Rudi Mathematici

Numero 008.doc - 1999-09

1. Editoriale

Secondo i miei calcoli, dovrebbe essere Settembre, mese particolarmente adatto (dopo le fatiche estive) al pensiero matematico.

Da voi non mi aspetto neppure vi accorgiate che ho cambiato il logo; carino, vero? Ho pensato a lungo (20 secondi, in ferie) quale fosse il migliore, in dubbio tra l'ageometretos di casa di Piotr e questo; io preferisco questo, ed essendo io direttore, editore, stampatore e dittatore di questa rivista, e` questo. Nel caso vi stiate chiedendo "...Hey, ma non e`...", si, e` proprio quello; la piu` grossa bufala della storia della matematica. Tra le altre cose, a breve diventera` il mio "ex libris". Onde non ingenerare confusione, il nodo borromeo di Penrose che si trova all'interno verra` sostituito da una cosa che ho gia` in mente ma che ci vuole un mucchio di tempo per renderla bene. Vi spiegherei cos'e`, ma...

Inoltre, vi chiederete (maqquandomai...) "Cos'hai fatto di bello durante le ferie?" Semplice; mi sono applicato a due problemi che non ce la farete mai a risolvere. Il primo e` gia` qui, per la gioia delle vostre meningi.

Bibite!

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

English Version is powered by *Alice Riddle*

2. Problemi

Come promesso, il problema "tosto" delle ferie. Ammetto che la formulazione e` una schifezza; una volta tanto, oltre alla soluzione potreste provare anche a fornire un problema (almeno la formulazione...). Tanto, non ci riuscite a risolverlo.

2.1 In coda a teatro

Davanti al teatro, c'e` il solito mucchio di gente per fare il biglietto. Nel tentativo di mettere ordine (e colto da improvvisa follia), l'impresario fa questo strano discorso.

"Oggi, diamo un biglietto gratis. Le persone che entrano per fare il biglietto sono pregate di comunicare la loro data di nascita alla cassa (giorno-mese); l'ingresso gratuito andra` alla prima persona nata lo stesso giorno di una persona gia` entrata".

Supponendo possiate decidere la vostra posizione nella coda, dove massimizzate le vostre probabilita` di avere il biglietto gratis?

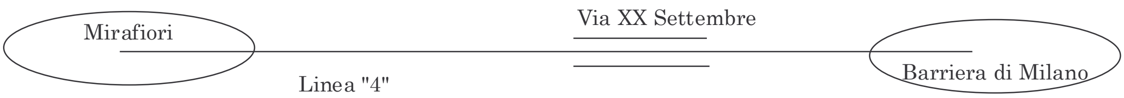
Provo a spiegarmi meglio: per entrare gratis, le persone davanti a voi devono essere nate tutte in giorni diversi e uno deve essere nato lo stesso giorno vostro.

Siccome ci sono delle signore, l'anno non conta: solo il giorno e il mese.

2.2 La bionda o la bruna?

Come molti di voi (quattro) sanno, abito a Torino, citta` molto stimolante dal punto di vista matematico in quanto, con le vie perpendicolari e parallele, vi trovate il piano cartesiano gia` fatto. Non pensate che questo sia un segno di monotonia; e` l'unica citta` che, del proprio Santo Patrono, conservi tre femori (vero).

Per gli alieni, facciamo una veloce piantina:



Se volete saperne di piu`, ditemelo e vi porto a fare un giro turistico.

Allora, il nostro eroe abita in via XX Settembre (carico di soldi: una casa li` costa un occhio) e conosce due ragazze, una bionda (che risiede a Mirafiori) e una bruna (che ha eletto domicilio in Barriera di Milano). Siccome non sa decidersi quale preferisca, si affida al caso: visto che il "4" passa sotto casa (in entrambi i sensi) ed e` ugualmente comodo per raggiungere una qualunque delle due, quando scende in strada (a varie ore del giorno e della notte) prende il primo che passa e va a trovare la squinzia all'estremo opportuno; i tram passano ogni dieci minuti, in entrambe le direzioni e quindi, essendo gli arrivi del Nostro casuali, entrambe le giovinette hanno la stessa probabilita` di gioire della sua compagnia.

Dopo un po`, si accorge che, nove volte su dieci, esce con la bionda. Perche`?

Se pensate di provare col metodo pratico, vi conviene fare un giro in due zone relativamente vicine alla linea del "4"; vedrete un certo numero di chiese e un ugual numero di facciate di chiese (e questo succede un po` dappertutto). Avrete pero` l'occasione unica di vedere *una chiesa senza facciata* e, successivamente, *una facciata senza chiesa.* Qualche conoscitore di Torino sa quali sono?

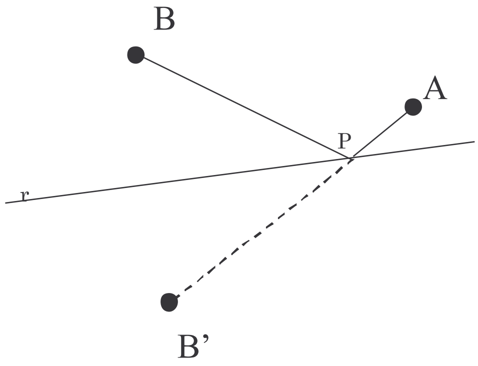
3. Soluzioni & Note

3.1 [007]

3.1.1 "Quando torni, prendi l'acqua!"

...Devo riconoscere che era facile...In realta`, si tratta del *Problema di Erone* relativo alla riflessione, che dimostra le proprieta` estremali dei raggi luminosi. Qualcuno sostiene che la luce e` quello che e` perche` sceglie sempre la via piu` breve, in base al Principio di Minima Azione di Mach... Scusate, questo era il pezzo per i *Rudi Metaphisici* (ma il Principio di Minima Azione, e` correlato al Teorema della Massima Pigrizia?).

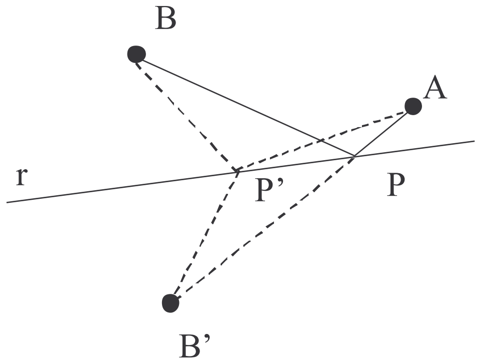
Dunque, supponiamo di "riflettere" **B** rispetto al fiume, e tracciamo la congiungente da questo punto (**B'**) con **A** (disegnino!):



Sia **P** il punto di incontro con la riva del fiume (no, non vado al centro del fiume a prendere l'acqua! Mi basta la riva!). Si noti che l'angolo **BPr** e` uguale all'angolo **rPB'** per costruzione (ed e` anche uguale a **APr**).

Quello che dobbiamo dimostrare e` che **BPA** e` il cammino minimo.

Supponiamo non sia vero, e che esista quindi un altro punto **P'** diverso da **P** per cui il cammino sia minimo. Da figura:

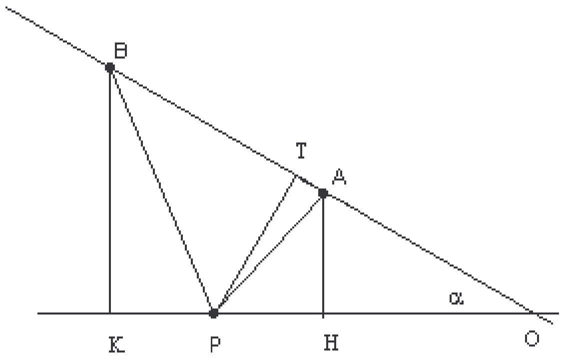


si vede che deve essere **BP'+P'A < BP+PA**.

