Rudi Mathematici

Numero 022 - 2000-11

1. Editoriale

Grandi notizie! C e` un nuovo solutore! Si chiama Marco ed ha mandato le soluzioni del numero 20. La cosa, in se`, ci fa molto piacere (un po` meno conoscendo i retroscena: auguri di pronta guarigione) e speriamo continui. Nella parte relativa alle soluzioni parliamo ancora di lui, qui volevo solo citare un pezzo della sua lettera:

...mi congratulo con la redazione, gli autori, gli editori, l impaginatore, il correttore di bozze, l addetto alla distribuzione ed anche come il marketing... [1].

Ringraziamo sentitamente e attendiamo fiduciosi altre soluzioni, sperando di non dover ricorrere per ogni numero a metodi cosi` drastici per far si` che vi diate da fare...

Attenti alla nebbia.

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

[1] Alice, Piotr, inutile che cerchiate di arrossire...Sta parlando di ***ME***! (*R.d A.)*

2. Problemi

2.1 Un problema terra-terra

..In qualunque senso vogliate intendere la frase.

Supponiamo (per semplicita`) una Terra perfettamente sferica con raggio dalle parti dei 6,400 Km, se non sbaglio e (per conservazione) ricoperta esattamente da una custodia di plastica: rotonda, che ci sta giusta giusta, e non stiamo a chiederci come abbiamo fatto a metterla dentro.

Alla suddetta custodia (che contiene evidentemente il volume della Terra), viene aggiunto un pezzo di plastica di un metro quadro tale che, con buona pace di Banach-Tarski, il risultato e` ancora una copertura sferica.

Domanda: di quanto aumenta il volume della custodia ? E il raggio?

2.2 Un po` meno terra-terra

Se avete creduto al problema prima, questo dovreste digerirlo senza problemi.

Questa volta, alla terra perfettamente sferica, ci limitiamo a mettere una cintura (insomma, un cerchio massimo...) e quindi aggiungiamo alla suddetta cintura ***6*** metri. A questo punto, mettiamo un dito sotto la cintura e tiriamo su (come quando volete far vedere quanto siete dimagriti mangiando chantilly...).

Bene, di quanto dobbiamo alzare?

Giusto un paio di notazioni: per prima cosa, non e` facile come sembra. Seconda cosa, quando arrivate all ultimo passaggio, OK, Excel. Io, pero`, l ho usato solo per verifica: se volete provarci...

3. Soluzioni e Note

3.1 [018]

3.1.1 Boh?!

Era duretto, lo ammetto, e anche non molto carino se non per i teorici

Supponiamo ***N*** sia il numero cercato e ***R*** il risultato.

Possiamo definire ricorsivamente ***R*** come:

$$R = N^R$$

Da cui, prendendo il logaritmo e facendo un po` di calcolacci:

$$\ln R = R * \ln N$$

$$\ln N = \frac{\ln R}{R}$$

$$N = R^{\frac{1}{R}}$$

Ora, il massimo di ***N*** rispetto ad ***R*** risulta dalla condizione:

$$\frac{\partial N}{\partial R} = \frac{1 - \ln R}{R^2} = 0$$

Eguagliando a zero il numeratore, risulta ***R=e***; se non vi fidate del fatto che e` un massimo,

$$\left.\frac{\partial^2 N}{\partial R^2}\right|_{R=e} = \left.\frac{2*\ln R-3}{R^2}\right|_{R=e} = -\frac{1}{e^2}$$

Che e` minore di zero. Quindi e` un massimo. Allora, ***R*** e` finito per il valore:

$$N = \left. R^{\frac{1}{R}} \right|_{R=e} = e^{\frac{1}{e}}$$

3.2 [020]

Giusto una noterella sulle soluzioni di Marco: ha risolto il Gioco da ragazzi (soluzione completa, anche se non dimostrata). Per il secondo problemino, pero`...

