Rudi Mathematici

Numero 003_n.doc - 2003-08

1. Editoriale

Incredibile! siamo ad un numero 3, e il numero delle copie diffuse è un primo non pari!

Non solo ma, come noterete dalle firme, c'è un altro torturatore! Al momento, la sua partecipazione alla stesura è piuttosto scarsa, ma ha promesso che si darà da fare.

Essendo il responsabile della mia figuraccia riguardo al genere delle ellissi (stavolta è giusto), esordisce con un problema matematico-letterario: che si chiami Piero mi pare abbastanza chiaro; quale matematico si nasconde sotto il cognome? No, non è russo. Chi lo trova, vince la menzione nell'editoriale (non è da tutti, ammettetelo); se invece riuscite a dimostrare l'ipotesi per cui il matematico è famoso, siete automaticamente candidati al Premio Field (che è il Nobel per i matematici; tra l'altro, lo sapete perchè non c'è il Premio Nobel per la matematica? Ve lo racconto la prossima volta)...devo stare zitto; così è troppo facile!.

Come noterete, essendo ora in due, il titolo è cambiato; ho cercato di mantenere i vari giochi di parole contenuti nell'originale. Sarà un record, cambiare nome dopo due numeri? Penso comunque che questo nome, essendo valido per 1 e per 2, sia valido anche per un numero "n" di collaboratori, per "n" comunque grande.

Rudy D'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

Post Scriptum

Arriva la parte seria...

Poche risposte, questa volta...Vorremmo fosse chiaro che non necessariamente la risposta deve contenenre una soluzione corretta e blindata, ma sono ben accette anche considerazioni, analisi, arzigogoli, variazioni, espansioni, restrizioni, ricchi premi e cotillons...Se non aumentate il livello di grafomania, chiudiamo la rivista (o la trasformiamo in bimestrale).

2. Ternana Jones: le pergamene di Loginia

...Vi ho mai raccontato del mio (fortunatamente) ex compagno di stanza dei tempi dell'università, Ternana Jones? Anziché limitarsi a cose innocue quali la misura della massa critica degli isotopi del plutonio, aveva un vero brivido quando poteva imbarcarsi in imprese pericolose tipo la traduzione di vecchi manoscritti o una spedizione esplorativa nei più reconditi recessi della biblioteca di facoltà; grazie al cielo (contrariamente a me) non aveva l'abitudine di portare il lavoro a casa, quindi l'unica polvere della nostra stanza era generata dagli occasionali fall-out radioattivi degli esperimenti del vostro umile narratore, solitamente preannunciati da un "Ooops!" che animava piacevolmente la vita condominiale.

(W. Pauli sosteneva che più un fisico teorico è bravo, più è imbranato con gli apparati sperimentali; sarei stato un grande fisico teorico...)

Recentemente, Ternana mi ha telefonato ("don't worry") per chiedermi un aiuto ("OK, worry").

Il problema riguardava una serie di strane pergamene che era riuscito recentemente a decifrare ma di cui non riusciva assolutamente ad afferrare il contenuto; dalla voce sembrava nel suo normale stato confusionale dei bei tempi andati, ma qualcosa nel suo tono mi preoccupava: sembrava quasi serio...Alcune birre avrebbero, probabilmente, spazzato questa serietà; alla vecchia birreria "Al Pione Incantato", probabilmente, non si ricordavano di noi.

"...Le pergamene sono di molto tempo fa, e provengono dalla perduta terra di Loginia; le abbiamo ritrovate durante una spedizione l'estate scorsa e, finalmente, sono state decifrate; il guaio è che o sono incomplete, o sono oltre la mia comprensione...Prima però devo spiegarti quello che sappiamo sul matriarcato di Loginia; basteranno pochi minuti: è la prima cosa che abbiamo decifrato, incisa sul palazzo della Regina"

"Esistono alcuni fatti che sono a conoscenza di tutti gli abitanti di Loginia:

1. Tutte le donne, per sposarsi, devono passare un esame di logica formale e quindi ogni donna sposata di Loginia è un ottimo logico
2. Alla regola precedente fa eccezione la Regina, che non è sottoposta all'esame.
3. Tutte le donne ubbidiscono ciecamente alla Regina
4. Un colpo sparato in un punto qualunque di Loginia si sente subito in tutta Loginia.

"...Tutto qui? sembra uno di quei problemi del tipo 'Dato nulla trovare tutto' che davano all'Uni".

