Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 048 - 2003-01

1. Torino, 1750

Le firme sono sempre tre, ma riconosciamo a Doc la completa paternita` di quanto segue.

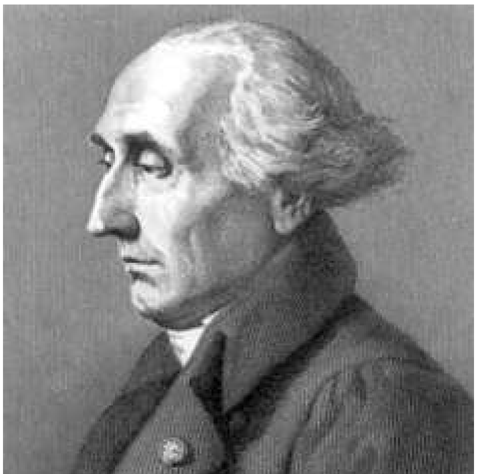
Ci sono domande irritanti non tanto per la oggettiva difficolta` della risposta, quanto per l'assoluta opinabilita` della stessa. Ad esempio, la domanda "Chi e` il piu` grande matematico della storia?" e` decisamente una di queste. Bisognerebbe prima definire la parola "grande", poi concordare una metrica di valutazione, indi acquisire tutti i parametri stabiliti dalla metrica concordata, e infine buttare via tutto per manifesta impossibilita` a procedere. Conta la quantita` dei teoremi prodotti, o la pura genialita` di una osservazione rivelatrice? Come facciamo a sapere quanti e quali sono i teoremi di Euclide, e quali quelli che ha solo riportato nei suoi libri? Dobbiamo valutare il fatto che Abel e Galois sono morti ad una eta` spaventosamente giovane, oppure no? Conta o no che gentaccia come Newton sia piu` nota come fisico che come matematico?

Meglio rinunciare. Del resto, la scoperta di enti incommensurabili non dovrebbe piu` provocarci lo stress che procuro` a suo tempo a Pitagora e compagni.

Ma la capacita` di irritare non e` prerogativa delle domande, anzi: ci sono anche risposte irritanti quanto le domande di cui sopra. Senza troppo sforzo, prendete la stessa domanda maledetta del paragrafo precedente, aggiungeteci un innocente aggettivo geografico, e vedete cosa ne viene fuori: "Chi e` il piu` grande matematico ***italiano*** della storia?"

Non v'e` dubbio che tutte le obiezioni mosse alla domanda generale resistono, per graziosa proprieta` transitiva, anche nei riguardi della seconda domanda piu` specifica: però, ammettiamolo, il campo si restringe sensibilmente. Anche a volere rispolverare impolverati orgogli nazionalistici, e` difficile mettere in fila una serie di nomi altisonanti come possono fare i fratelli francesi o i cugini tedeschi. Anche se non siamo certo l'ultima ruota del carro, no? Da Luca Pacioli e Fibonacci fino a Leonardo da Pisa (no, scusate, gia` detto), passando poi per Tartaglia e Cardano, si arriva (tralasciando non so quanti altri celeberrimi nomi) ad uno splendido inizio Novecento, con Peano, Levi-Civita, Ricci, Enriques. Su Caccioppoli hanno fatto un film come su Nash, Majorana puo` ad un tempo fare la parte di Newton (piu` fisico o piu` matematico?) e di Galois, dal punto di vista della morte/scomparsa precoce/affascinante. E poi, diamine! Devo ricordarvi io che Zenone era di Elea, che il sommo Archimede era di Siracusa? D'accordo, escludiamo la Magna Grecia, se vogliamo fare i puristi: quei giovanotti parlavano la lingua di Omero e non quella di Dante, e, soprattutto, se mettiamo in Nazionale pure Archimede, che secondo molti esperti faceva mangiare la polvere anche ad Euclide, la questione non si pone neanche più.

Pero` e` irritante notare che, ponendo questa domanda e attendendone le perplesse risposte, molto spesso nell'elenco non figuri per niente Giuseppe Luigi, figlio di mamma Teresa Grosso e di papa` Giuseppe Francesco Lodovico. "E Lagrange?" e` l'osservazione canonica che si rivolge in replica all'elenco dei matematici italiani sciorinato dal tapino cui si pone la fatidica domanda. "Lagrange? Il francese? Ma non avevi detto "italiano"?



D'accordo, adesso capita un po` piu` raramente. Ma capita, capita ancora. Ed e` certo ingiusto, visto di lui scrissero addirittura *"...ha un accento italiano assai marcato, e pronuncia la "s" alla stessa maniera della "z"..."* ; il commento porta la firma di tal Fourier (mai sentito nominare?) ed e` riferito alle non eccellentissime doti di insegnante che Lagrange mostro` nelle sue lezioni all'Ecole Normale e all'Ecole Polytechnique di Parigi nel 1795.

Visse 28200 giorni esatti, quelli che vanno da 25 Gennaio 1736 al 10 Aprile 1813, una cifra abbastanza significativa, e in tempi assai significativi. La numerologia non e` il nostro forte, ma e` carino notare la cifra tonda delle centinaia o, con neanche troppa approssimazione, il numero 1000 che risulta dividendo la sua vita per la durata del mese lunare[1]; per uno che sostanzialmente ha detto quasi tutto quel che c'era da dire sulla meccanica celeste sembra un epitaffio grazioso. In ogni caso, fece in tempo a

1 Il mese sinodico e` di $29^d12^h44^m3^s$, assai piu` di 28,2. Pero` c'e` anche il mese siderale, di soli $27^d7^h43^m12^s$, per non parlare poi del mese draconico, pari a $27^d5^h5^m36^s$; fate una bella media, e vedete quanto siamo lontani...

vivere il suo settantasettesimo compleanno, e questo mese ne celebriamo il duecentosessantaseiesimo.

La maledizione preferita dai cinesi sembra che sia "Possa tu vivere in tempi interessanti!", perché la saggezza orientale ha ben presente che i tempi che gli storici trovano interessanti sono anche i tempi in cui e` piu` difficile vivere tranquillamente. Giuseppe Luigi nasce nel giovane Regno di Sardegna, diventato tale da pochi anni: attraversera` quasi per intero il secolo dei Lumi, finira` ben dentro alla Rivoluzione Francese e all'Impero di Napoleone; passera` da Torino a Berlino, e da Berlino a Parigi; ma, nonostante tutto, la sua vita sembra comunque essere una vita timida, passata a far matematica e a tenersi in disparte dal vortice degli stravolgimenti politici.

Avete voglia di immaginarvelo? Allora prendete un quattordicenne del ceto medio piemontese, e fatelo passeggiare per Torino allo scadere del settimo quarto di millennio; Torino che, a quei tempi, non era poi molto piu` grande del perfettamente squadrato accampamento romano di Augusta Taurinorum. Fategli percorrere, in un'ora vicino al tramonto, una di quelle vie torinesi orientate da nord a sud, parallele al cardo[2] originario; la Contrada dei Conciatori, ad esempio, che si snoda diritta quasi rasente alle mura orientali, ma comunque ben diretta verso Palazzo Carignano e Piazza Castello, pallidamente illuminata dai raggi deboli d'un plenilunio[3] invernale.

A quel quattordicenne piace il latino, ma ha appena scoperto un libro interessante scritto da Halley, il piu` famoso nominatore di comete della storia: in quel libro si parla dell'algebra applicata all'ottica, e il giovanissimo Giuseppe Luigi rimane folgorato dall'opera. Anche se, probabilmente, non fu solo folgore sacra e divina: suo padre aveva un bel mucchio di problemi finanziari, e lui probabilmente intravide nello studio della meccanica anche la possibilita` d'una professione.