3.2.1 Attenti alle parole

L analisi fatta da Marco e` corretta (come quella di Luca, vista nell altro numero); il risultato e` solo un po` piu` piccolo, in quanto ha perso per strada la prima configurazione: mancavano al computo, quindi, 2880 configurazioni. Non preoccuparti, Marco: quando lo hanno fatto a me, ne ho dimenticate *tre* (dell ultimo tipo...).

3.3 [021]

3.3.1 Due fabbri

Luca!

Man, questo mi ha tenuto impegnato per un paio di sere, facendomi pure arrivare tardi in ufficio una mattina. Indico con il pedice A il primo fabbro e con B il secondo. Calcolo il periodo con cui i 2 fabbri battono i colpi:

$$T_A = \frac{7\cdot 60}{12} = 35\sec = \frac{595}{17}\sec$$
$$T_B = \frac{9\cdot 60}{17} = \frac{540}{17}\sec \approx 31.76\sec$$

Poiché i due fabbri tengono il ritmo solo per mezz ora (ovvero 1800sec), dobbiamo considerare per il primo fabbro al massimo $N_A = 52$ colpi (da 0 a 51), per il secondo $N_B = 57$ colpi (da 0 a 56).

Definisco due serie **a** *e* **b** *in cui i singoli elementi corrispondono al tempo in secondi in cui i rispettivamente il primo ed il secondo fabbro battono i colpi, assumendo 0 il tempo del primo colpo (hanno iniziato assieme per cui $a_0 = b_0 = 0$). In pratica:*

$$a_k = \{0, T_A, 2\cdot T_A, \ldots, 51\cdot T_A\}$$
$$b_k = \{0, T_B, 2\cdot T_B, \ldots, 56\cdot T_B\}$$

Per determinare i colpi più vicini, definisco una generica funzione $d_k(n)$ che calcola la distanza tra a_n e $b_{(n+k)}$:

$$d_k(n) = a_n - b_{n-k} = n\cdot T_A - (n+k)\cdot T_B = n\cdot \Delta T - k\cdot T_B$$

dove ovviamente $DT = T_A - T_B$. Mantenendo constante k e derivando per n la funzione $d_k(n)$ si nota che la derivata è costante per cui $d_k(n)$ è sempre crescente. Quindi i valori minimi di $d_k(n)$ saranno quelli in corrispondenza del cambio di segno; infatti tranne $d_0(n)$ che è *nulla per $n = 0$ e poi positiva, " $k > 0$, le funzioni $d_k(n)$ sono negative per n piccoli, positive per n grandi. Non serve prendere in considerazione k negativi, poiché essendo $T_A > T_B$, preso un generico a_n, l elemento b_m più vicino a a_n avrà m ³ n (si vede disegnando i punti su una retta).*

Ponendo $d_k(n)$ uguale a zero possiamo trovare il valore di n per cui la distanza tra i due colpi sarebbe nulla (dico sarebbe perché il valore di n trovato in questo modo appartiene ai numeri reali e non necessariamente a quelli naturali):

$$n = \cdot k \cdot \frac{T_B}{\Delta T} = k \cdot \frac{540}{17} \cdot \frac{17}{55} = \frac{108}{11} \cdot k = \left(9 + \frac{9}{11}\right)k$$

$$n_k = \left\{0; \frac{108}{11}; \frac{216}{11}; \frac{324}{11}; \frac{432}{11}; \frac{540}{11}\right\} = \left\{0; 9 + \frac{9}{11}; 19 + \frac{7}{11}; 29 + \frac{5}{11}; 39 + \frac{3}{11}; 49 + \frac{1}{11}\right\}$$

dove la serie n_k raccoglie i risultati dell equazione per k che varia da 0 a 5 (non servono altri valori perché nella mezz ora il fabbro A batte al massimo 52 colpi).