Essendo pero` per costruzione **BP'=B'P'** e, per lo stesso motivo, **BPA=B'PA**, deve valere la diseguaglianza **B'PA < B'P'+P'A** (vera per tutti i triangoli). Quindi, la via piu` breve e` quella per cui **B'PA** e` una retta. Q.E.D.

Questa era la soluzione "semplice", che mi aspettavo da voi; come detto in uno dei primi numeri, c'e` gente che si diverte a complicare le cose (ciao Fran!)... Cito dalla sua risposta:

Facciamo un disegnino (sperando che semplifichi):



Allora, il malcapitato con il secchio si trova in B, deve portare l'acqua in A e il fiume scorre con la riva più vicina rappresentata dalla retta OP.

Dato che la linea retta nella nostra geometria euclidea è la strada più breve per andare ovunque, il percorso per prendere l'acqua e tornare sarà costituito da due segmenti, verso un punto del bordo del fiume (P) e ritorno su A.

Sono dati noti:

$OA=l$

$AOP=\alpha$

$OB=d$

Sia OP=x, nel disegno sono tracciate alcune perpendicolari che tornano utili:

$OT = OP \cos \alpha = x \cos \alpha$

$PT = OP \sin \alpha = x \sin \alpha$

$BK = OB \sin \alpha = d \sin \alpha$

$OK = OB \cos \alpha = d \cos \alpha$

$KP = OK - OP = d \cos \alpha - x$

$TA = OT - OA = x \cos \alpha - l$

$BP^2 = BK^2 + KP^2 = d^2 - 2dx \cos \alpha + x^2$

$PA^2 = TP^2 + TA^2 = l^2 - 2lx \cos \alpha + x^2$

La funzione da minimizzare è BP+PA, deve essere derivata e trovato lo zero… un bel po' di calcoli che non riporto. Il minimo si ottiene per:

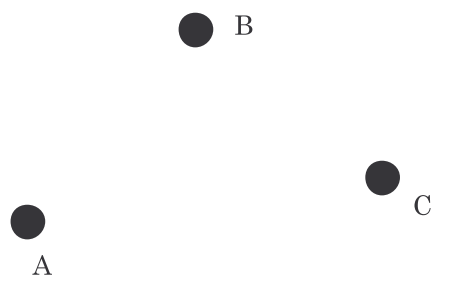
$$x = \frac{2ld \cos\alpha}{d + l}$$

Quello che mi piace, di questa risposta, e` che trova la lunghezza del percorso minimo senza trovare il percorso minimo…Sappiamo quanto c'e` da camminare ma non in che direzione andare. Brava Fran!

3.1.1.1 Il problema dei tre sindaci

Beh, in realta` la montagna si chiama Punta dei tre Vescovi, vicino al paesello (si, e` dalle parti di Biella). Comunque, questo e` un problema da sindaci biellesi, quindi i vescovi non c'entrano.

Come probabilmente sapete, i biellesi hanno fama di essere *oculati nelle spese* (qualcuno preferisce il termine "tirchi", ma non staremo a "sindacare"). I sindaci hanno, al momento, un problema.



Dati i tre paesi (**A**, **B**, e **C**; alla faccia della fantasia!), e` necessario unirli tra di loro con delle strade. I tre sindaci si accordano sul dividere per tre le spese necessarie, ma e` loro ferma intenzione spendere il meno possibile. Nel bando di gara e` chiaramente specificato che, volendo risparmiare (questo non lo dicono: nel bando c'e` scritto "minimizzare i tempi di percorrenza con indubbio vantaggio dei nostri concittadini nell'ambito degli interscambi sia lavorativi che culturali tra i mandamenti limitrofi..."), sara` preferito il progetto che prevede le strade piu` brevi (e quindi fa spendere meno in asfalto).

Allora, come e` andata, secondo voi?