Inizia allora ad interessarsi di matematica, e gli inizi non sono eclatanti: scrive i suoi primi risultati (in italiano) a Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (un nome che e` tutto un programma, per un torinese[4]), ma prima di pubblicarli li anticipa (in latino) ad un professore svizzero, un certo Eulero Leonardo. Poi pubblica il tutto (a proposito, siamo gia` nel 1754: Giuseppe ha ben 18 anni) e un mese dopo la pubblicazione si accorge che non ha scoperto niente di nuovo, perché Leibniz e uno dei Bernoulli[5] avevano gia` sviscerato il problema[6], cosicché Lagrange rischiava di passare per un abile plagiatore di teoremi altrui. Non so cosa avreste fatto voi, ma conosco un bel po` di gente che si sarebbe data alla coltivazione della barbabietola, dopo un fatto del genere. Ma a Giuseppe Luigi la matematica piace, e sembra che l'unica seria conseguenza dell'incidente sia stata la raddoppiata determinazione con la quale si mise a cercare risultati originali.

---

[2] Il cardo e` una delle due vie principali dell'accampamento romano, quella orientata Nord-Sud, mentre il decumano e` quella orientata Est-Ovest. Nella Torino attuale la direttrice del cardo si ritrova grosso modo coincidente con Via XX Settembre, e il decumano dovrebbe piu` o meno seguire il percorso di Via Garibaldi. Sono benvenute correzioni e precisazioni.

[3] Ad avere il GC come correttore di bozze si rischia grosso; magari non intercetta marchiani errori di battitura (potrei scrivere "squola", in questa nota, senza che lui noti) ma quelli sottili e difficilissimi da trovare non hanno scampo: nel Gennaio del 1750 il plenilunio cadeva il 21; JLL e` nato il 25, quindi il "quattordicenne" è, ahimè, ancora e solo un "quasi quattordicenne".

[4] In piemontese "fagnano" indica l'indolente che non e` particolarmente produttivo; il termine quasi sicuramente viene dall` unione delle parole "fare niente".

[5] Johann.

[6] Alcune osservazioni sul teorema binomiale.

Risultati che, prima ancora della fine di quel 1754, si concretizzano nella scoperta di alcune proprieta` interessanti e nuove sulla tautocrona[7], grazie all'utilizzo di un metodo "di massimi e minimi" che Lagrange inventa e che sara` fondamentale nella strutturazione del calcolo delle variazioni. Il glorioso Settembre del 1755 lo vede lodato da Eulero, impressionato dalle sue scoperte, e gia` professore di matematica alla Reale Scuola di Artiglieria di Torino.

Da qui comincia una serie di tentativi di Lagrange di sfuggire agli impegni caratteristici del suo valore, roba da far impallidire il tenente Colombo e il commissario Montalbano (entrambi noti per l'abilita` nell'acciuffare i delinquenti e la ferrea determinazione nel voler rifiutare promozioni e relative responsabilita`). Eulero mobilita Maupertuis, e insieme gli procacciano una cattedra in Prussia; ma Giuseppe e` convinto che se da` loro retta avra` meno tempo per la matematica, e cortesemente rifiuta. Ci riprovera` poi anche D'Alembert, con medesimi risultati (sembra che gli rispose qualcosa del tipo "*a Berlino c'e` Eulero, cosa ve ne fate di uno come me?*", ma non e` del tutto chiaro se si trattasse di modestia, falsa modestia, opportunismo o timore della competizione). E poi anche molto piu` tardi, quando ormai era probabilmente il matematico piu` celebre del suo tempo, tra le moltissime offerte che ricevette accetto` quella parigina sostanzialmente perché lo esonerava dall'insegnamento, lasciandogli piu` tempo per la sua amata matematica.

Comunque a Berlino fini` poi con l'andarci, nell'Aprile del 1766: Federico il Grande lo invito` con una formula d'effetto, anche se non matematica. "*Il piu` grande dei Re desidera avere il piu` grande dei Matematici*", ed era difficile rifiutare un invito del genere, anche se il fatto che in quel periodo Eulero stesse trasferendosi da Berlino a San Pietroburgo puo` difficilmente essere considerata una mera coincidenza. Era gia` da tempo membro dell'Accademia delle Scienze di Berlino (anzi, probabilmente questa fu una delle ragioni per le quali Lagrange fu tra i soci fondatori di quella che sarebbe poi diventata la Reale Accademia delle Scienze di Torino), e passo` il tempo scrivendo un trattatello, intitolato ***Traité de Mécanique Analytique***, che sotto molti aspetti e` tuttora croce e delizia di un bel numero di studenti del biennio della facolta` scientifiche. E visto che apparteneva all'Accademia delle Scienze di Torino e a quella di Berlino, per non far torto all'Accademia delle Scienze di Parigi partecipo` spesso ai "certamen" che questa proponeva alle menti piu` brillanti dell'epoca: nel 1766, 1772, 1773 e 1778 mando` ai francesi le sue memorie sui problemi proposti, e vinse sempre il premio in palio.

Ma non e` certo intenzione di questa piccola celebrazione rammentare qui tutte le sue opere: piuttosto, e` divertente notare lo strano orgoglio con cui apre il Trattato: "*... non troverete qui alcuna figura o diagramma...*". Giuseppe aveva trasformato la meccanica in un pezzo di matematica, se ne rendeva conto, e ne era giustamente orgoglioso.

Dalla corte di Federico il Grande di Prussia passo` a quella di Luigi XVI di Francia. E a Parigi vide la testa di quel re rotolare nel cesto piazzato a Place de la Revolution (oggi Concorde), e piu` tardi ci vide finire anche quella di Lavoisier[8], suo amico e protettore. Lui, probabilmente, aveva nella testa e nel cuore il riserbo caratteristico

[7] Cercate una bella curva "concava", come lo sono la cicloide, la catenaria o la mezza circonferenza, per intenderci. Immaginatela come una rotaia appesa alla parete, sulla quale si possa appoggiare una pallina. La pallina, soggetta alla forza di gravita`, percorrera` la curva fino ad arrivare al suo punto piu` "basso". Adesso imponete la condizione meccanica che, qualsiasi sia il punto iniziale dove posizionate la pallina, il tempo che essa impiega a raggiungere il "fondo" sia sempre lo stesso ("tautos" e "cronos", "stesso" e "tempo"). Ecco definita la tautocrona. Se non lo sapete gia`, cercate di scoprire quale curva essa sia.

[8] "*E` bastato un istante a far cadere quella testa, non bastera` un secolo a crearne una uguale*", sembra che il nostro abbia commentato.

della sua terra d'origine, che lo tutelava: matematico di corte, fu comunque ben visto e ben accetto anche dai governi rivoluzionari. Quando uno di questi decretò, nel 1793, che gli stranieri cittadini di stati nemici dovevano tutti essere posti in arresto, a Lagrange fu comunque consentito di restare libero e rispettato; gli fu tolto il regio privilegio di poter "non insegnare", ma a molti ando` ben peggio; lui si limito` a ricevere i gia` citati commenti non troppo lusinghieri di Fourier sulla sua pronuncia delle sibilanti francesi. Dopo la rivoluzione, Napoleone, per non essere da meno di Federico di Prussia e di Luigi di Francia, nomino` il nostro piemontese addirittura Conte dell'Impero, gli cuci` sul petto la Legion d'Onore e l'Ordine Imperiale de la Reunion.