"Aspetta, perché quando ascolterai la prima pergamena vedrai che i tuoi problemi grondavano dati: probabilmente è del maggior poeta, matematico, filosofo, inventore, barista di Loginia, Josephine"

"Il posto mi è sempre più simpatico..."

2.1 La prima pergamena

"Ai tempi felici in cui regnava la regina Antonietta I, essa era preoccupata per la moralità dei mariti di Loginia; essa ("essa, essa...stai traducendo da cani" "Vuoi provare tu?") radunò allora tutte le mogli di Loginia nella piazza principale, e parlo in questo modo:"

"*C'è almeno un marito infedele a Loginia."*

"Tutte le donne sanno quali mariti sono infedeli, ma non sanno se il proprio marito è infedele"

"Vi è proibito di discutere la fedeltà del vostro marito con un'altra donna"

"Se scoprite che vostro marito è infedele, dovete spararg li alla mezzanotte del giorno in cui lo scoprite".

Trentanove notti di pace seguirono; la notte successiva, si sentirono spari a Loginia.

Antonietta I è ricordata come 'La Regina Giusta e Saggia'".

"...E allora?"

"E allora è finita!"

"In pratica, abbiamo la risposta ma non la domanda...Sembra un romanzo di Douglas Adams."

"...Aspetta, che ce n'è un'altra".

2.2 La seconda pergamena

"Ad Antonietta I seguì Antonietta II ("però, che fantasia"), ed anch'essa si preoccupò della moralità dei mariti di Loginia; inviò quindi a tutte le mogli di Loginia un messaggio riportante esattamente le parole di Antonietta I, aggiungendo la garanzia che tutte le mogli di Loginia ricevevano lo stesso messaggio.

Antonietta II è ricordata come 'La Regina Folle e Malvagia'".

"...fine.."

"Come fai a saperlo?"

"La birreria chiude... Manca il pathos, quindi finisce qui".

Ragazzi, tocca a voi.

3. Soluzioni & note

3.1 [001]

Luca ha mandato una dimostrazione da qualche mega che trattasi di spirale; interessante, ma non dice di che spirale si tratta.

Inoltre, sostiene di aver trovato un'improprietà nella dimostrazione di Fran;

*Note sulla soluzione: ci sono due errorini. Definisci alfa=k*t, poi poni t=1 (arbitrariamente). Quindi si ottiene un cos(k-beta/2) dove sommi un angolo ed una velocità angolare!!! E' la consistenza delle dimensioni? La dimostrazione funziona lo stesso usando alfa (e fregandosene della velocità), oppure tenendo la velocità dovevi mettere k*dt con dt piccolo a piacere. Secondo problemuzzo, la distanza del cane dal centro e' definita rho(t) = rho*M^t. Dici che tende a zero, però se non dici che M<1, non si sa se tende a zero, resta costante o esplode ad infinito...*

Primo: "t=1": OK, secondi, ore, minuti, secoli, anni brahmanici, femtoshed,...quel che vi pare: basta che, dimensionalmente, sia un tempo...

Secondo: "M" è correlato alla Costante Cosmologica: trovandoci noi, come chiaramente statuito nelle ipotesi del problema, in un mondo in cui l'interazione gravitazionale è unicamente attrattiva (i cani corrono uno verso l'altro), si considera il caso M<1; per M>1 (caso dei cani che si stanno antipatici) i cani scappano. Interessante la psicologia del caso M=1...

3.1.1 Fe, fi, fo, fum, I smell the blood of an englishman!

Luca colpisce ancora!

Essendo stato richiesto di non fare calcoli, ha scritto solo "due paginette" (dice lui) in cui si limita ad utilizzare il teorema di Pitagora, effettuando opportune approssimazioni e trascurando termini insignificanti... Comunque, arriva alla soluzione corretta. Quando dicevo "Senza calcoli" non intendevo "Senza Calcolo (differenziale)"! intendevo proprio "senza fare operazioni".

Quello che mi stupisce è che nessuno si è accorto che, per semplificarvi la vita, avevo messo lì un "n=4"; in questo modo, i moti erano (per tutto l'inseguimento) *ortogonali* tra di loro.

In ogni momento, i cani individuano un quadrato (che diventa sempre più piccolo); quindi, in ogni momento, il cane **B**, inseguito dal cane **A**, non ha componenti del suo moto che lo allontanino o lo avvicinino al cane **A** (sono moti perpendiocolari tra loro). Quindi, la distanza da percorrere è la stessa che si avrebbe se **B** stesse fermo, pari al lato del quadrato.

3.2 [002]

...Bene, Bene Bene...

3.2.1 Buon Compleanno!

Beh, questo era facile...

Tanto per cominciare, è **sbagliata** la risposta ricevuta alla macchina del caffè (non vi dico da chi) che ha detto, testualmente "365/2 !" (l'esclamativo è segno di disprezzo nella trisposta, non di fattoriale) ...Non solo è sbagliata, ma la persona è stata talmente pigra da non fare neanche la divisione...Lasciamo perdere: lo nominiamo laureato in lettere antiche honoris causa.

Procediamo con calma.

Quando io ho chiesto il compleanno alla prima persona, le probabilità che la seconda persona sia nata lo stesso giorno sono, chiaramente, 1/365 e quindi ho una probabilità di perdere pari a 364/365.

La data di nascita della TERZA persona, per perdere, deve essere una qualsiasi sulle 363 restanti (visto che ho perso con le prime due); da cui, la probabilità di perdere con 3 persone risulta $\frac{364}{365}*\frac{363}{365}$.

E avanti in questo modo: calcolata tutta la serie, si vede (Excel o il metodo delle approssimazioni successive del Ghersi: prima o poi dobbiamo giocarci un pò sopra...) che la probabilità di perdere schizza verso il basso piuttosto velocemente; con 22 persone, vi ritrovate in una condizione 0.49... che è già più vantaggiosa del testa o croce.

Vi invito a verificare con Excel, tabulando la funzione: è incredibile quanto presto salga la probabilità di vincere!

3.2.1.1 Visitors!

Volevo parlarvi di me.

Come molti di voi sanno, ho un figlio (Alberto) dell'età di sei anni e mezzo; mi raccomando il "mezzo", lui è molto pignolo su questo.

L'ultima idea è stata quella di collezionare gli alieni bulbosi contenuti nelle scatole di merendine; compongono una serie da otto, ciascuno associato ad un pianeta del sistema solare (si, Terra esclusa...venivano troppo brutti); il produttore sostiene (e noi non abbiamo ragione di negarlo) che gli alieni sono distribuiti uniformemente, e (non è scemo) saremo tutti molto felici quando avremo la collezione completa.

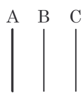
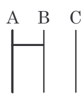
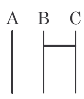
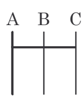
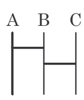
Sorgono spontanee due domande:

1. Quante scatole dovremo comprare, per avere una probabilità "ragionevole" (sufficiente in media, diciamo...escluse sfighe cosmiche e superenalotti) di completare la collezione?
2. Mi date un gioviano per due venusiani?

3.2.2 Chi paga la birra?

Signori, considero il vostro approccio sperimentale estremamente poco serio...

Partiamo da uno schema semplice: tre persone, una sola linea (che unisce "A" e "B"); l'effetto di una linea del genere è quello di scambiare di posto "A" e "B", lasciando invariato "C": quindi si ha che la "linea tra 'A' e 'B'" è un operatore che dà il seguente risultato: $\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$ La prima riga è l'input del sistema, la seconda è la condizione finale; se applicate due operatori di seguito, riordinate la prima linea del secondo operatore in modo tale che coincida con la seconda linea del primo (logicamente, dovete riordinare di concerto anche la seconda riga del secondo operatore. È abbastanza evidente che i possibili operatori sono quelli indicati nella tabella qui sotto:

Codice	**Operatore**	**Rappresentazione**
"0"	$\begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix}$	 Non cambia Niente
"1"	$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$	 "A" e "B" si scambiano
"2"	$\begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix}$	 "B" e "C" si scambiano
"3"	$\begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix}$	 "A" e "C" si scambiano
"4"	$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix}$	 "1" e "2"

"5" $\begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$ 

"2" e "1"

...È abbastanza chiaro? È logico che quando applicate due o più operatori in sequenza (alias tirate due righe orizzontali) dovete riordinare le *colonne* del secondo operatore secondo il risultato del primo.

Vediamo un attimo che proprietà ha questo grazioso giochino:

1. Esiste l'elemento neutro

   Trattasi dell'elemento "0", che lascia invariata la situazione

2. Per ogni elemento esiste un elemento tale che, applicato all'elemento dato, si ottiene l'elemento neutro

   Ogni elemento è l'inverso di se stesso: se vi limitate a duplicare una rappresentazione, effettuate due volte lo stesso scambio, ristabilendo la condizione iniziale

3. L'applicazione dell'operatore è chiusa su se stessa

   Applicando qualsiasi insieme di lineeette, siccome non fate altro che effettuare degli scambi, ottenete comunque un risultato che è possibile ottenere con un solo operatore, quindi un risultato che appartiene all'insieme

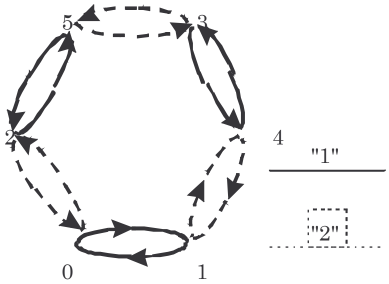
4. L'operatore è associativo

   Se applicate prima "A" e "B", e poi "C", è la stessa cosa che calcolare prima "B" e "C" e applicarle il risultato dopo "A"

Quindi, il nostro bel sistema è un *gruppo non commutativo*.

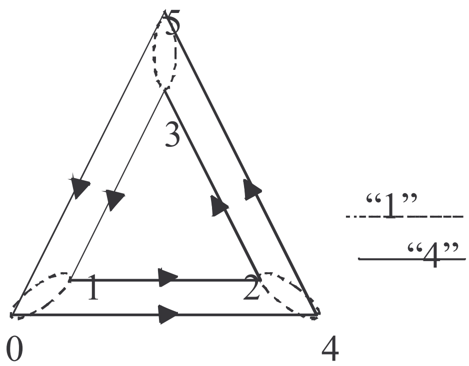
È piuttosto facile vedere che il nostro gruppo possiede due generatori (ad esempio. "1" e "2") con i quali è possibile generare tutti gli altri elementi (si, "3" non è così immediato...provate con "1"+"2"+"1" o con "2"+"1"+"2", poi ditemi).

Se usiamo "1" e "2" come generatori, il grafo di Cayley risulta:



Il bello è che, se preferite, potete scegliere come generatori "1" e "4": dalle mie reminiscenze di algebra, mi pare di ricordare che basta dimostrare che i nuovi generatori generano quelli vecchi (una base genera l'altra): "1" appartiene ad entrambe le basi, quindi non c'è problema; "2"= "1"+"4". Q.E.D.

Con questi nuovi generatori, il grafo di Cayley diventa:



Mi aspetto che siate in grado di riconoscerlo, senza andare sino al bar...Cos'è?

3.2.3 Data la soluzione...

Pesce d'aprile! L'unica condizione necessaria è che *salga sulla montagna* (e che poi scenda).

Vediamo prima la dimostrazione che è stata fatta da Giorgio; sua intenzione era fare un contro-pesce, e direi che c'è riuscito benissimo...(le parti non in corsivo sono mie: non ho saputo resistere):

Definiamo come campo di interesse dell'analisi l'intervallo **G=[A,B]**, *dove* **"A"** *è l'ora di partenza del monaco, sia nel giorno della salita che nel giorno della discesa e* **"B"** *l'ora di arrivo più tarda. Per comodità, definiamo* **"C"** *l'altra ora di arrivo; sia* **f(t)***la funzione "monaco che sale" e* **g(t)** *la funzione "monaco che scende".*

Incidentalmente, notiamo due cose:

1. *Le due funzioni sono sovrapponibili, in quanto il calcolo va fatto "modulo giorno"*
2. *Le due funzioni sono continue, non avendo il monaco discontinuità durante ciascuna delle due camminate* (non staremo a sindacare se la meditazione buddhista, prevedendo un'illuminazione trascendentale, rappresenti o no una discontinuità nella nostra esistenza...Con le premesse, l'abbiamo posta al di fuori del nostro campo d'interesse)

Senza perdere in generalità (ma guadagnandoci in escursionismo?) *possiamo definire* **"B"** *come l'ora di arrivo in cima alla montagna e* **"C"***come l'ora di arrivo al monastero; se l'altezza della montagna è* **"M"** *e l'altezza del monastero* (sul livello del mare) *è* **"m"**, *la coimmagine del nostro campo d'interesse sarà* **E=[m,M]**, con, in particolare, **f(A)=g(C)=m, f(B)=g(A)=M**.

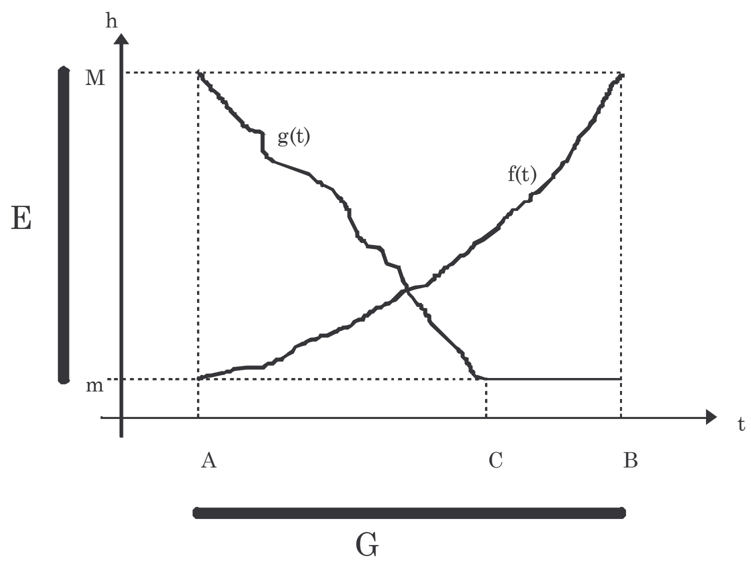
Chiaramente, essendo **G** *uno spazio metrico compatto, anche* **E** *lo è (per la definizione di funzione continua).*

Quindi **g** *e* **f** *assumono tutti i valori compresi tra il massimo assoluto e il minimo assoluto* (Giorgio non lo dice, ma possiamo supporre che **f** e **g** siano monotone: l'una non decrescente (**f**) e l'altra non crescente (**g**)).

Anche **g-f** *è continua (in quanto differenza tra due funzioni continue); per le condizioni al contorno, deve essere* ***g(B)=f(A)*** e ***f(B)=g(A)***; *allora, la funzione differenza ha come massimo* **M-m=g(A)-f(A)** *e come minimo* **m-M=g(B)-f(B)** (è implicita la supposizione che il monaco stia fermo nel monastero tra i tempi **C** e **B** e **g(x,x>C)=m**).

Ora, è evidente che (mistica a parte) **m-M**, *"salendo" il monaco sulla montagna, è minore di zero, mentre* **M-m** *è maggiore di zero. Da cui, applicando il lemma degli zeri (teorema di Weierstrass), esiste almeno un punto* **x** *in cui* **f(x)-g(x)** *assume il valore zero, cioè* **f(x)=g(x)**.

OK, pesce d'aprile...Più seriamente, la cosa è immediata attraverso il *grafo logistico*: spazio in ordinata e tempo in ascissa: le due funzioni devono incontrarsi, da qualche parte...



Fran, invece, ha scritto un'analisi piuttosto "sommaria" giungendo alle medesime conclusioni (e anche un po' seccata, direi....Troppo semplice, Fran?)

Questo problema è abbastanza un classico per gli studenti delle scuole medie, forse uno dei più semplici malgrado ogni volta sembri un dramma.

È la solita vecchia storia dei due treni, uno che parte dalla stazione B andando verso la stazione A e l'altro che si dirige da A verso B. La continuazione del problema comprende caratteristiche riguardanti la "legge del moto" dei due treni, cioè, per i non addetti ai lavori, la funzione che lega lo spazio percorso al tempo impiegato a percorrerlo.

Ed ecco che lo studente, sbigottito, si vede chiedere in che punto o dopo quanto tempo i due treni si incontreranno. Non sorge nessun dubbio sul fatto che si debbano incontrare, sperando che non si schiantino, perché al tempo zero partono entrambi uno in direzione dell'altro. (...eccetera...)

Piaciuto lo scherzetto? Se il pesce d'aprile lo mettevamo in questo numero, ve ne accorgevate subito!

Vabbò, proviamo con qualcosa nel tema ma un po' più serio...

3.2.3.1 Il caso del pendolare in anticipo

Un pendolare arriva alla stazione vicino a casa sua tutte le sere alle 17:00; la moglie parte da casa in macchina tutte le sere alla stessa ora e arriva alla stazione giusto in tempo per prendere il marito e portarlo a casa.

Una sera, il pendolare prende il treno prima e arriva alla stazione alle 16:00; il tempo è bello, quindi si avvia a piedi lungo la strada percorsa sempre dalla moglie.

Quando si incontrano, sale in macchina e arrivano a casa dieci minuti prima del solito.

Supponendo che la moglie guidi a velocità costante, la sera in oggetto sia partita alla stessa ora, guidi alla stessa velocità delle altre volte e che anche il marito cammini a velocità costante, per quanto tempo ha camminato il marito?

Au revoir

Rudy D'Alembert

Piotr R. Silverbrahms