3.1.2 La formula del Ghersi

Voglio sperare che abbiate giocherellato in Excel abbastanza da capire che $x = \sqrt{N}$.

Carino, vero? Sono sempre in attesa della dimostrazione…Per intanto, vi rifilo un altro compito, sempre per dimostrare la mia profonda ignoranza in aritmetica.

TUTTI voi *sicuramente* sapete calcolare una radice quadrata "a mano" (vi vedo annuire vigorosamente); per le altre quattro operazioni (che *spero* non avrete dimenticato) il metodo e` decisamente logico e dimostrare che "si fa cosi`" e` semplice; qualcuno di voi conosce una dimostrazione (o almeno una "giustificazione") del metodo della radice quadrata? Io no.

3.1.3 Sempre con la scacchiera...

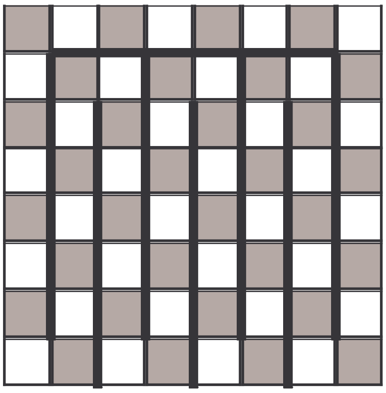
…Ma senza scacchi.

Oh, almeno un tentativo che e` uno potevate farlo!

Allora, parte (1). Questa era facile. Una tessera del domino copre due caselle, una bianca e una nera; non puo` fare in altro modo (e fin qui, non era un gran problema). Il passo successivo e` che, se tolgo due caselle dello stesso colore, mi restano 30 caselle di un colore e 32 caselle dell'altro; quindi, messi a posto 30 tessere, mi ritrovo due caselle dello stesso colore, e quindi non contigue. E quindi non copribili.

Come ho avuto gia` modo di sostenere (comunicazione privata), un problema con la risposta "no", non e` molto divertente; per questo vi ho inserito la seconda parte.

Verificato che togliendo due caselle dello stesso colore non riuscite piu` a combinare nulla, la fregatura deve essere nel toglierle di *colore diverso*. In questo caso, succede una cosa divertente. Per prima cosa, trasformiamo la nostra scacchiera in una "catena" (o in un qualcosa di topologicamente equivalente), con dei tagli sui bordi delle caselle:



Come potete verificare (sulla **vostra** scacchiera, tanto non vi serve a niente), e` una striscia continua. Supponiamo ora di togliere due caselle, una bianca e una nera; il risultato saranno due pezzi, con un'interessante caratteristica: entrambi cominciano con una una casella bianca (dalla parte dove abbiamo tolto la casella nera) e finiscono con una casella nera (dalla parte dove abbiamo tolto la casella bianca). A questo punto (si e` accesa la lampadina?) vi renderete facilmente conto che ogni striscia ha un numero **pari** di caselle, e ne ha lo stesso numero sia di bianche che di nere. allora, potete coprirle con le tessere (*nota a margine: se seguite il tracciato in figura, nella copertura, vi trovate il lavoro gia` fatto*).

Va notato che il caso particolare "tolgo due caselle contigue" e`, dal punto di vista della copertura, equivalente al "tolgo la tessera che copre due caselle contigue", quindi, anche se questa sembra un'eccezione (genera una striscia di lunghezza 62 e una di lunghezza 0) in realta` non lo e`.

Carino, vero?

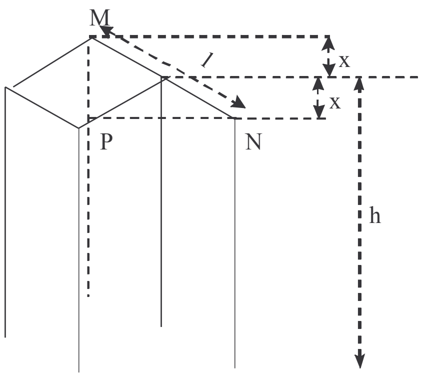
3.1.4 Ma avete almeno il cervello di un'ape?