Oltre ad essere stato il primo professore d'analisi alla Ecole Polytecnique e a tener lezioni alla Ecole Normale, partecipo` anche alla leggendaria Commissione dei Pesi e Misure; eppure, nonostante i meriti, i riconoscimenti e l'immenso lavoro svolto a Parigi, l'immagine probabilmente piu` simpatica del suo periodo francese e` legata ad una sua "non-lezione". Lagrange si dedico` per un bel po` al tentativo di dimostrare il Quinto Postulato d'Euclide, quello sulle parallele, che sembrava tanto essere un teorema e a quei tempi un sacco di matematici si chiedevano perché Euclide si fosse preso la briga di "postularlo" anziché "dimostrarlo". Arrivo` infatti alla convinzione di averlo dimostrato, scrisse dei begli appunti ordinati (leggenda vuole che "pensasse" in anticipo ogni aspetto delle cose che stava per scrivere, e poi scrivesse di getto, tutto senza neanche una cancellazione) e si presento` per una lettura ufficiale dei suoi risultati sul Quinto Postulato. Ad aula riempita, tira fuori i suoi appunti, sta per cominciare l'esposizione quando nota qualcosa che lo colpisce nel primo paragrafo. "Meglio se ci penso su ancora un pò"[9], sembra che abbia detto alla platea, rimettendosi i fogli in tasca e lasciando l'aula.

Nella Parigi napoleonica resto` fino alla sua fine, che precedette di poco la prima "caduta nella polvere" del corso imperatore[10]. Ma ne aveva fatta di strada, il quattordicenne torinese amante del latino che percorreva al tramonto la Contrada dei Conciatori nella sera della capitale sabauda. E certo non immaginava che, un paio di secoli dopo, molti studenti di matematica avrebbero percorso quella stessa via, diretti a Palazzo Campana, sede dell'Istituto di Matematica dell'Universita` degli Studi di Torino. Studenti probabilmente irritati dalle lagrangiane che circolano in abbondanza sulle lavagne e nelle loro teste, mentre sorpassano l'austero edificio dell'Accademia delle Scienze, anch'esso marchiato da Lagrange. Certo non immaginava che quella via, proprio quella che e` adesso una centralissima via avrebbe addirittura preso il suo nome, come pure una "rue" della capitale francese.

E, guardando la luna, certo tutto si sarebbe aspettato, quel timido quattordicenne, meno che dare il suo nome ad un grande cratere di quel pallido satellite.

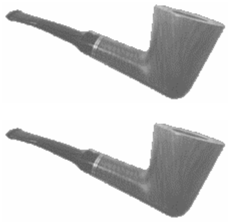
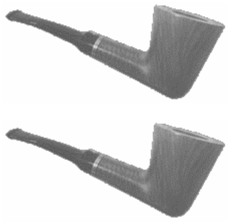
Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

---

9 "*Il faut que j'y songe encore*"

10 La battaglia di Lipsia, o delle "Nazioni" e` del 16-18 Ottobre 1813. Non sono pronto a giurare che Manzoni fissasse esattamente in questa data la prima delle sue "...due volte nella polvere...", ma mi sembra quantomeno probabile.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
I soliti logici			
X-Files!			

D'accordo, sono facili. Prima di rompere le scatole pero` date un'occhiata allo *Zugzwang!*.

2.1 I soliti logici

Quelli molto calmi e calvi, che si lasciano torturare con francobolli appiccicati in testa e domande cretine.

Dunque, questa volta ho ***8*** francobolli (***4*** rossi e ***4*** verdi), e li faccio vedere ai ***3*** logici che si sottopongono stoicamente all'operazione.

Senza che ne vedano il colore, ne appiccico ***2*** sulla testa di ogni logico e gli altri due li metto in tasca. Come al solito, ogni logico vede i francobolli altrui ma non i propri (e non sa quali mi sono messo in tasca).

Alla fatidica domanda (Che vorremmo una volta tanto fosse: "*Ma come fate a sopportare uno scemo cosi`?*", invece e` sempre la solita), riceviamo le seguenti risposte:

Aristotele: "No"

Boole: "No"

Cartesio: "No"

Aristotele: "No"

Boole: "Si"

Tipo tosto, vero? Come ha fatto, e di che colore sono i francobolli?

2.2 X-Files!

Dopo aver ricevuto il messaggio recentemente decrittato da JC, alcuni simpatici alieni hanno deciso di passare da queste parti a vedere cosa succede.

I soliti Mulder & Scully (ve lo ricordate, X-Files? Io, purtroppo, si), perennemente in caccia di turisti extraterrestri, sono riusciti a chiudere il piccolo Roswell in un corridoio sotterraneo sul quale guardano ***17*** cantine. Roswell e` in una di quelle e tutte le notti (per sicurezza) si sposta in un'altra cantina. Siccome la nostra gravita` e` un po` troppo alta per lui, si sposta solo nella cantina precedente o successiva.

I due assi dell'uf(f)ologia possono controllare solo una cantina ***ciascuno*** al giorno, e non possono vedere il cambio di cantina di Roswell.

Potete suggerire a quella coppia di incapaci una strategia per prendere il piccoletto?

3. Bungee Jumpers

Trovare tutti i numeri interi uguali:

1. Al quadrato della somma delle loro cifre.
2. Alla somma delle cifre del cubo del numero.

Non guardate me, per il suggerimento. Qui non sono neanche partito.

4. Soluzioni e Note

4.1 [046]

4.1.1 Un mazzo malandato

Tranquilli, con i meloni abbiamo finito (a meno che qualcuno abbia qualche ideuzza, ancora... Vediamo il mese prossimo, eh?). Questa solo per comunicarvi che ***Andrea***, new entry di questo mese, ci ha mandato una soluzione relativa al mazzo di carte; molto ordinata, chiara, e con tutti i passaggi a posto, che l'abbiamo capita anche noi.

Per rispondere ha utilizzato l'indirizzo di Rudy (va benissimo, la casella e` comune, sono solo degli alias), quindi risponde lui.

Andrea, solo due cose.

Prima. Puoi, le prossime soluzioni, mandarcele in Word o in modo testo? Quando ci arriva qualcosa in PDF, per prima cosa dobbiamo certosinamente copiarlo (introducendo il corretto numero di errori di battitura) e poi metterlo qui. La cosa e` fattibile, ma preferiremmo non farla.

Seconda. Andrea, non farlo mai piu`! Quando Doc, in funzione di postino, ha visto la mail nella quale mi dai del "lei", prima ha pensato "Questo ha sbagliato indirizzo", poi e` stato preso da un attacco di risus hystericus *che lo ha portato vicino alla sincope...[RdA].*

4.2 [047]

4.2.1 L'eredita` di Settimio Severo

A stretto giro di posta (nel senso che quasi non era ancora partita la mail di distribuzione) ci e` arrivata la risposta piuttosto seccata di ***PuntoMauPunto***: testuale testuale, tanto occupa poco posto:

Vabbe` che e` Natale e siete piu` buoni, ma il primo problema dovrebbe avere un numero di birre/pipe/conigliette negativo. Basta scrivere 1000000 in base 7 $(11333311)_7$ e sommare le cifre ottenute per ricavare 16.

PMP ci segnala anche di essere incasinatissimo, quindi sorvoleremo sul fatto (*Moh... Nemmeno a Natale fa il minimo sforzo per essere simpatico. [Alice]*) che considera il problema troppo semplice...*[Non e` che a Natale sono tutti piu` buoni: e` che a Natale sono tutti piu` stanchi, anche i cattivi... (RdA)].*

Come al solito, a Doc e` toccato fare da mediatore, spiegando pazientemente che in questo caso l'idea buona doveva essere appunto quella di passare in base sette; sempre per parlare di lanterne (caso mai ne sentiste la mancanza), abbiamo considerato un'ottima idea l'uso dello ***XOR***, quindi il cambiamento di base e`, effettivamente un'idea buona *[tra l'altro, anche se "nascosta" all'interno, la soluzione che avevamo trovato la utilizzava senza accorgersene (RdA)].*

Per fortuna, un'altra new entry, che si e` scelta come allonimo[11] ***Viggio***, ci manda una soluzione un po` piu` analizzata. Viggio, solo una modifica: se e` "un euro, due euro", e` anche "un as, due as". Sono considerate parole di lingue straniere e quindi difettive.

Questo e` facile facile, infatti risolvere il problema significa trovare i coefficienti $\{a_k\}$ che risolvono l'espressione:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k 7^k = 10^6 \qquad \textbf{[004.001]}$$

Ops! Ma questa espressione significa scrivere il numero 10^6 in base 7. Basta rispolverare un po` di nozioni base di aritmetica dei calcolatori per ricordarsi la regoletta pratica per trasformare una base. In particolare si prende il numero di partenza, lo si divide per 7, il resto e` la cifra meno significativa del risultato, il quoziente invece viene nuovamente ridiviso per 7 ecc... La tabella risultante e':

Quoziente	*10^6*	*142857*	*20408*	*2915*	*416*	*59*	*8*	*1*
Resto	*1*	*1*	*3*	*3*	*3*	*3*	*1*	*1*

E quindi invertendo l'ordine dei resti (non servirebbe, essendo simmetrico... ottima idea per un Bungee Jumper no? [Si, ottima idea. Qualcuno vuole provarci? Io no di sicuro (RdA)]*) si ottiene il risultato:*

$$\left(10^6\right)_{10} = \left(11333311\right)_7 \qquad \textbf{[004.002]}$$

*percio` gli eredi riceveranno rispettivamente 1 as (cioe` un biglietto per le terme senza asciugamano), 7 as (terme + asciugamano + lettino), 49*3 as (terme + asciugamano + lettino + mangiata nel ristorante delle terme), 343*3 as (come sopra + massaggino fatto da schiava cartaginese), ecc. ecc.*

Il nostro dimostra una preoccupante conoscenza del listino prezzi di questi luoghi di perdizione...

Un altro lettore che si e` accorto della cosa (e si e` seccato per la facilita` dei problemi, come sempre) e` ***Sam*** che, tra l'altro, sta lavorando ad una soluzione creativa (e piu` bella di quella pubblicata, a quanto ne sappiamo) di un vecchio problema. Non pubblicheremo in rivista, ma ve la ritroverete come allegato e sara` disponibile sul sito.

4.2.2 Le biglie di Alberto

Anche qui, la prima risposta e` di ***PMP***, sempre incasinatissimo, quindi piuttosto veloce.

Apprezzabile il fatto che risolva tutto "senza calcoli", ma qualche numerino, ogni tanto, ci piacerebbe vederlo... Pubblichiamo integralmente anche questa soluzione.

Cominciamo a portarci al caso "una sola biglia verde". E` chiaro che il primo a estrarre ha un vantaggio, visto che da quel momento in poi tutte le estrazioni sono equivalenti. Ergo, chi piglia la prima biglia verde e` svantaggiato. Ma a questo punto, visto che fino a che non si estrae una biglia verde le estrazioni sono equivalenti e` piu` probabile che sia il primo giocatore a estrarla. Insomma, meglio giocare per secondi.

Mi chiedo quanto sia frutto di ragionamento e quanto nasca dal postulato zero di Teoria dei Giochi ("Per cominciare, mai fidarsi di Rudy"). Io la vedevo un po` piu` difficile, e magari calcolare le probabilita`...

[11] Abbiamo scoperto che "nickname", in italiano, si dice cosi`: secondo Doc (che sa il greco), ha una connotazione piu` positiva rispetto a "pseudonimo". Basta fare attenzione a mettere tutte le elle, altrimenti viene troppo salato.

> Comunicazione di servizio: Saluti (da parte di PMP) a BraMo logicar *(il fatto che PMP scriva giusto l'allonimo al primo colpo ci fa pensare che questi due loschi figuri si conoscano...)*

Andiamo avanti. Per fortuna, qualcuno si e` dato da fare in direzioni un po` piu` calcolate.

Qui, ad avere dei dubbi sull'effettiva difficolta` del problema e` ***Viggio***:

*Incredibile! 3 valutazioni con 3 stelle (anzi pipe, birre e coniglietti). Immagino un massacro. Ma a me non e` sembrato difficile* [A me si. Ma perche` ho usato un altro metodo, un po` piu` generale. Ma ne parliamo dopo, OK? (RdA)]. *Quindi, o non ci ho capito niente e potete sbandierare la mia vergogna a tutto il mondo, oppure ho trovato un giochino a me congeniale...*[Siamo contenti che per qualcuno sia congeniale: Alice, ad esempio, questi non li sopporta (RdA)]

Passiamo al sodo definendo un po` di eventi, supponendo che giochino due persone.

r*: e` stata estratta una pallina rossa (e uso la stessa lettera per indicarne la probabilita');*

A*: il primo giocatore estrae una pallina verde (e la probabilita` la indico con* **1-r***);*

B*: il secondo giocatore estrae una pallina verde (la probabilita` e` sempre* **1-r***).*

Si verificano quattro casi:

A *estrae la prima verde e anche la seconda: evento* **AA** *e vince* **A**.

B *estrae la prima ma A la seconda: evento* **BA** *e vince* **A**.

A *estrae la prima ma B la seconda: evento* **AB** *e vince* **B**.

B *estrae sia la prima che la seconda: evento* **BB** *e vince* **B**.

Focalizziamo la nostra attenzione sull'evento **AA**. *Un tale evento sara` in generale della forma:*

$$\underbrace{r_1 r_1 \ldots r_1}_{2k}\ A\underbrace{r_2 r_2 \ldots r_2}_{2l+1}\ A \qquad \textbf{[004.003]}$$

Ognuno di questi eventi e` indipendente dall'altro, poiche` si tratta di partite diverse, e quindi la probabilita` del generico evento di tipo AA sara':

$$P_{k,l}(AA) = \frac{1}{r_1^{2k}}(1-r_1)\frac{1}{r_2^{2l+1}}(1-r_2) \qquad \textbf{[004.004]}$$

dove r_1 e r_2 sono rispettivamente le probabilita` di estrarre la pallina rossa quando nessuna o una verde e` stata estratta. ($1-r_1$) e ($1-r_2$) sono appunto le probabilita` di estrarre la verde nei due casi.

In generale si avra':

$$P(AA) = \sum_{k,l=0}^{\infty} P_{k,l} = \frac{1}{1-r_1^2}(1-r_1)\frac{r_2}{1-r_2^2}(1-r_2) \qquad \textbf{[004.005]}$$

Formule analoghe valgono per P(AB), P(BA) e P(BB). Quindi la probabilita` che A e B vincano la partita e` data da:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AA)+P(BA) = \frac{(1-r_1)(1-r_2)(r_1+r_2)}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} = \frac{r_1+r_2}{(1+r_1)(1+r_2)} \\ P(B) &= P(AB)+P(BB) = \frac{(1-r_1)(1-r_2)(1+r_1r_2)}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} = \frac{1+r_1r_2}{(1+r_1)(1+r_2)} \end{aligned} \qquad \textbf{[004.006]}$$

La condizione che vinca A e` data percio` da:

$$P(A) > P(B) \Leftrightarrow r_1 + r_2 > 1 + r_1 r_2 \qquad \textbf{[004.007]}$$

Sostituendo i numeri, ossia ponendo:

$$r_1 = \tfrac{2}{11} \quad r_2 = \tfrac{2}{10} \qquad \textbf{[004.008]}$$

si ottiene che B vince, in pratica NON conviene tirare per primi.

