Rudi Mathematici

Numero 007.doc - 1999-08

1. Editoriale

Se io riesco a lavorare sotto l'ombrellone, potete farcela anche voi! A parte il fatto che preferisco la montagna.

La vostra pigrizia estiva sta raggiungendo livelli inusitati: a quanto pare, non leggete neanche piu` l'editoriale.... ***Solo Alice si e` accorta che la formulazione della congettura di Goldbach era sbagliata***! La formulazione corretta e`: *"Qualsiasi intero **pari** maggiore di 2 puo` essere espresso come la somma di al piu` due numeri primi*". Da cui, qualsiasi intero dispari puo` essere espresso come la somma di al piu` tre primi. il "pari" non e` uscito dalla tastiera. Avendo ricevuto una sola risposta in merito, **non** faccio pubblica ammenda.

Allora, avete avuto il tempo di pensarci (o meglio, di accorgervene). Si, c'e` un nuovo membro dello staff. Il suo incarico (visto che lei i problemi si diverte piu` a risolverli che a inventarli) e` quello di traduttore ufficiale da/per l'inglese della rivista. Qui, il gioco di parole sul nome e`, a dir poco, elementare, quindi non ve spiego neanche; se invece volete sapere chi e`, bene, trattasi di Fran, che al momento e` ampiamente in testa alla classifica dei solutori, anche se Franco la sta tallonando da vicino. E` speranza di tutti noi (beh, mia...) che, oltre a tradurre queste note nella versatile lingua d'Albione, continui pervicacemente ad impegnarsi quale solutrice delle questioncelle (questo l'ho scritto solo per vedere come viene in inglese).

Yodelehi-HoHo!

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

English Version is powered by Alice Riddle

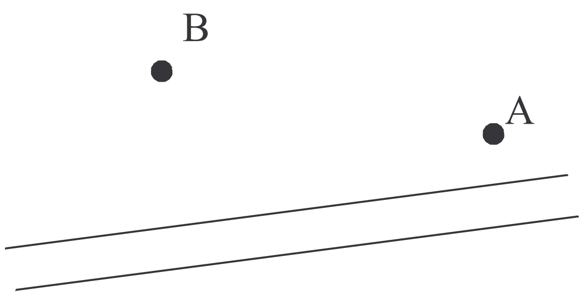
2. Problemi

2.1 Al campeggio

"Come si fa ad accendere un fuoco con una saponetta bagnata?" Semplice, la si cambia con un accendino. Un problema carino di quando il campeggio era vero campeggio:

2.1.1 "Quando torni, prendi l'acqua!"

La situazione e` quella rappresentata in figura:



In **A** c'e` la tenda, in cui e` in fase di preparazione un succulento pranzetto in una pentola *mathematically correct*; non avendo a disposizione motorini da smontare, parte della compagnia si fa una passeggiata sino al punto **B**. La partenza di questa passeggiata viene allegramente salutata da un "Visto che non hai un tubo da fare, quando torni porta un secchio d'acqua!". Cio` non fa desistere il nostro eroico passeggiatore dal recarsi comunque al punto **B**. Al ritorno ("Cosa ci faccio, con un secchio in mano?") ci si ricorda che bisogna passare dal fiume (trattasi del *Math River*, che scorre in linea retta con alveo semicilindrico perfettamente costante). Qual'e` la strada piu` breve?

3. Soluzioni & Note

3.1 [005]

3.1.1 Trovata la dimostrazione del Teorema di Morley!

Non so se ve ne siete accorti, ma questo numero ha un supplemento.

In realta`, di dimostrazioni ce ne sono due, ma la seconda e` trigonometrica e molto piu` brutta di questa.

Non vorrei che vi annoiaste senza qualcosa da fare nel campo della matematica misconosciuta, quindi vi passo un altro problemino di cui ***non conosco la dimostrazione***: io l'ho trovato su un vecchio manuale di matematica (il *Ghersi*, per gli addetti ai lavori).

3.1.2 La formula del Ghersi

No, non si chiama cosi`, ma quello e` l'unico posto dove l'ho trovata, quindi...

Sia $N = r_0 * s_0$, con r_0 e s_0 generici (non necessariamente interi, come del resto non necessariamente intero "N"). definiamo le due funzioni:

$$r_k = \frac{r_{k-1} + s_{k-1}}{2} \qquad\qquad s_k = \frac{2 * r_{k-1} * s_{k-1}}{r_{k-1} + s_{k-1}}$$

...Spero il sole estivo non abbia ottenebrato le vostre facolta` sino al non riconoscere in "r" la media aritmetica e in "s" la media armonica.

Bene, queste due balorde tendono *tutte e due allo stesso valore* (***x***). Non vi dico che valore e`, anche perche` ci vogliono tre secondi in Excel a calcolarlo.

Si noti (probabilmente e` importante nella dimostrazione) che e` $s_k = \frac{r_{k-1} s_{k-1}}{r_k}$.

Inoltre, questa bambina ha una probabile parentela con la ***formula di Bombelli*** che, se e` $N = a^2 + b$ sostiene che (***x*** e` lo stesso valore di prima, anche se qui conviene lavorare con gli interi):

$$x = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}}}}$$

(provate a scriverla, e capirete perche` Ore ha definito le frazioni continue "l'incubo del tipografo"). Se credete che abbia la dimostrazione di questa, vi sbagliate (lavorare ragazzi, lavorare!).

Per la prossima volta, fate almeno lo sforzo di calcolare ***x***, che ho un'altra domandina

3.2 [006]

3.2.1 Sapete giocare a scacchi?

Vabbo`, neanche gli scacchi vi filano...Ma qual'e` il vostro concetto di gioco intellettualmente stimolante, il rollerball?

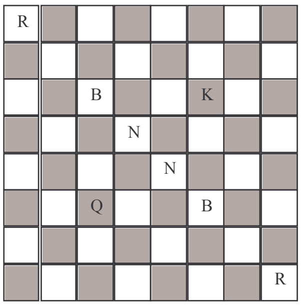
Va bene, va bene....

Allora, problema (1): l'attacco **minimo** si realizza come "`BQRN4/BRK5/1N6/8/8/8/8/8`" ossia, per i piu` pigri (occupa talmente poche case che basta un pezzo di scacchiera):

B	Q	R	N		
B	R	K			
	N				

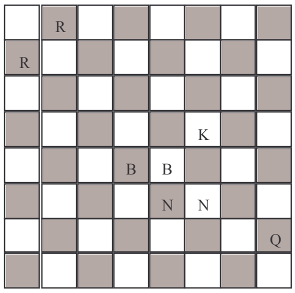
Questa soluzione attacca **16** case, con i due alfieri a colori diversi; se scambiate regina e alfiere della prima riga tra di loro, avete la soluzione con gli alfieri a colori uguali.

Per quanto riguarda l'attacco **massimo** del problema (2), la soluzione migliore e` "`R7/8/2B2K2/3N4/4N3/2Q2B2/8/7R`" e richiede gli alfieri a colori uguali:



Che copre 64 case e ha una graziosa simmetria

La soluzione con alfieri a colori diversi vale invece "`1R6/R7/8/5K2/3BB3/4NN2/7Q/8`":



Che copre "solo" 63 case (e` scoperta C1).

...Va bene, basta scacchi...

3.2.2 ...Brutta cosa, un padre prof...

Il giovincello ha avuto la presenza di spirito di dilazionare la risposta e interpellare un pool di esperti (si, io e Piotr). A seguire, il nostro ragionamento:

Sia $\mathbf{P_1}$ la probabilita` del giovane teppista di vincere contro il padre e $\mathbf{P_2}$ quella di vincere contro la madre; e`, evidentemente, $\mathbf{P_2>P_1}$.

Se inizia a giocare con il padre, ci sono tre possibilita` di "vittoria":

1. Vincere tutte le partite: $P = P_1 P_2 P_1 = P_1^2 P_2$
2. Vincere le prime due e perdere l'ultima: $P = P_1 P_2 (1 - P_1) = P_1 P_2 - P_1^2 P_2$
3. Perdere la prima e vincere le altre due: $P = (1 - P_1) P_2 P_1 = P_1 P_2 - P_1^2 P_2$

Sommando, si ottiene:

$$\begin{aligned}
P_{T1} &= P_1^2 P_2 + P_1 P_2 - P_1^2 P_2 + P_1 P_2 - P_1^2 P_2 = \\
&= 2 P_1 P_2 - P_1^2 P_2 = \\
&= P_1 P_2 (2 - P_1)
\end{aligned}$$

Se invece inizia a giocare con la madre, le possibilita` di "vittoria" sono:

1. Vincere tutte le partite: $P = P_2 P_1 P_2 = P_2^2 P_1$
2. Vincere le prime due e perdere l'ultima: $P = P_2 P_1 (1 - P_2) = P_2 P_1 - P_2^2 P_1$

3. Perdere la prima e vincere le altre due: $P = (1 - P_2)P_1P_2 = P_2P_1 - P_2^2P_1$

Sommando, si ottiene:

$$P_{T2} = P_2^2P_1 + P_2P_1 - P_2^2P_1 + P_2P_1 - P_2^2P_1 =$$
$$= 2P_2P_1 - P_2^2P_1 =$$
$$= P_2P_1(2 - P_2)$$

(salvo errori...il secondo caso non e` altro che il primo con i pedici scambiati).

Confrontando le due somme, ed essendo noto che $\mathbf{P_2 > P_1}$, si vede che e` $P_{T1} > P_{T2}$, quindi conviene iniziare a giocare con il padre.

Alice ha trovato una graziosa scorciatoia intuitiva: per vincere due partite di seguito, e` essenziale vincere quella "centrale"; quindi, questa va giocata contro il giocatore piu` "scarso" (la madre).

Eh? Come e` andata a finire? Ma sarete pettegoli... Non lo so, ma il prof di mate adesso non mi offre piu` il caffe` e mi guarda male...

3.2.2.1 Sempre con la scacchiera...

...Ma senza scacchi.

Un paio di numeri fa era il mio onomastico (ecchissene... beh, io). Mi hanno regalato una di quelle scatole con dentro un mucchio di giochi! Scacchi, dama, domino, un paio di mazzi di carte...Oibo`, le tessere del domino sono esattamente delle dimensioni di due caselle della scacchiera... E` (abbastanza) evidente che, con 32 tessere, ricopro completamente la scacchiera... E se "tolgo" dalla scacchiera la casella in alto a sinistra e in basso a destra, ce la faccio con 31? E se tolgo due caselle a caso? Prima di martoriare una scacchiera, provate con il cervello!

3.2.3 Problema "per file"

...Come ai compiti in classe...UNA STRAGE! Solo Alice raggiunge la sufficienza... testuali parole: "*Sono una bimba e mi diverto a spadellare, per cui mi dedico alla fila di destra, anche perché quando ho letto la parola "carburatore" mi é subito sembrato un problema irrisolvibile...*"

La "differenza", tra i due compitini, e` che, diavolescamente parlando, vi ho fatto la pentola ma non il coperchio....

Versione Maschile

Se V e` il volume del galleggiante, si ha:

$$V = \pi * r^2 * h$$
$$\Rightarrow h = \frac{V}{\pi * r^2}$$

Quindi, la superficie S (due fondi e un manto) vale:

$$S = 2*(\pi * r^2) + 2*\pi * r * h$$

Sostituendo a questo il valore calcolato per h, si ha:

Versione Femminile

Se V e` il volume della pentola, si ha:

$$V = \pi * r^2 * h$$
$$\Rightarrow h = \frac{V}{\pi * r^2}$$

Quindi, la superficie S (un fondo e un manto) vale:

$$S = \pi * r^2 + 2*\pi * r * h$$

Sostituendo a questo il valore calcolato per h, si ha:

$$S = 2\pi * r^2 + \frac{2\pi * rV}{\pi * r^2} =$$
$$= 2\pi * r^2 + \frac{2V}{r}$$

Derivando rispetto a *r* e uguagliando a 0 si ha:

$$4\pi * r = \frac{2V}{r^2}$$
$$\Rightarrow 4\pi * r^3 = 2V$$
$$\Rightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi}$$

Avendo precedentemente ottenuto l'espressione di V in funzione di h,

$$r^3 = \frac{\pi * r^2 h}{2\pi} = \frac{r^2 h}{2}$$
$$\Rightarrow h = 2r$$

Ossia **l'altezza deve essere uguale al diametro**.

$$S = \pi * r^2 + \frac{2\pi * rV}{\pi * r^2} =$$
$$= \pi * r^2 + \frac{2V}{r}$$

Derivando rispetto a *r* e uguagliando a 0 si ha:

$$2\pi * r = \frac{2V}{r^2}$$
$$\Rightarrow 2\pi * r^3 = 2V$$
$$\Rightarrow r^3 = \frac{V}{\pi}$$

Avendo precedentemente ottenuto l'espressione di V in funzione di h,

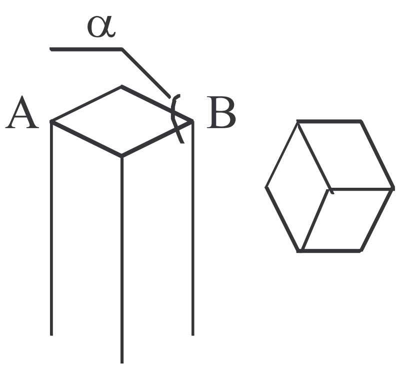
$$r^3 = \frac{\pi * r^2 h}{\pi} = r^2 h$$
$$\Rightarrow h = r$$

Ossia **l'altezza deve essere uguale alla meta` del diametro**.

Come dicevo, una strage... Comunque, vi avevo promesso che vi avrei raccontato da dove veniva questo problemino; l'ho trovato su un libro che si intitola (liberi di non crederci) "*Il calcolo differenziale ed integrale reso facile ed attraente*", edito nel 1936. E, dallo stesso luogo, viene il prossimo (che e` quello tosto che vi avevo promesso).

3.2.3.1 Ma avete almeno il cervello di un'ape?

Avete presente le cellette delle api? Suppergiu`, hanno una sezione esagonale "tappata" al fondo da tre rombi, l'uno uguale all'altro...Cerco di fare il disegnino (profilo e pianta...)



Tanto per chiarire: sulla sinistra vedete la celletta di profilo e uno dei rombi, il cui angolo e` **α**. Di fianco, vedete il fondo della celletta dall'alto, con i tre rombi uguali.

La domanda e`: quanto deve valere l'angolo **α** per *minimizzare* il consumo di cera e *massimizzare* il volume? Fermo restando che devono restare rombi e avere sezione esagonale, altrimenti non ci starebbero le cellette "dall'altra parte", sfalsate (no, il disegno delle cellette dall'altra non ve lo faccio: se volete far vedere come siete bravi, allegatelo alla soluzione).

Ve ne racconto un paio, su questo problema.

Il problema l'ha inventato Reaumur (si, quello della scala termometrica dove l'acqua bolle a 80 gradi) e lo ha proposto a Konig (uno dei matematici piu` litigiosi che la storia ricordi). Logicamente, Koenig ha sbagliato i conti, e la versione corretta del calcolo e` stata fornita da MacLaurin (persona ingiustamente ignorata nella storia della matematica: solo perche` Taylor ha trovato una generalizzazione della formula di MacLaurin, oggi il buon Colin e` relegato in una nota a pie` pagina...). come potrete notare se cercate di risolverlo, il vecchio Mac era un tipo tosto...

Al lavoro!

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

Alice Riddle