Comincio a nutrire seri dubbi, in merito...

Vabbo`, adesso vi do una mano. Andate a riprendere il disegno, che e` gia` abbastanza incasinato cosi`.

Conserviamo il segmento **AB** (diagonale maggiore del rombo) come "cerniera", e facciamo oscillare il nostro rombo (che cambia forma, e quindi cambia l'angolo α).

Ora, vediamo di definire un po` di variabili:



Si, lo so, il disegno fa schifo. Accontentatevi.

Se utilizziamo, come detto prima, **AB** come cerniera, il volume resta costante (ne "sottraggo" tanto quanto ne "aggiungo"), e quindi variera` solo la quantita` di cera necessaria, alias le superfici del rombo e dei trapezi laterali. Devo trovare l'angolo che minimizza questo valore.

Supponiamo, per comodita`, il raggio del cerchio circoscritto ad una sezione della celletta pari a **1**; quindi, anche il lato dell'esagono viene uguale a **1**. Come potete verificare facilmente disegnando il tutto in pianta, l'insieme delle tre cerniere forma un triangolo equilatero di lato (mi aspetto ci arriviate da soli) **c** pari a $\sqrt{3}$."**l**" (attenti a non confonderlo con **1**) e` l'altra diagonale del rombo (nel disegno si vede di profilo), **x** la sua semiproiezione verticale e **h** l'altezza del prisma esagonale sino alla cerniera (supposto costante).

Il triangolo "nella cella" **MNP** e` rettangolo in **P**, quindi

$$l = \sqrt{4x^2 + 1}$$

Per quanto riguarda la superfice laterale della celletta, trattasi di sei trapezi, ciascuno dei quali ha superfice (sommabasiperaltezzafrattodue!)

$$S_{hex} = \frac{h + (h - x)}{2} = \frac{2h - x}{2}$$

La chiusura superiore e` formata da tre rombi, ciascuno di superfice:

$$S_{rom} = \frac{l * c}{2}$$

E quindi la superfice totale risulta (sei trapezi + tre rombi):

$$S_{tot} = 6S_{hex} + 3S_{rom} =$$
$$= 6 * \frac{2h - x}{2} + 3 * \frac{lc}{2} =$$
$$= 3 * (2h - x) + \frac{3}{2} lc$$

Sostituendo l'espressione di **l** e il valore di **c**,

$$S_{tot} = 3(2h - x) + \frac{3}{2}\sqrt{4x^2 + 1} * \sqrt{3} =$$
$$= 6h - 3x + \frac{3}{2}\sqrt{4x^2 + 1} * \sqrt{3}$$

Che e` l'espressione che dobbiamo derivare e uguagliare a zero per trovare il minimo:

$$-3 + \frac{3}{2} * \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}} * \sqrt{3} = 0$$

Ossia,

$$\sqrt{3}\frac{12x}{\sqrt{4x^2 + 1}} = 6$$

Quadrando,

$$\frac{3*144x^2}{4x^2+1} = 36$$

Che da` la forma intera:

$$288x^2 = 36$$

$$\Rightarrow x^2 = 0.125$$

Inserendola nell'espressione per **l**, si ha:

$$l = \sqrt{4x^2+1} = \sqrt{1.5} \approx 1{,}224$$

noto il fatto che il rapporto delle diagonali del rombo fornisce la tangente al semiangolo, si ha:

$$\tan g\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{c} = \sqrt{\frac{1.5}{3}} \approx 0.706$$

da cui, $\alpha/2 = 35^o 15'$ e quindi $\alpha = 70^o 30'$. Bisogna dirlo: MacLaurin era un duro!

Non stancatevi troppo.

Rudy d'Alembert
Piotr R. Silverbrahms
Alice Riddle