***NOTA**: ai fini del gioco, potevo anche evitare di valutare le probabilita` precedenti alla prima estrazione di una pallina verde, ma visto che non costava fatica ho reso la soluzione piu` completa.*

E la soluzione (suppergiu` lungo gli stessi binari) arriva anche da ***Katia*** che, vista la nostra totale inettitudine nell'apprezzare le cose belle di Windows (non fate battute scontate), inizia la sua lettera con un: *Allora, proviamo a mettere un font diverso dal Bernhard Fashion...* Questo, almeno, riusciamo a vederlo come lo vede lei. Molto carino; ci sentiamo un po` in colpa a trasformare l'etereo Monotype Corsiva nel rozzo ma funzionale Century Schoolbook che e` diventato lo standard della rivista.

La probabilita` di vincere all'ennesimo lancio N, costruendo l'alberello, si puo` scrivere come:

$$P(N) = A\sum_{n=0}^{N-2} p^{N-2-n} q^n \qquad \textbf{[004.009]}$$

Dove **p=2/10**, **q=2/11**, **A = (1-p)(1-q)**.

Quindi la probabilita` che vinca il primo o il secondo giocatore sara`:

per il primo giocatore sara` la somma delle probabilita` di vincita di tutte le giocate dispari (giocate dispari = 2i+1)

$$\sum_{i=0}^{\infty} A \sum_{n=0}^{2i+1-2} p^{2i+1-2-n} q^n = \frac{(1-p)(1-q)}{p} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{2i-1} p^{2i} (\frac{q}{p})^n =$$

$$= \frac{(1-p)(1-q)}{p} \sum_{i=0}^{\infty} p^{2i} \frac{1-(\frac{q}{p})^{2i}}{1-\frac{q}{p}} =$$

$$= \frac{(1-p)(1-q)p}{p(p-q)} \sum_{i=0}^{\infty} p^{2i} q^{2i} = \frac{(1-p)(1-q)}{p-q} (\frac{1}{1-p^2} - \frac{1}{1-q^2}) = \frac{(p-q)(p+q)}{(p-q)(1+p)(1+q)} = \frac{(p+q)}{(1+p)(1+q)} =$$

$$= 27\%$$

Allora la probabilita` che vinca il secondo giocatore sara`

$$1 - \frac{(p+q)}{(1+p)(1+q)} = \frac{1+q+p+pq-p-q}{(1+p)(1+q)} = \frac{1+pq}{(1+p)(1+q)} = 73\%$$

Tutto cio` provato che q/p <1 e che (Teoria dei segnali docet)

$$\sum_{n=0}^{N} p^n = \frac{1-p^{N+1}}{1-p^N} \qquad \textbf{[004.010]}$$

Quindi e` favorito il secondo....

Benissimo... Inoltre, apprezziamo particolarmente (dopo lunghe insistenze) che vi siate finalmente convertiti al Formula Editor. Apprezziamo anche il fatto che Katia ci fa i complimenti per il calendario. Arrossiamo e ne siamo fieri: nelle parole di Doc, *se qui c'e` qualcosa di vendibile per soldi, quello e` il calendario.*

E` arrivata anche la soluzione di ***Filippo***, che sviluppa la probabilita` in serie infinita e verifica qual'e` la maggiore. Non solo, ma ci spiega anche cosa vuol dire *discromatopsia* (ad asse rosso-verde, per la precisione). Tra un po` apriamo una rubrica di parole difficili, sicuri del valido contributo di ***Sam*** che risolve anche lui il problema (parlando come mangia, questa volta...) secondo queste linee.

Beh, giusto per giustificare la valutazione di difficolta` del problema, vi passo la soluzione redazionale: se ben ricordate, tempo fa parlammo di ***catene di Markov***...

A parte la vittoria, il gioco puo` essere in due stati:

1. Nessuna biglia verde e` stata estratta
2. Una biglia verde e` stata estratta

Quindi le probabilita` di passare dallo stato ***1*** allo stato ***2*** sono $\frac{2}{11}$ (numero delle biglie verdi su numero delle biglie totali), mentre la probabilita` di passare dallo stato ***2*** alla vittoria sono $\frac{1}{10}$ (numero delle biglie verdi restanti su numero delle biglie totali restanti).

A questo punto, la probabilita` di ritrovarsi nello stato ***1*** dopo l'***n***-esima estrazione risulta:

$$P_1(n+1) = \frac{9}{11} P_1(n) \qquad \textbf{[004.011]}$$

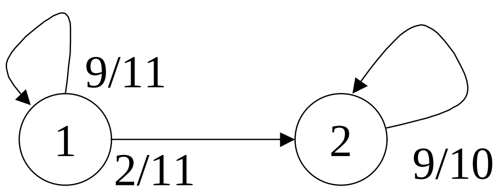
Con la condizione iniziale (abbastanza evidente) $P_1(0) = 0$, in quanto e` piuttosto difficile, senza estrarre niente, passare nello stato ***1***.

Identicamente, possiamo dire per lo stato ***2***:

$$P_2(n+1) = \frac{2}{11} P_1(n) + \frac{9}{10} P_2(n) \qquad \textbf{[004.012]}$$

Ossia essendo nello stato ***1*** abbiamo $\frac{2}{11}$ di probabilita` di andare nello stato ***2*** (si noti che e` il complemento alla certezza del valore precedente) e essendo nello stato ***2*** abbiamo $\frac{9}{10}$ di probabilita` di restarci.

Forse, il pallogramma della ***catena di Markov*** chiarisce meglio i concetti, si? Lo trovate da qualche parte qui attorno.



Voglio sperare che adesso sia piu` chiaro da dove nascono i numeri.

Da cui, possiamo dire che se ***W(n)*** rappresenta la *probabilita` che il gioco sia vinto da qualcuno dopo l'***n***-esima estrazione*, allora si puo` scrivere:

$$W(n) = 1 - P_2(n) - P_1(n) \qquad \textbf{[004.013]}$$

E, se esprimiamo il ***vettore*** (colonna) ***delle probabilita`*** come $P[n]$ abbiamo l'equazione:

$$P[n] = MP[n-1] \qquad \textbf{[004.014]}$$

In cui la ***matrice di transizione M*** vale:

$$M = \begin{Vmatrix} \frac{9}{11} & 0 \\ \frac{2}{11} & \frac{9}{11} \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[004.015]}$$

E, se preferite l'espressione in forma chiusa della **[014]**, avete:

$$P[n] = M^n P[0] \qquad \textbf{[004.016]}$$

Ora, la probabilita` che si vinca in un numero ***dispari*** di estrazioni (cioe` che vinca il primo) vale (andate a rivedervi l'espressione **[013]**):

$$\begin{aligned} W[2n+1] - W[2n] &= (1 - P_1[2n+1] - P_2[2n+1]) - (1 - P_1[2n] - P_2[2n]) = \\ &= (P_1[2n] + P_2[2n]) - (P_1[2n+1] + P_2[2n+1]) \end{aligned} \qquad \textbf{[004.017]}$$

Ossia, la somma delle probabilita` di finire il gioco in un numero ***dispari*** di mosse (ossia vincete voi) e`:

$$P[0] - P[1] + P[2] - P[3] + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i P[i] \qquad \textbf{[004.018]}$$

Che, per quanto visto, equivale a:

$$(I - M + M^2 - M^3 + \ldots) * P[0] \qquad \textbf{[004.019]}$$

E siccome $P[0] = [1,0]^T$ ci basta sommare la prima colonna di:

$$(1 + M)^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{11}{20} & 0 \\ -\frac{1}{19} & \frac{10}{19} \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[004.020]}$$

E ottenete facilmente che La probabilita` che vinca il ***primo*** giocatore vale $\frac{11}{20} - \frac{1}{19} = \frac{189}{380} = 0.497\ldots$

La "pelatura" sara` lunga, dolorosa e ineluttabile.

5. Quick & Dirty

Molto Matematico, questo...

Di un numero intero sappiamo che termina per ***2*** e che, se spostiamo il ***2*** all'inizio, otteniamo un numero che e` il doppio del numero originale.

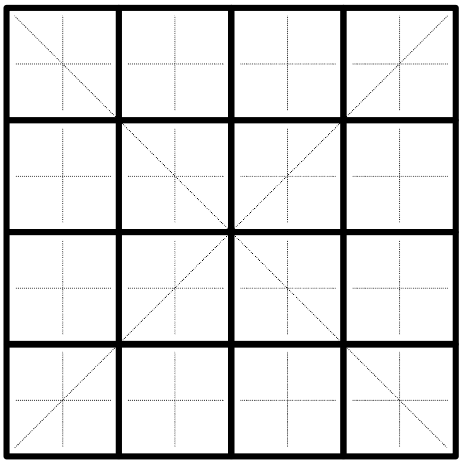
Qual'e` il numero di partenza?

6. Zugzwang!

6.1 Il Gioco del tredici

Come mai uno Zugzwang con un numero della rivista non divisibile per cinque?

Beh, questa volta ammettiamo anche noi che i problemi sono facili (l'eccesso di pipe e di birre e` dato dai postumi delle festivita`. Doc e` il piu` morigerato, qui da queste parti); quindi, vi diamo anche un giochino. No, non da giocare. ***Da analizzare***.



E perche` non lo mettete tra i problemi? Per il semplicissimo motivo che secondo noi e` analizzabile, ma non lo abbiamo fatto (e, probabilmente, ci metteremmo molto piu` tempo di voi). Come sapete, tra i problemi pubblichiamo solo quelli di cui abbiamo lo soluzione: metterlo qui e` un grazioso *escamotage* per rifilarvelo comunque.

Il gioco e` per ***2 giocatori***; vi serve un po` di materiale, ma credo possiate cavarvela vandalizzando le costruzioni del fratellino piccolo.

Infatti, vi servono ***16 cubetti***: di questi, ***otto*** hanno sulle facce i numeri ***1***, ***2***, ***3*** (in duplice copia per ogni dado), ***sei*** hanno sulle facce i numeri ***4***, ***5*** (in triplice copia per ogni dado), ***due*** hanno sulle facce il numero ***0*** (in sestuplice copia per ogni dado). Se trovate dei vecchi cubetti delle costruzioni, con un po` di carta e colla dovreste riuscire ad ottenere degli aggeggi sensati.

La seconda cosa che vi serve e` un tavoliere di gioco come quello indicato: attenzione che e` dipendente dalla dimensione dei cubi. I quadrati con il bordo grosso devono essere di dimensioni maggiori o uguali alle facce dei cubi.

Le regole del gioco sono decisamente semplici:

Ogni giocatore parte con otto cubetti: quattro del primo tipo, tre del secondo tipo, uno del terzo tipo.

I giocatori si alternano depositando sulla scacchiera uno dei loro cubetti in una casella libera.

Un giocatore ***vince*** quando, depositando un cubetto, la somma dei quattro cubetti sulla riga o sulla colonna (o su una delle diagonali principali) passanti per quest'ultimo cubetto depositato da` *esattamente* ***tredici***.

Se un giocatore e` ***forzato*** a posare un cubetto per cui la somma dei quattro cubetti (riga, colonna o diagonale, se esiste) da` un numero ***maggiore di 13***, quel giocatore ***perde***.

Se nessuno riesce a fare nulla di tutto cio`, la partita e` patta.

Alcuni dettagli sulle regole:

Vi faccio notare che ho sempre detto "quattro"; se su una riga avete fatto ***5-5-5*** non avete ancora perso (cosi` come non avete ancora vinto se avete fatto ***5-5-3***); in compenso, il prossimo che si azzarda a posare qualcosa da quelle parti ha sicuramente perso.

"E se con una mossa ottengo contemporaneamente (ad esempio) una riga che vale tredici e una colonna che vale piu` di tredici?" Qui le regole non sono chiare: siccome pero` Natale e` passato, proponiamo di considerarla come perdente.

Non cominciate a proporre variazioni che tirino in ballo le diagonali spezzate: e` gia` abbastanza complicato cosi`.

Siamo i primi ad ammettere una corposissima parentela con il filetto (tria, tris, cerchio-croce, tic-tac-toe... chiamatelo come vi pare) che tutti abbiamo probabilmente analizzato in modo completo gia` in tenera eta`.

Secondo voi, qui, si riesce?

Provate, e fateci sapere.

7. Pagina 46

(1).

Il numero ***N*** che stiamo cercando non puo` avere piu` di ***4*** cifre, in quanto se ne avesse cinque la somma delle cifre sarebbe minore o uguale a $4*5=45$ ma questo significa $N \leq 45^2 = 2025$, che ha quattro cifre.

Inoltre, siccome $4*9=36$ e $36^2 = 1296$, se ***n*** e` un numero di quattro cifre la *prima* cifra non puo` essere maggiore di ***1***.

Pero`, abbiamo che $1+3*9=28$ e $28^2 = 784$; questo implica che anche i numeri di quattro cifre debbano essere esclusi.

Quindi, ***N*** avra` *al piu`* ***tre*** *cifre*.

Definiamo ora:

$$N = 100x + 10y + z \qquad \textbf{[007.001]}$$

in cui ammettiamo il valore ***0*** per ***x***, ***y*** e ***z***.

La condizione del problema diventa:

$$100x + 10y + z = (x+y+z)^2 \qquad \textbf{[007.002]}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} 99x + 9y &= (x+y+z)^2 - (x+y+z) \\ &= (x+y+z)*(x+y+z-1) \end{aligned} \qquad \textbf{[007.003]}$$

Da cui uno dei due termini della seconda espressione deve essere divisibile per ***9*** (non possono essere entrambi divisibili per ***3*** in quanto essendo due numeri successivi sono primi tra loro); inoltre, siccome il numero e` di tre cifre e al piu` ogni cifra puo` valere ***9***, si ha:

$$1 \leq (x+y+z) \leq 27 \qquad \textbf{[007.004]}$$

A questo punto, non resta che investigare i diversi casi:

$x+y+z-1=0$. Questo implica:

$$\begin{aligned} &99x + 9y = 0 \\ &x = 0 \\ &y = 0 \\ &z = 1 \end{aligned} \qquad \textbf{[007.005]}$$

Ossia, ***N=1***.

$x+y+z=9$. Questo implica:

$$\begin{aligned} &99x + 9y = 9*8 = 72 \\ &x = 0 \\ &9y = 72 \Rightarrow y = 8 \\ &x = 1 \end{aligned} \qquad \textbf{[007.006]}$$

Ossia, ***N=81***.

$x+y+z-1=9$. Questo implica:

$$\begin{aligned} &99x+9y=9*10=90 \\ &x=0 \\ &9y=90 \Rightarrow y=10 \end{aligned} \qquad \textbf{[007.007]}$$

Che e` ***impossibile***.

$x+y+z=18$. Questo implica:

$$\begin{aligned} &99x+9y=18*17=306 \\ &x=3 \\ &y=1 \\ &z=18-(3+1)=14 \end{aligned} \qquad \textbf{[007.008]}$$

Che e` ***impossibile***.

$x+y+z-1=18$. Questo implica:

$$\begin{aligned} &99x+9y=19*18=342 \\ &x=3 \\ &y=5 \\ &z=19-(3+5)=11 \end{aligned} \qquad \textbf{[007.009]}$$

Che e` ***impossibile***.

$x+y+z=27$. Questo implica:

$$\begin{aligned} &99x+9y=27*26=702 \\ &x=7 \\ &y=1 \\ &z=27-(7+1)=19 \end{aligned} \qquad \textbf{[007.010]}$$

Che e` ***impossibile***.

Quindi, le uniche soluzioni sono ***N=1*** e ***N=81***.

(2).

Il cubo di un numero di tre cifre non puo` aver piu` di ***nove*** cifre. Dunque, la somma delle cifre del cubo di un numero di tre cifre non puo` essere maggiore di $9*9=81<100$.

Questo implica che il numero cercato non puo` essere un numero di tre cifre e, attraverso un ragionamento dello stesso tipo, si vede che non puo` neppure essere un numero con piu` di tre cifre.

Il cubo di un numero di due cifre non puo` avere piu` di sei cifre, e la somma delle cifre di un numero di questo tipo non puo` essere maggiore di $6*9=54$ e quindi deve essere $N \le 54$.

Si noti che nel cubo di un numero di questo tipo *la prima cifra deve essere minore o uguale a **1***, in quanto $54^3=157464$. Ma, in questo caso, la somma delle cifre di un numero di questo tipo non puo` eccedere $1+5*9=46$ e quindi deve essere $N \le 46$.

Procedendo in questo modo, si vede che se un numero non e` maggiore di ***46*** allora il suo cubo conterra` al piu` ***5*** cifre, ossia sara` minore di ***99999*** e quindi la somma delle sue cifre sara` al piu` uguale a $4*9+8=44$. Il cubo di ***44*** e` un numero di ***5*** cifre che termina per ***4***; quindi, questo numero deve essere escluso e quindi deve essere $N \leq 43$.

Ricordiamo ora che *un numero diviso per* **9** *da` lo stesso resto della somma delle sue cifre divisa per* **9**; nel nostro caso, questo significa che il numero cercato *deve dare lo stesso resto del suo cubo quando siano divisi per* **9**.

In pratica, questo avviene solo per le soluzioni dell'equazione (relativa ai resti):

$$r^3 = r \Rightarrow r = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \qquad \textbf{[007.011]}$$

Quindi, gli unici interi che soddisfano alla condizione sono (divisi per classi di resto):

$$\begin{array}{rrr} 1 & & \\ 8 & 9 & 10 \\ 17 & 18 & 19 \\ 26 & 27 & 28 \\ 35 & 36 & 37 \end{array} \qquad \textbf{[007.012]}$$

E, di questi, solo gli interi seguenti soddisfano le condizioni del problema:

$$\begin{array}{ll} 1 & \left(1^3 = 1\right) \\ 8 & \left(8^3 = 512\right) \\ 17 & \left(17^3 = 4193\right) \\ 18 & \left(18^3 = 5832\right) \\ 26 & \left(26^3 = 17576\right) \\ 27 & \left(27^3 = 19683\right) \end{array} \qquad \textbf{[007.013]}$$

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Metallika!

Dunque, questa volta parliamo delle Ombrellifere[12].

Lasciate che vi presenti la Famiglia delle Sezioni Metalliche. I suoi membri hanno, tra le altre caratteristiche, la proprieta` di avere dei nomi derivati da un metallo, come la Sezione Aurea, la Sezione Argentea, la Sezione Bronzea (OK, e` una lega... le ha trovate un matematico, non un chimico) e svariate altre. La Sezione Aurea e` stata utilizzata innumerevoli volte per scrivere musica, scolpire statue, dipingere quadri o progettare templi e palazzi. I parenti della Sezione Aurea sono stati utilizzati da alcuni fisici per spiegare il comportamento dei sistemi dinamici non lineari che passano alla quasi-periodicita`, e recentemente e` stato dimostrato che, cosi` come i greci ritenevano la Sezione Aurea la proporzione piu` gradevole alla vista, i romani preferivano la Sezione Argentea.

[12] C'e` un botanico in sala? L'intenzione e` di generalizzare il prezzemolo, studiandone l'intera famiglia.

Cominciamo con calma, che dopo un'arringa del genere mi manca un po` il fiato.

Voglio sperare vi ricordiate la generazione della ***Serie di Fibonacci***:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1)$$

La Serie (secondaria) di Fibonacci puo` essere generalizzata utilizzando due numeri (interi positivi) ***p*** e ***q*** in modo tale che

$$G(n+1) = pG(n) + qG(n-1) \qquad \textbf{[001]}$$

Dalla **[001]** possiamo ricavare:

$$\frac{G(n+1)}{G(n)} = p + q * \frac{G(n-1)}{G(n)} = p + \frac{q}{\frac{G(n)}{G(n-1)}} \qquad \textbf{[002]}$$

Supponiamo esista il limite per $n \to \infty$ del termine a primo membro, ossia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} \overset{\cdot\cdot}{=} x \qquad \textbf{[003]}$$

Dove l'uguale tripuntato significa, come detto tempo fa, uguale per definizione.

Allora, andando a sostituire ***x*** nell'uguaglianza tra primo e terzo membro della **[002]**, si ha:

$$x = p + \frac{q}{x} \qquad [004]$$

Che si risolve come:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \qquad \textbf{[005]}$$

(Siccome la successione delle ***G*** e` ***crescente***, si ignora la soluzione negativa).

Non so quanti di voi si sono accorti che vi ho fatto passare sotto il naso una cosa assolutamente indimostrata; ***chi ci garantisce esista il limite*** **[003]**?

In effetti, la cosa e` un po` complessa, ma (trovo) piuttosto carina; se pero` vi fidate della mia affermazione, saltate la parte indentata.

Teorema: Se $G(n+1) = pG(n) + qG(n-1)$, con $p, q \in N$, allora esiste ed e` unico $\lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = s$ e si ha $s \in \Re^+$.

Dimostrazione

Per trovare un'espressione del termine ***n***-esimo, riscriviamo la nostra espressione in funzione di $H(n+1) \overset{\cdot\cdot}{=} G(n)$; abbiamo $G(n+1) = pG(n) + qH(n)$ o, introducendo le matrici

$$\overline{G(n+1)} = \begin{pmatrix} G(n) \\ H(n) \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere:

$$\overline{G(n+1)} = A * \overline{G(n)} \qquad \textbf{[006]}$$

Che equivale a:

$$\begin{pmatrix} G(n+1) \\ G(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} G(n) \\ G(n-1) \end{pmatrix} \qquad \textbf{[007]}$$

E, se ***G(0)=G(1)=1***, e` facile ricavare che:

$$\overline{G(n+1)} = A^n * \overline{G(1)} \qquad \textbf{[008]}$$

Attenzione che qui ***G*** e` soprasegnato, quindi e` una matrice; dall'assunzione fatta prima e dalla definizione,si ha che $\overline{G(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

...E quindi dobbiamo trovare la potenza ***n***-esima di ***A***. Diagonalizziamo **[009]** attraverso gli autovalori **[010]**, cambiamo di base con **[011]** e applichiamo la relazione di similarita` **[012]**:

$$\begin{pmatrix} p-l & q \\ 1 & -l \end{pmatrix} = l^2 - pl - q = 0 \qquad \textbf{[009]}$$

$$\begin{cases} s_1 = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \\ s_2 = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{cases} \Rightarrow A_d = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[010]}$$

$$P = \begin{pmatrix} s & s_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \left(\quad {}_d P \quad \right)^n = PA_d^{\;n} \quad {}^{-1} = P \begin{pmatrix} {}_1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}^n P^{-1} \qquad \textbf{[012]}$$

(Uffa! Quasi finito, tranquilli...)

$$A \quad = \frac{}{{}_1 \quad s} * \begin{pmatrix} {}_1^{\,n} & s_2 & {}_1 s \left({}_2^{\,n} - s \right) \\ {}_1^{\,n} & s & {}_1 s \left({}_2^{\,n} - s_1 \right) \end{pmatrix}$$

Aurea... comunque, ci porta alla espressione di :

$$G(n+1) = \frac{1}{s_1 - s_2} * \left(s_1^{\,n+1}(1 - s_2) - s_2^{\,n+1}(1 - s_1) \right) \qquad \textbf{[014]}$$

Effettuando la sostituzione:

$$\begin{cases} s_1 - s_2 = \sqrt{p^2 - 4q} \\ s_2 = -\dfrac{q}{s_1} \end{cases} \qquad \textbf{[015]}$$

Si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G(n+1)}{G(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_1^{\,n+1}+\left(-\frac{q}{s_1}\right)^{n+1}}{s_1^{\,n}+\left(-\frac{q}{s_1}\right)^{n}}=s_1 \qquad \textbf{[016]}$$

Come volevasi dimostrare[13]

Ora, si definisce *Famiglia delle Sezione Metalliche* **l'insieme degli autovalori positivi dell'equazione matriciale:**

$$\begin{pmatrix}G(n+1)\\G(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q\\1 & o\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}G(n)\\G(n-1)\end{pmatrix} \qquad \textbf{[017]}$$

per ***p*** e ***q*** numeri naturali.

Tutti i membri di questa famiglia sono dei numeri irrazionali e sono le soluzioni positive delle equazioni:

$$x^2-px-q=0 \qquad \textbf{[018]}$$

Ora, per ***p=q=1*** abbiamo la Sezione Aurea che (dovreste ricordare) si espande in ***frazione continua*** come:

$$x=\frac{1}{x}\Rightarrow x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}\doteqdot[1;1,1,\ldots]=[\bar{1}]\doteqdot f \qquad \textbf{[019]}$$

(Se trovate in Formula Editor un modo migliore per scrivere "uguale per definizione", fatemelo sapere...)

Ora, possiamo ***definire*** una serie di altre sezioni; se fate un po` di conti[14]:

p	***q***	**Metallo**	**Espressione**	**Frazione Continua**	**Commento**
1	1	Oro	$s_{Au}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$[\bar{1}]$	E`, in assoluto, la frazione continua a convergenza ***piu` lenta*** di tutte
2	1	Argento	$s_{Ag}=\frac{2+\sqrt{8}}{2}$	$[\bar{2}]$	Si comincia a intravedere un *pattern*?
3	1	Bronzo	$s_{Br}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$[\bar{3}]$	Si, e` una lega, quello non e` il simbolo chimico... Consultate la Borsa dei metalli per sapere come chiamare le prossime.

[13] La cosa e` valida anche per le serie in cui i primi due termini sono diversi da ***1***; ve la risparmio...

[14] Posto che non vi ricordiate come si sviluppa una radice in frazione continua, provate a scavare nel cestino della carta straccia sin quando non ritrovate il numero 16 di RM (maggio 2000): li` abbiamo parlato di come fare e abbiamo detto (senza dimostrarlo) che lo sviluppo e` sempre periodico con il periodo simmetrico rispetto al suo centro tranne l'ultima cifra che e` pari al doppio dell'antiperiodo meno uno (se questa vi sembra cabalistica, aspettate a vedere cosa succede dopo...).

4	1	Nikel	$s_{Ni} = 2 + \sqrt{5}$	$\left[\overline{4}\right]$	Cosina divertente... E` uguale al ***cubo*** della Sezione Aurea.

...e avanti cosi`.

Voglio sperare abbiate ormai individuato il *pattern* tra ***p*** e la frazione continua e siate in grado di andare avanti da soli. Siccome la notazione "per metalli" non mi piace (non e` molto coerente), d'ora in avanti indichiamo i nostri valori di convergenza come s_p^q (si vede? Pedice ***p*** e apice ***q***) e proviamo a complicarci la vita; tanto per cominciare, proviamo a vedere cosa succede partendo dall'equazione

$$x^2 - x - q = 0 \qquad \textbf{[020]}$$

Ossia mettiamo ***p=1*** e vediamo cosa succede se varia ***q***.

Spero ci arriviate da soli al fatto che per ***q=1*** abbiamo sempre la Sezione Aurea.

La prima stranezza salta fuori per ***q=2***, che ci costringe (giusto per continuare ad usare le frazioni continue) ad inventarci una notazione che non e` proprio una meraviglia (nota come la Sezione Cuprea -sarebbe il rame):

$$s_1^2 = 2 \doteqdot \left[2, \overline{0}\right] \qquad \textbf{[021]}$$

p	*q*	***Frazione***
1	1	$\left[1, \overline{1}\right]$
1	2	$\left[2, \overline{0}\right]$
1	3	$\left[2, \overline{3}\right]$
1	4	$\left[2, \overline{1,1,3}\right]$
1	5	$\left[2, \overline{1,3}\right]$
1	6	$\left[3, \overline{0}\right]$
1	7	$\left[3, \overline{5}\right]$
1	8	$\left[3, \overline{2,1,2,5}\right]$
1	9	$\left[3, \overline{1,1,5}\right]$
1	10	$\left[3, \overline{1,2,2,1,5}\right]$
1	11	$\left[3, \overline{1,5}\right]$
1	12	$\left[4, \overline{0}\right]$

Se (come me) pensate che sia una notazione fetente, aspettate a vedere gli altri. Provate ad andare un po` avanti, ottenete una (non) graziosa tabellina del tipo mostrato qui da qualche parte.

Posto che riusciate a trovare una struttura semplice qui di fianco non vi promettiamo la Medaglia Fields, ma un paio di birre potremmo anche offrirvele. La cosa piu` seccante e` che "sembra" esserci qualche schema; ad esempio:

- Prendete quelle con la parte periodica pari a zero; tra la prima (2) e la seconda (6) ci sono ***tre*** equazioni, tra la seconda (6) e la terza (12) ci sono ***cinque*** equazioni, tra la terza (12) e la quarta (20) ci sono ***sette*** equazioni, tra la quarta (20) e la quinta (30) ce ne sono ***nove***...
- Se considerate la parte intera di quelli con parte periodica diversa da zero, ne trovate ***tre*** che iniziano con due, ***cinque*** che iniziano con tre, ***sette*** che inizano con quattro, ***nove*** che iniziano con cinque...
- Quelle precedenti un'espressione intera hanno il periodo di lunghezza 2 iniziante con ***1***; l'altro valore e`, nell'ordine, ***tre***, ***cinque***, ***sette***, ***nove***...
- Quelle successive un'espressione intera hanno il periodo di lunghezza 1 che vale ***tre***, ***cinque***, ***sette***, ***nove***...

Insomma, parentele con la sequenza dei dispari... peccato che piu` in la` non si vada (nel senso che nessuno ha dimostrato niente).

Beh, qualcuno ha un'idea?

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms