto siamo disposti a dargli ragione e a pagargli la birra.

Sono d'accordo con voi, pero`, che quel "fratto zero" sia una notevole rottura di scatole, matematicamente parlando; forse possiamo cavarcela ***generalizzando*** il nostro albero; partendo da due generici numeri ***x*** e ***y*** otteniamo ad esempio l'albero indicato di fianco (ve ne faccio solo un pezzo: e` il pensiero che conta, no?). Per comodita`, indichiamo questo aggeggio come $[x, y]$; il primo che abbiamo costruito, quindi, dovrebbe essere $[0,1]$. Per vedere se avete capito, potreste provare a verificare (non oso dire "dimostrare"...) la seguente, che mi pare piuttosto carina:

```
-1               x                y
0                        x+y
1              2x+y             x+2y
2        3x+y  3x+2y          2x+3y  x+3y
```

$$[x, y] = x * [1,0] + y * [0,1] \qquad \textbf{[008.002]}$$

in cui $[0,1]$ e`, come abbiamo detto, l'albero di Stern-Brocot propriamente detto, mentre (la cosa e` *abbastanza* immediata) $[1,0]$ e` la sua riflessione speculare. Insomma, ogni albero (generalizzato) consiste di due parti: una parte *sinistra* $[x, x+y]$ e una parte *destra* $[x+y, y]$ che crescono in modo indipendente l'una dall'altra. Inoltre, $[x, x]$ e` simmetrico rispetto all'asse centrale. Quelli di voi che, a questo punto, sentono un preoccupante odore di spazio vettoriale hanno perfettamente ragione.

Allenatevi un po`, che c'e` dell'altro.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms