Numero 002.doc - 1999-03

1. Editoriale

Spiacente, signori; ci sono ricascato. Un altro editoriale. Una volta e` caso, due e` coincidenza, tre e` premeditazione (Ian Fleming, "Goldfinger"). Aspettate il prossimo numero per condannare.

Anche questa volta, qualche problemino; siccome pero` non voglio trasformarvi in macchine da "problem-solving" (tra l'altro, il mio ruolo quale diventerebbe? "Problem-maker" suona decisamente male anche se, come diceva Murphy, ogni soluzione porta a nuovi problemi) il problema della birra e` suscettibile di espansioni (non necessariamente alcoliche) e, per i prossimi numeri, ho intenzione di essere piu` "monografico", proponendo una serie di problemi "a tema" o, in un qualche modo, collegati tra di loro. Cosi`, almeno, se non vi piace un argomento e` piu` facile buttare via l'intero numero.

I problemi, a quanto pare, hanno avuto una discreta diffusione; non cosi`, devo ammettere, le soluzioni. Ammetto che il problema dei cani era simpatico, ma potevate impegnarvi anche sul resto...

La grande novita` e` che non sono solo nell'universo! C'e` vita matematica fuori! A partire (spero) dal prossimo numero, avremo un collaboratore esterno, che si occupera` anche della diffusione del giornalino nelle altre galassie; non garantisco, quindi, il mantenimento del nome.

Non divertitevi troppo.

Rudy D'Alembert

2. Buon compleanno!

Consiglio per un gioco di societa` (piuttosto stupido, se devo essere onesto.. Pero` il problema e` bello).

Supponete di radunare un certo numero "n" di persone (di cui sapete solo che sono molto onesti nelle loro dichiarazioni); con queste persone, scommettete che almeno due di loro sono nate lo stesso giorno.

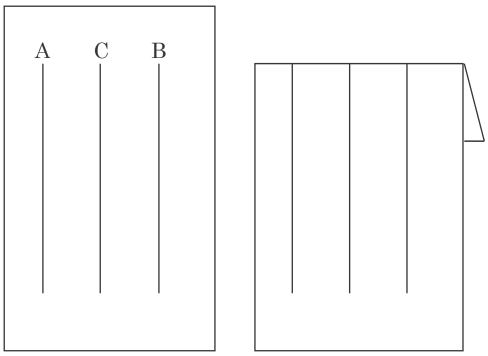
Quante persone dovete radunare per avere ragionevoli probabilita` di vittoria (diciamo 50%)?

Prima di tirare in ballo l'anno bisestile e il fatto che le nascite non sono uniformemente distribuite, per favore, risolvete il caso piu` semplice; a discutere di filosofia c'e` sempre tempo, ad esempio durante i field trial del problema successivo.

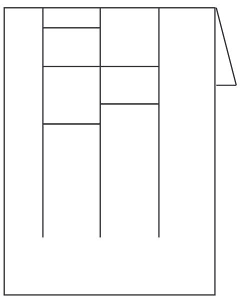
3. Chi paga la birra?

Aldo, Bruno e Carlo (si, sempre i soliti ABC...) sono tre risolutori di giochini matematici che vorrebbero trovare un modo nuovo di decidere chi paga la birra: all'uopo, inventano il seguente metodo:

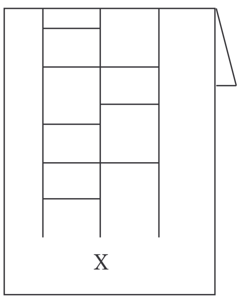
1. Aldo traccia tre righe verticali parallele, e le titola "A", "B", "C" (in ordine qualsiasi) piegando poi il foglio in modo tale che non sia visibile la titolatura delle righe:



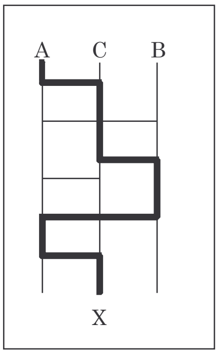
2. Bruno prende il foglio e traccia alcuni segmenti orizzontali che uniscono due linee



3. Carlo traccia qualche altro segmento e marca con una "X" una delle linee verticali.



4. ...A questo punto, si apre il foglio e ciascuno segue la "propria" linea, usando le righe orizzontali come ponti (non si puo` salire su un ponte a meta`!)



HEY! Aldo! Paga il primo giro!

...Se provate a seguire gli altri tracciati, vedete che ne` Carlo ne` Bruno finiscono sulla "X"; inoltre, funziona sempre, anche se aggiungete una "Y" (per il secondo giro) e una "Z" (per i salatini) sulle altre "uscite" del sistema.

Perche`? Cos'e`? Somiglia a qualcos'altro?

4. Trovate il problema...

...Data la soluzione.

Un monaco buddhista (no, questo non e` fondamentale...) si reca a meditare sulla montagna, partendo all'alba dal convento. Durante la marcia, il monaco si ferma a riposare alcune volte e a mangiare; arriva sulla cima della montagna nel tardo pomeriggio e inizia il periodo di meditazione.

Dopo alcuni giorni, riparte all'alba di ritorno al convento e arriva nel pomeriggio, lungo la stessa strada della salita.

A questo punto, si accorge che esiste un punto lungo il percorso in cui, durante i due viaggi, e` passato alla stessa ora del giorno.

In che condizioni puo` avvenire questo?

5. Soluzioni & note su [001]

Beh, ragazzi, potevate fare di meglio... Vi siete tutti concentrati sui cani, tranne poche eccezioni. Spero non vi aspettiate ogni volta dei problemi di quel tipo, in quanto non credo di farcela a tirarne fuori uno al mese.

5.1 Il quadrato di nascita

...Facciamo una piccola aggiunta (poca roba: una riga e una colonna):

	11	**2**	**4**	**17**	**0**
6	17	8	10	23	6
1	12	3	5	18	1
3	14	5	7	20	3
8	19	10	12	25	8
5	16	7	9	22	5

E` facile ("siii?") notare che una cella e` la somma dei numeri corrispondenti nella prima riga e nella prima colonna; quindi, quando coprite il "20" e cancellate tutta la riga, in pratica tenete l'unico numero che abbia come componenti "3" e "17", cancellando tutti gli altri numeri che hanno una di queste due componenti.

Alla fine del gioco, avete tenuto cinque numeri formati ciascuno dalla somma di una diversa coppia; sommandoli, non fate altro che trovare la somma dei dieci numeri originali. Procedendo al contrario (prima scrivete i numeri, poi fate le somme) potete ottenere (quasi) qualsiasi costante.

La cosa funziona anche con le altre operazioni, basta che sia sempre la stessa. Se non vi e` chiaro il metodo, provate con una riga e una colonna di generatori che siano dei numeri primi, costruite la tabella, giocate e moltiplicate i risultati: a questo punto, lo schema dovrebbe essere chiaro. I numeri primi servono per visualizzare piu` facilmente il funzionamento, in realta` potete provare con qualunque numero; soprattutto, se volete che il risultato sia il vostro anno di nascita, lavorare con i numeri primi puo` essere arduo (delusione! Il mio anno di nascita "aveva l'aria prima", invece e` divisibile per 19 e 103; ho almeno la soddisfazione di avere due fattori difficilmente "trattabili"; nessuno nato nel 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999?)

Il "rimescolare" una semplice tabella dell'addizione rende il gioco abbastanza complicato, soprattutto se si usano dei numeri scelti un po` a casaccio, diversi e non consecutivi come generatori; se, invece, facciamo una tabellina la piu` semplice possibile (riga generatrice uguale a 12345, colonna "ad hoc" per semplificarci la vitra), otteniamo una versione in cui il risultato e` piuttosto immediato: la famosa versione "aahh, che idiozia!":

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15
15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25

utile se siete nati nel '65...

Fran e Piero hanno trovato un modo per costruirlo che e` tanto complicato quanto divertente (e` molto divertente...) e me lo hanno riferito verbalmente: si basa sul fatto che una scelta possibile e` mettere le monete su una *diagonale*, che quindi deve dare la mitica costante; inoltre, si puo` procedere in modo induttivo partendo da una serie di quadrati piu` piccoli che daranno un altro valore, ma avranno comunque una costante.