In realtà a noi interessano solo valori interi, ovvero dovremmo usare $\mathrm{n}_k = n_k - e_k$, dove n_k appartiene ai numeri naturali. Sostituendo n_k nella funzione $d_k(n)$ otteniamo:

$$d_k(\mathrm{n}_k) = \mathrm{n}_k \cdot \Delta T - k \cdot T_B = (n_k - e_k) \cdot \Delta T - k \cdot T_B = n_k \cdot \Delta T - k \cdot T_B - e_k \cdot T_B$$

Ma per la definizione di n_k i primi due addendi del risultato si annullano, quindi:

$$d_k(\mathrm{n}_k) = -e_k \cdot T_B$$

da cui si vede che la distanza tra i due punti più vicini delle due serie è direttamente proporzionale a e_k che rappresenta la parte semintera dei valori della serie n_k. Volendo minimizzare tale distanza, conviene riscrivere la serie nel seguente modo:

$$n_k = \left\{0; 9 + \frac{9}{11}; 19 + \frac{7}{11}; 29 + \frac{5}{11}; 39 + \frac{3}{11}; 49 + \frac{1}{11}\right\} = \left\{0; 10 - \frac{2}{11}; 20 - \frac{4}{11}; 29 + \frac{5}{11}; 39 + \frac{3}{11}; 49 + \frac{1}{11}\right\}$$

Quindi a parte gli elementi a_0 e b_0 che coincidono, gli elementi più vicini sono nell ordine (ricordando il significato di n_k e k): a_{49} e b_{54} ($|d_5(49)| = 0.294$ sec); a_{10} e b_{11} ($|d_1(10)| = 0.588$ sec); a_{39} e b_{43} ($|d_4(39)| = 0.882$ sec); a_{20} e b_{22} ($|d_2(20)| = 1.176$ sec); a_{29} e b_{32} ($|d_3(29)| = 1.470$ sec).

Perfetto, corretto, formalmente ineccepibile. La mia mammina pero` dice che trovo dei difetti in qualunque cosa. Per non smentirla (la mamma ha sempre ragione), sostengo che *forse* esisteva una strada piu` semplice[2]. Il bello e` che ve lo avevo anche spiegato.

Allora detti ***x*** e ***y*** i colpi rispettivamente del secondo e del primo ***coincidenti*** (prima o poi ce ne saranno), deve essere:

$$x * \frac{12}{7} = y * \frac{17}{9}$$

ossia avro` la coincidenza per:

$$\frac{x}{y} = \frac{119}{108}$$

Che si puo` trasformare in ***frazione continua***:

[2] ...Anche perche` con il metodo di Luca non ci sarei mai arrivato prima del quarto millennio.

$$\frac{x}{y}=1+\frac{11}{108}=1+\frac{1}{108/11}=1+\frac{1}{9+\frac{9}{11}}=1+\frac{1}{9+\frac{1}{11/9}}=1+\frac{1}{9+\frac{1}{1+\frac{2}{9}}}=1+\frac{1}{9+\frac{1}{1+\frac{1}{9/2}}}=$$

$$=1+\frac{1}{9+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}}$$

Le ridotte di questo aggeggio sono:

(1) $[1;]=1$

(2) $[1;9]=\frac{10}{9}$

(3) $[1;9,1]=\frac{11}{10}$

(4) $[1;9,1,4]=\frac{54}{49}$

La ridotta successiva [1;9,1,4,2] e` la coincidenza.

Ora, nella mezz ora di lavoro sincrono, il primo fabbro batte (parentesi di Gauss) un numero di colpi pari a:

$$\left\lfloor \frac{12}{7}*30 \right\rfloor = 51$$

Quindi non potro` utilizzare la coincidenza (che richiede 108 colpi): allora dovro` usare la (4).

Quindi, la massima vicinanza alla coincidenza sara` tra il quarantanovesimo colpo del primo e il cinquantaquattresimo colpo del secondo. Le altre vicinanze sono le altre ridotte (tutte maggiori di quella ottenuta).

Francamente: mi pare piu` semplice...

3.3.2 Il triello

Ciao, Luca! Fortunatamente, questa volta niente equazioni differenziali...

A mio avviso la migliore strategia per ciascuno è di cercare di colpire l avversario (ancora in vita) che ha la migliore mira. Per esempio se B è il primo a sparare, gli converrà cercare di eliminare A e viceversa. Esiste però un eccezione a questa regola: se quando tocca a sparare a C sia A che B sono ancora vivi allora C ha più possibilità di sopravvivere se deliberatamente non cerca di uccidere nessuno.

Ho considerato tutte le permutazioni dell ordine di tiro, assumendole tutte equiprobabili realizzando un grafo rispondente alla strategia sopra indicata. Risulta che la probabilità di A di sopravvivere è 0.3, quella di B 0.178 e quella di C è 0.522.

Quindi, anche se suona piuttosto strano , le maggiori probabilita` di sopravvivenza le ha la schiappa... Luca, per il mio archivio: se lo hai in formato elettronico, mi puoi mandare il grafo? Se e` in cartaceo no, grazie: lo perderei subito.

4. Paraphernalia Mathematica

4.1 Due o tre cose che so su di lui

Il PM di Piotr relativo alla Formula di Eulero mi ha fatto ricordare alcune cose relative a π; utilita`, come sempre, vicina allo zero[3].

Prendiamola alla lontana, ad esempio dall estetica... Sembra il pezzo di Piotr sia piaciuto, quindi, lo considereremo bello . Quello che (forse) pochi di voi ricordano, e` che Piotr non e` il primo a parlare in termini cosi` squisitamente poetici di π; qualcun altro, prima di lui, ci aveva provato: a voi giudicare se il risultato dal punto di vista estetico sia migliore o peggiore.

Qual è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond' elli indige,

tal era io a quella vista nova:
veder voleva come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;

ma non eran da ciò le proprie penne:

Dante, Divina Commedia, Paradiso, Canto XXXIII, vv 133-139

(no, non l ho riletta tutta: mi ricordavo che era verso la fine e ho cominciato dal fondo).

Utilita`: zero. Infatti a cosa serva π lo ricordiamo un po` tutti, soprattutto se ci dicono che c entra anche un cerchio; quello che vorremmo, sarebbe ricordarcelo.

Ai tempi felici nei quali io e Piotr terrorizzavamo matricole e docenti presso un istituto universitario di cui preferiremmo non fare il nome, avevamo lanciato un concorso (solutori zero, come al solito: comincio a pensare sia una maledizione che mi perseguita. Meno male che non faccio il prof, senno` i compiti in classe erano na strage...). Era un giochino del genere:

Voi, quante cifre vi ricordate, di π? Se devo andare a mente, 3.14159 e stop. Per fortuna, ricordo una graziosa frase in inglese:

How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics!

Sir James Jeans

Se contate le lettere di ogni parola, vi salta fuori 314159265358979; a questo punto, basta ricordarsi dove mettere la virgola, ma almeno l ordine di grandezza si spera lo sappiate[4].

Carino, c e` niente in italiano?

Numero delle risposte: zero. Tant e` che il premio ce lo siamo bevuto io e Piotr tre mesi dopo.

---

[3] E` interessante notare che di questo pezzo ho scritto pochissimo.

[4] I piu` affezionati lettori potranno riconoscere nel numero indicato sopra una nostra vecchia conoscenza; in effetti, quando mi serve un numeraccio, uso proprio lui.

Qualche tempo fa, pero`, ho scoperto che una soluzione era stata trovata, addirittura *prima del lancio del concorso!* Ammettetelo, non e` da poco... Credo il testo vi permetta, con sufficiente approssimazione, di individuare l epoca:

> *Ave o Roma, o madre gagliarda di latine virtu` che tanto luminoso splendore prodiga spargesti con la tua saggezza*

Se non ci arrivate da soli, risale (suppergiu`) al 1936[5].

I cugini d Oltralpe (rispetto a qui-ora, quantomeno) non sono stati inoperosi:

Que j'aime a faire apprendre un nombre utile aux sages.
Glorieux Archimede, artiste ingenieux !
Toi, de qui Syracuse, aime encore la gloire,
Soit ton nom conserve par de savants grimoires.
Jadis, mysterieux, un probleme existait.
Tout l'admirable procede (l'oeuvre etonnante !)
Que Pythagore decouvrit aux anciens Grecs :
O quadrature ! Vieux tourment du philosophe ! Sibylline rondeur !
Trop longtemps vous avez defie Pythagore et ses imitateurs !
Comment integrer l'espace plan circulaire ?
Thales tu tomberas ! Platon tu desesperes !
Apparait Archimede :
Archimede inscrira dedans un hexagone :
Appreciera son aire fonction du rayon ;
Pas trop ne s'y tiendra !
Dedoublera chaque element anterieur,
Toujours de l'orbe calculee approchera ;
Laquelle limite donne l'arc,
La longueur de cet inquietant cercle,
Ennemi trop rebelle !
Professeur, enseignez son probleme avec zele ...