Per cominciare, scegliamo due numeri "abbastanza piccoli" e inseriamoli (si veda lo schema alla pagina successiva) in A1 e B2. questa e` la diagonale del nostro quadrato di inizio, un semplice 2x2; chiaramente, sono "giocate valide" sia A1+B2 (A1 cancella A2 e B1, B2 non cancella niente) che A2+B1 (A2 cancella A1 e B2, B1 non cancella niente); quindi deve essere B1+A2=A1+B2; potete scegliere due numeri qualsivoglia, purche` soddisfino questa condizione.

A questo punto, abbiamo il quadrato 2x2; mettiamo un altro numero in C3 (sempre piuttosto piccolo). La costante del quadrato 3x3 diventa A1+B2+C3 e le incognite sono C1, C2, A3, B3. Abbiamo allora come giocata possibile C1+B2+A3, sempre uguale a A1+B2+C3 ma con C1 e A3 incognite. Basta inventarsene due che facciano quadrare la somma. E` triviale a questo punto trovare C2 e B3: basta trovare delle "coperture" con la moneta su uno ma non sull'altro: ad esempio, per C2, C2+B1+A3 (uguale alla costante, solo C2 incognito).

...E avanti cosi`; c'e` gente che, alla panoramica con pendenza massima del 3%, preferisce il sesto grado superiore a strapiombo sui coccodrilli. Complicato, ma divertente...

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1					
2					
3					
4					
5					

Da un tentativo precedente di soluzione di Fran e` nata un'interessante considerazione: ammetto che la "ripetizione" del 5 nel quadrato originale e` "seccante"; non si potrebbe avere un quadrato senza ripetizioni? Il quadrato avente costante minima di lato 5 senza ripetizioni e`, evidentemente, il quadrato idiota con costante 65; quindi, per il mio anno, niente da fare....

Espansione: Cosa ne dite di dimostrare che la costante dei quadrati idioti e` $\frac{n^3+n}{2}$, dove "n" e` il lato?

Dai, e` facile...

5.2 Due problemi sulle ellissi

Noto con dispiacere che non vi siete impegnati particolarmente in merito...Il contributo piu` interessante viene dall'esterno. Piero mi segnala che:

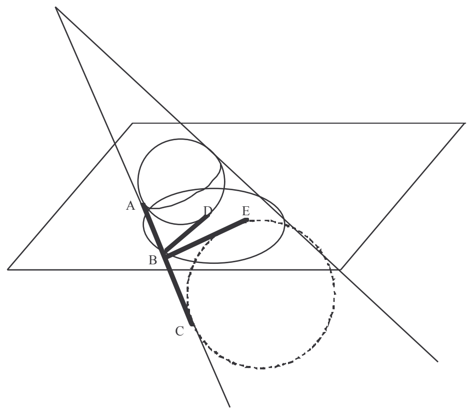
"Ellisse" e` femminile; quindi, "Due problemi sulle ellissi"

Vero. Sono curve, sezioni coniche, parabole, anche l'iperbole lo so che e` femminile ma, non so perche`, l'ellisse suonava "maschio". Profonde ed umili scuse.

Bene, dopo questa nota sul sesso ellittico, passiamo ai problemi.

5.2.1 Ombra di una sfera

Spiacente, ma devo fare un disegnino.... La mia inettitudine in merito e` nota al mondo intero.



1. Che l'ombra sia un ellisse e` abbastanza immediato: la luce (piu` l'ombra dietro la sfera) formano un cono che e` secato dal piano su cui giace l'ombra; come cono secato completamente da un piano, la figura deve essere un ellisse.
2. ...Ma allora, cosa c'entra la sfera sotto? Serve per fare un disegno solo: adesso la usiamo.

   Si tratta di dimostrare che la sfera continua appoggia su uno dei fuochi: all'uopo, tracciamo la seconda sfera che e` tangente al cono d'ombra e al piano di proiezione (non ditelo in giro, ma tange nell'altro fuoco...). Consideriamo i segmenti AB e BD (sullla superfice laterale del cono il primo, dalla superfice al punto di tangenza della sfera reale l'altro); essendo segmenti tangenti alla sfera originati dallo stesso punto, sono di lunghezza uguale; al variare del punto B sull'ellisse, variera` la loro lunghezza ma resteranno uguali. Ugual ragionamento e` applicabile ai segmenti BE e BC sulla sfera immaginaria.

   WAIT! AB+BC e` costante, in quanto segmento generatore di un tronco di cono avente come basi il cerchio massimo della sfera reale e il cerchio massimo della sfera immaginaria! Ma allora DB+BE=costante, e B definisce il luogo dei punti per cui e` costante la somma delle distanze da due punti dati, che sono i punti di tangenza delle sfere al piano. Ma questa e` la definizione di ellisse. **Q.E.D.**

Piaciuta? quando dicevo che era tosta, mi riferivo al dover fare il disegno...

Per la dimostrazione del fatto che i segmenti tangenti originati dallo stesso punto sono di lunghezza uguale, se non vi fidate dell'impressione, il consiglio e` di passare alle due dimensioni, cosa sempre possibile in quanto due rette con un solo punto in comune (B) individuano sicuramente un piano.

5.2.2 Iscrizioni impossibili

Non farei mai parte di un circolo disposto ad accettare la mia iscrizione (Groucho Marx)

Questa era facile:

Un "n"-agono regolare e` sempre iscrivibile in un cerchio, quindi i suoi vertici sono su un cerchio; un cerchio seca un ellisse in quattro punti: quindi, gli "n>4"-agoni non sono iscrivibili.

5.3 Problema da cani...

Su questo vi siete impegnati; bravi ragazzi...

La soluzione formalmente piu` corretta (anche se un po` noiosa, tant'e` che ha dovuto "vivacizzarla") e` di Fran. Riporto testualmente:

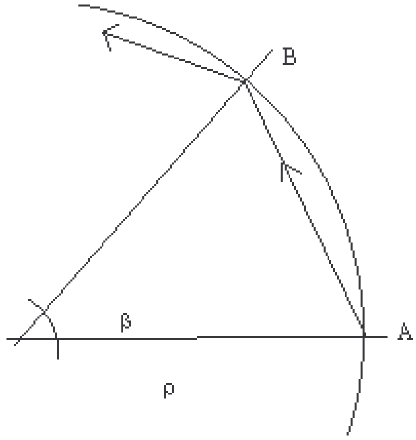
Supponiamo che questi quattro cani, contrariamente alla tendenza che li porta a rincorrere la propria coda, decidano di rincorrersi tra loro.

Il problema puo` essere generalizzato ad un numero di cani qualsiasi, per cui esageriamo e introduciamo il numero N di cani rabbiosi.

Inizialmente si trovano tutti su una circonferenza, a distanze uguali, cioe`, in linguaggio astrusamente matematico, ai vertici di un N-agono regolare.

Ne disegno un paio: A e B, sistemati su una circonferenza di raggio r, l'ampiezza dell'angolo al centro della circonferenza e` ovviamente:

$$\beta = \frac{2\pi}{N}$$



Il cane A (sarebbe stato meglio chiamarlo Toby, come tutti i cani che si rispettano, ma la simbologia matematica tende a mantenere i simboli un po' seccamente freddini…) si muovera` in direzione del cane B, seguendo la corda AB, e lo stesso comportamento sara` seguito da tutti gli altri cani. E` abbastanza credibile, anche per gli osservatori poco attenti, che tutti i cani percorreranno la stessa traiettoria, proprio perche` la simmetria del problema e` centrale: ad ogni istante i cani si troveranno su una circonferenza, e sempre ad una distanza angolare identica a quella di partenza.

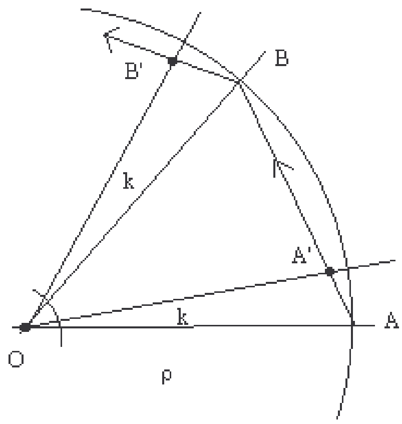
Definiamo la posizione del cane A con coordinate polari: all'istante iniziale sara`:

$$\begin{cases} \alpha(0) = 0 \\ \rho(0) = \rho \end{cases}$$

Cio` significa che, se questa e` la situazione al tempo t=0 (istante iniziale), e definendo una velocita` di rotazione per α, per esempio

$$\alpha = kt\ ,$$

all'istante t=1 si avra` la situazione visualizzata nella figura qui sotto:



Il nuovo valore di α non e` altro che l'incremento k:

$$\alpha(t+1) = kt + k$$

La nuova posizione del cane A e` A', posizione che puo` essere meglio specificata ricordando il teorema dei seni:

$$\frac{\sin(A'OA)}{A'A} = \frac{\sin(OAA')}{A'O} = \frac{\sin(AA'O)}{OA}$$

Ricordando le proprieta` dei triangoli si possono fare le seguenti deduzioni:

$$BOA = \beta \qquad \text{(come si e` gia` visto)}$$

$$OAA' = ABO = \frac{\pi - \beta}{2} \qquad \text{(dato che ABO e` isoscele)}$$

$$AA'O = \pi - (A'OA + OAA') = \pi - k - \frac{\pi - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - k + \frac{\beta}{2}$$

A'O e` il valore di ρ al tempo t=1:

$$\rho(1) = A'O = OA\frac{\sin(OAA')}{\sin(AA'O)} = \rho(0)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - k + \frac{\beta}{2}\right)} = \rho(0)\frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(k - \frac{\beta}{2}\right)}$$

Il ragionamento seguito finora puo` essere generalizzato:

$$\rho(t+1) = \rho(t)\frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(k - \frac{\beta}{2}\right)} = \rho(t)M$$

Dove M e` una costante che non dipende dall'istante in cui viene calcolato r.

Infine, utilizzando un ragionamento induttivo:

$$\begin{aligned} \rho(0) &= \rho \\ \rho(1) &= \rho M \\ \rho(2) &= (\rho M)M \\ &\dots \\ \rho(t) &= \rho M^t \end{aligned}$$

Cioe` l'equazione della curva tracciata da A e` la seguente:

$$\begin{cases} \alpha(t) = kt \\ \rho(t) = \rho M^t \end{cases}$$

una spirale.

E` destino che questi poveri cani si incontrino nel centro della circonferenza, ma, se il raggio iniziale e` sufficientemente grande si potranno divertire a fare un certo numero di giri prima di potersi mordicchiare allegramente le code.

Beh, non e` semplicissima, ma e` corretta...Per le persone cui questa dimostrazione pare troppo arida, c'e` una proposta di Luca, che secondo me merita di essere sviluppata; cito testualmente:

Per quello dei cani ho la soluzione formale in testa per il numero di cani da 0 (il piu' facile) a 2 (sembra gia' difficile ma non lo e'). Il vero problema e' per un cane solo, il povero che fa? Sta fermo oppure cerca di mordersi la coda girando su se stesso? Bisognerebbe provare con un cane vero pero' vai tu ad insegnarli cio' che deve fare!

5.3.1 Fe, fi fo, fum, I smell the blood of an englishman!

...Che sarebbe la versione originale di "ucci, ucci, ucci...". La proposta di Luca mi ha messo una corposissima pulce nell'orecchio. Dopo aver passato un'intera serata sulla mia poltrona meditatoria, in compagnia di mezza scatola di tabacco e un'aria imbronciata, ci sono arrivato. Supponiamo **n=4**, i cani sono ai vertici di un quadrato di lato **a**: siete in grado di dimostrare, ***senza calcoli****, quanta strada percorrera` ogni cane prima di incontrare gli altri?* Dalla frase di Fran (anche se non lo dice) sembra una distanza notevole, ma non e` vero...

...Alla prossima!

Rudy D'Alembert