...che fanno 127 cifre; sorry for my french (nel senso che mancano gli accenti).

Il record, comunque, viene dalla Perfida Albione (o meglio, dagli States); bisogna solo fare attenzione ad un paio di cose:

1. se una parola e` di (ad esempio) 12 lettere, va intesa come un 1 seguito da un 2
2. vanno contati anche l autore (falso) e il titolo, scritti cosi` come sono

...ve la scrivo piccola, altrimenti non ci stiamo proprio:

Poe, E. - Near A Raven
Midnights so dreary, tired and weary.
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.
During my rather long nap - the weirdest tap!
An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor.
"This", I whispered quietly, "I ignore".

Perfectly, the intellect remembers: the ghostly fires, a glittering ember.

---

[5] Non vorrei che gli *e-fan* (cioe` i fanatici di e) si sentissero esclusi... nello stesso aureo libretto ho trovato questa:

Ai modesti o vanitosi,
Ai violenti o timorosi
Vo cantando, gaio ritmo,
Logaritmo!

Inflamed by lightning's outbursts, windows cast penumbras upon this floor.
Sorrowful, as one mistreated, unhappy thoughts I heeded:
That inimitable lesson in elegance - Lenore -
Is delighting, exciting...nevermore.

Ominously, curtains parted (my serenity outsmarted),
And fear overcame my being - the fear of "forevermore".
Fearful foreboding abided, selfish sentiment confided,
As I said, "Methinks mysterious traveler knocks afore.
A man is visiting, of age threescore."

Taking little time, briskly addressing something: "Sir," (robustly)
"Tell what source originates clamorous noise afore?
Disturbing sleep unkindly, is it you a-tapping, so slyly?
Why, devil incarnate!--" Here completely unveiled I my antedoor--
Just darkness, I ascertained - nothing more.

While surrounded by darkness then, I persevered to clearly
comprehend.
I perceived the weirdest dream...of everlasting "nevermores".
Quite, quite, quick nocturnal doubts fled - such relief! - as my
intellect said,
(Desiring, imagining still) that perchance the apparition was
uttering a whispered "Lenore".
This only, as evermore.

Silently, I reinforced, remaining anxious, quite scared, afraid,
While intrusive tap did then come thrice - O, so stronger than sounded afore.
"Surely" (said silently) "it was the banging, clanging window lattice."
Glancing out, I quaked, upset by horrors hereinbefore,
Perceiving: a "nevermore".

Completely disturbed, I said, "Utter, please, what prevails ahead.
Repose, relief, cessation, or but more dreary 'nevermores'?"
The bird intruded thence - O, irritation ever since! -
Then sat on Pallas' pallid bust, watching me (I sat not, therefore),
And stated "nevermores".

Bemused by raven's dissonance, my soul exclaimed, "I seek intelligence;
Explain thy purpose, or soon cease intoning forlorn 'nevermores'!"
"Nevermores", winged corvus proclaimed - thusly was a raven named?
Actually maintain a surname, upon Pluvious seashore?
I heard an oppressive "nevermore".

My sentiments extremely pained, to perceive an utterance so plain,
Most interested, mystified, a meaning I hoped for.
"Surely," said the raven's watcher, "separate discourse is wiser.
Therefore, liberation I'll obtain, retreating heretofore -
Eliminating all the 'nevermores' ".

Still, the detestable raven just remained, unmoving, on sculptured bust.
Always saying "never" (by a red chamber's door).

A poor, tender heartache maven - a sorrowful bird - a raven!
O, I wished thoroughly, forthwith, that he'd fly heretofore.
Still sitting, he recited "nevermores".

The raven's dirge induced alarm - "nevermore" quite wearisome.
I meditated: "Might its utterances summarize of a calamity before?"
O, a sadness was manifest - a sorrowful cry of unrest;
"O," I thought sincerely, "it's a melancholy great - furthermore,
Removing doubt, this explains 'nevermores' ".

Seizing just that moment to sit - closely, carefully, advancing beside it,
Sinking down, intrigued, where velvet cushion lay afore.
A creature, midnight-black, watched there - it studied my soul, unawares.
Wherefore, explanations my insight entreated for.
Silently, I pondered the "nevermores".

"Disentangle, nefarious bird! Disengage - I am disturbed!"
Intently its eye burned, raising the cry within my core.
"That delectable Lenore - whose velvet pillow this was, heretofore,
Departed thence, unsettling my consciousness therefore.
She's returning - that maiden - aye, nevermore."

Since, to me, that thought was madness, I renounced continuing sadness.
Continuing on, I soundly, adamantly forswore:
"Wretch," (addressing blackbird only) "fly swiftly - emancipate me!"

"Respite, respite, detestable raven - and discharge me, I implore!"
A ghostly answer of: "nevermore".

" 'Tis a prophet? Wraith? Strange devil? Or the ultimate evil?"
"Answer, tempter-sent creature!", I inquired, like before.
"Forlorn, though firmly undaunted, with 'nevermores' quite indoctrinated,
Is everything depressing, generating great sorrow evermore?
I am subdued!", I then swore.

In answer, the raven turned - relentless distress it spurned.
"Comfort, surcease, quiet, silence!" - pleaded I for.
"Will my (abusive raven!) sorrows persist unabated?
Nevermore Lenore respondeth?", adamantly I encored.
The appeal was ignored.

"O, satanic inferno's denizen -- go!", I said boldly, standing then.

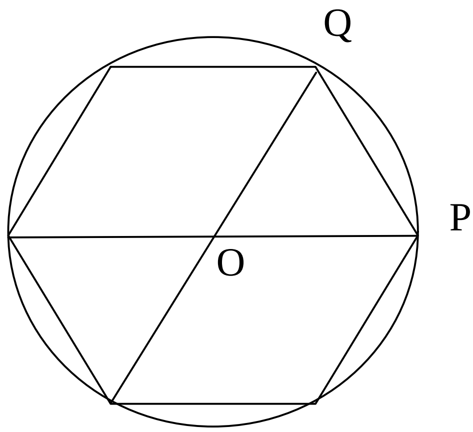
"Take henceforth loathsome "nevermores" - O, to an ugly Plutonian shore!
Let nary one expression, O bird, remain still here, replacing mirth.

Promptly leave and retreat!", I resolutely swore.
Blackbird's riposte: "nevermore".

So he sitteth, observing always, perching ominously on these doorways.
Squatting on the stony bust so untroubled, O therefore.
Suffering stark raven's conversings, so I am condemned, subserving,
To a nightmare cursed, containing miseries galore.
Thus henceforth, I'll rise (from a darkness, a grave) -- nevermore!

Cosa ne dite? ***Settecentoquaranta*** cifre... e, mi dicono, rispetta anche la metrica e i contenuti dell originale di Poe (non so, non l ho mai letta). Non so chi sia l autore di questo capolavoro, ma se lo trovate trasmettegli tutta la mia ammirazione.

La prima volta che ho visto un prof in crisi e` stato quando mi ha spiegato il treequattordici e io gli ho detto: Non ci credo! . Dei vari metodi per calcolare π, credo il piu` divertente sia quello (dicono) utilizzato da Pitagora; anche questo, ottimo per le riunioni noiose.



Partiamo (e` piu` semplice) da un ***esagono inscritto***; spero vi ricorderete che il lato dell esagono e` uguale al raggio.

Se a questo punto consideriamo l esagono come approssimazione del cerchio, il valore della circonferenza ci risulta pari a ***6*** volte il raggio, ovverossia in prima approssimazione ***p=3***. Non lamentatevi, gli Egizi ci hanno costruito le piramidi, con questo valore.

E` gia` una buona approssimazione, ma vorremmo qualcosa di meglio... Beh, basta chiedere. Sempre partendo dallo stesso aggeggio, bisechiamo l angolo $Q\hat{O}P$; sia l intersezione della bisettrice con ***QP*** in ***M*** e l intersezione con cerchio ***R***; mi pare piuttosto evidente che ***QR*** e ***RP*** sono due lati di un dodecagono regolare, che rappresenta un approssimazione migliore della nostra circonferenza. In pratica, salta fuori una robetta del genere di quella indicata nella figura dopo.

A questo punto, visto che vi ho gia` detto che il colpevole e` Pitagora:

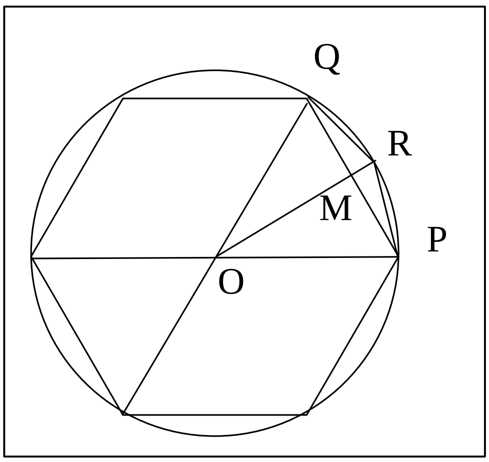
$$MR = OP - OM =$$

$$= OP - \sqrt{OP^2 - \left(\frac{OP}{2}\right)^2}$$

Ossia

$$RP = \sqrt{MR^2 + \left(\frac{OP}{2}\right)^2}$$

...che non e` altro che il lato del dodecagono**.**



Ciclando, ottenete dei valori di π sempre approssimati ***per difetto***.

Insomma, se ***s*** e` la sagitta (che sarebbe ***MR***: una volta, era una funzione trigonometrica a tutti gli effetti), ***l*** e` il lato, considerato che il raggio e` uguale al primo lato posto per comodita` uguale a 1, si ciclano le due formule:

$$s = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \qquad l = \sqrt{s^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

..e avanti cosi` sino a fine riunione.

Certo, con Excel ci vuole un attimo...

Agono	Sagitta	Lato	Semicirconferenza
6	(non serve...)	1,00000000000000	3,0000000000000
12	0,13397459621556	0,51763809020504	3,1058285412302
24	0,03407417371093	0,26105238444010	3,1326286132812
48	0,00855513862619	0,13080625846029	3,1393502030468
96	0,00214107676140	0,06543816564355	3,1410319508905
192	0,00053541252363	0,03272346325297	3,1414524722854
384	0,00013386209044	0,01636227920787	3,1415576079118
768	0,00003346608260	0,00818120805247	3,1415838921483
1536	0,00000836655565	0,00409061258233	3,1415904632280
3072	0,00000209164110	0,00204530736068	3,1415921059992
6144	0,00000052291041	0,00102265381403	3,1415925166921
12288	0,00000013072761	0,00051132692372	3,1415926193653
24576	0,00000003268190	0,00025566346395	3,1415926450336
49152	0,00000000817048	0,00012783173224	3,1415926514507
98304	0,00000000204262	0,00006391586615	3,1415926530550
196608	0,00000000051065	0,00003195793308	3,1415926534561
393216	0,00000000012766	0,00001597896654	3,1415926535563
786432	0,00000000003192	0,00000798948327	3,1415926535814
1572864	0,00000000000798	0,00000399474164	3,1415926535877
3145728	0,00000000000199	0,00000199737082	3,1415926535892
6291456	0,00000000000050	0,00000099868541	3,1415926535896
12582912	0,00000000000012	0,00000049934270	3,1415926535897

Gia`, pero` oltre questo non va. Notate che, con la frase di Jeans, Ne so una piu` di Excel ...

Fa freddo, piove e ho le pile scariche (pessimismo novembrino...)

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms