QUADRILATERO A LATI QUALSIASI (IL PROBLEMA DI GENNAIO 2011)

Suppongo dati quattro segmenti a,b,c,d qualsiasi , che possano formare un quadrilatero ABCD , con AB = a ; BC= b ; CD = c ; DA = d , coi vertici e i lati in senso orario a partire da A nell'angolo inferiore sinistro .

Immagino di costruire un quadrilatero articolato con aste e cerniere di collegamento. Il sistema ha un solo grado di libertà, tenendo bloccata la base d. Gli altri tre lati si possono disporre in 6 maniere diverse , ma solo tre sono le configurazioni differenti : dabc , dacb , dbac . Le altre tre si ottengono per riflessione speculare di queste , rispetto ad un asse perpendicolare alla base d .

Prendo dunque la configurazione ABCD (base d , lati abc a seguire da A in verso orario).
Indico con le stesse lettere ABCD gli angoli . Tracciata la diagonale BD = h , ho due triangoli , ABD e BDC , rispettivamente di aree :

ABD = ½ ad senA BDC = ½ bc senC

perciò il quadrilatero ha area : S = ½ (ad senA + bc senC) (1)

Ora esprimo h^2 col teorema di Carnot applicato ai due triangoli:

Triangolo ABD : h^2 = a^2 + d^2 – 2ad cosA
Triangolo CBD : h^2 = b^2 + c^2 – 2bc cosC

Uguaglio i secondi membri , e ricavo che : cosC = (b^2 + c^2 – a^2 – d^2 + 2ad cos A) /2bc (2)

che , ponendo : k = (b^2 + c^2 – a^2 – d^2) /2bc ; m = ad/bc

si può scrivere : cosC = k + m cosA (3)

A e C sono angoli opposti .

Lo scopo é chiaro : voglio esprimere l'area S in funzione del solo angolo A, oltre che del valore noto dei lati, essendo una sola la variabile indipendente (angolo A, per esempio) , poichè uno solo è il grado di libertà , come già detto . Si ha :

S = ½ ad senA + ½ bc sen [arccos (k + m cosA)] (4)

Derivo dS/dA , e pongo la derivata uguale a zero. Ricavo quindi il valore di A per cui l'area è massima .I calcoli sono lunghi e tediosi ...Ve li risparmio !

Si trova , alla fine , la semplice equazione di secondo grado in cosA :

(cosA)^2 = (k + m cosA) ^2 (5)

Risulta che nella parentesi al secondo membro della (5) non c'è altro che cosC !

Le soluzioni della (5) sono due : A=C oppure A + C = 180° : la prima non è utile.

Ciò vuol dire che , perchè l' area sia massima, fissati i valori dei lati, i due angoli opposti A e C devono essere supplementari .

E' chiaro quindi che anche gli altri due angoli opposti B e D sono supplementari , visto che la somma dei quattro angoli è 360° . Si sarebbe potuto tracciare l'altra diagonale, dividendo ABCD nei triangoli ABC e ADC , e fare lo stesso procedimento , trovando B = D oppure B+D = 180 ° .

Si può dimostrare, in generale, che :

1) - un quadrilatero che ha gli angoli opposti supplementari , risulta inscritto in una circonferenza. Questa tesi è invertibile : data una circonferenza , qualunque quadrilatero inscritto ha gli angoli opposti supplementari .

Infatti , comincio proprio da quest'ultima. Data una circonferenza , e disegnato un quadrilatero inscritto ABCD , considero due vertici opposti , ad es B e D , e li congiungo col centro O della circonferenza . B e D dividono la circonferenza in due archi, uno passante per A e l'altro passante per C . Sull'arco BCD insiste l'angolo al centro , che essendo il doppio dell'angolo alla circonferenza A , misura 2A . Sull'arco BAD insiste l'angolo al centro 2C , doppio di C .
Poichè si ha : 2A + 2C = 360 ° , è anche : A + C = 180° .
Lo stesso vale per gli altri due angoli (si dimostra analogamente) : B + D = 180° .
Ora c'è l'inverso : per ipotesi ABCD ha gli angoli opposti supplementari. Allora deve essere inscritto in una circonferenza. Lo dimostro così .
Traccio una diagonale , ad es. AC (tanto per cambiare..) , e ottengo due triangoli ACB e ACD, col lato AC in comune. Disegno la circonferenza circoscritta al triangolo ACB (il centro O è il punto di intersezione degli assi di due lati). Devo mostrare che anche D giace su questa circonferenza.
Congiungo O con A e C . Gli angoli al centro che insistono sull'arco AC sono uno uguale a 2B , l'altro uguale a 2(180-B) .
Suppongo ora, per assurdo, che D NON giaccia sulla circonf. circoscritta al tr. ACB : quindi esiste un'altra circonferenza , che circoscrive il tr. ACD , e ha in comune con la prima la corda AC .
Gli angoli al centro che insistono sull'arco AC nella seconda circonf. saranno diversi da 2B e 2(180-B) , poichè il punto B non giace su questa circonf. Il che vuol dire che l'angolo in D non è uguale a (180-B) , contro l'ipotesi .
In conclusione, esiste un'unica circonferenza che circoscrive I due triangoli e quindi il quadrilatero ABCD , avente gli angoli opposti supplemetari . (NB : ho considerato solo un quadr. convesso....)

2) - dato un quadrilatero di lati assegnati , la configurazione cui corrisponde l'area massima ha gli angoli opposti supplementari, e l'area massima è la stessa per tutte le disposizioni dei lati, cioè non dipende dal loro ordine .

La prima parte è già stata dimostrata all'inizio della soluzione , ponendo dS/dA = 0 . Ovviamente il valore di S è massimo , per come è stato ricavato.
Per dimostrare la seconda parte : " l'area massima non dipende dall' ordine dei lati " , si può fare così :
Disegno una circonferenza qualsiasi (ora si deve dimostrare una proposizione di carattere generale , quindi non importano i numeri) , ed un quadrilatero qualsiasi inscritto : gli angoli opposti sono supplementari ,per quanto detto in 1) , e questo quadrilatero, tra tutti quelli aventi gli stessi lati di quello disegnato, ha area massima (non è l'unico, però : la forma varia a seconda dell'ordine dei lati, ma solo la forma, come vedremo, non il valore dell'area max)
Traccio la diagonale BD di ABCD e divido il quadr in due triangoli , DAB e BCD . Tenendo fissi i due lati DA ed AB, inverto l'ordine dei lati BC e CD : il nuovo vertice C' è sempre sulla circonferenza , l'angolo C' vale sempre (180 - A) perchè insiste sullo stesso arco, e i due triangoli BDC e BDC' hanno la stessa area ,come si vede facilmente con la Geometria elementare. Sommando a ciascuno di essi l'area del tr DAB , ottengo la stessa area di due diverse configurazioni del quadrilatero. Si può ripetere per tutte le configurazioni , il risultato è lo stesso .
Ma c'è anche una giustificazione algebrica molto banale . Nella formula dell'area , ponendo senA = senC , (visto che A + C = 180°) si ha :

$$S = \tfrac{1}{2} (ad \operatorname{sen}A + bc \operatorname{sen}C) = \tfrac{1}{2} (ad + bc) \operatorname{sen}A \quad (6)$$

dalla (5) , essendo : $\cos A = - (k + m \cos A)$

e cioè : $\cos A = -k/ (1+m)$

ricavo senA , come funzione di k e di m , (cioè in sostanza funzione dei lati , tenuto conto di k e di m) , sostituisco senA nella formula (6) , e dopo vari passaggi (che non vi consiglio) ricavo una specie di formula di Erone per l'area del quadrilatero con angoli opposti supplementari, cioè inscritto in una circonferenza : detto p il semiperimetro , si ha :

$$S = \mathrm{sqrt}\,[(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)] \qquad (7)$$

E' più che evidente , dunque, che dati i lati a,b,c,d , l'area non dipende dalla loro successione ! Potrebbe sembrare a prima vista strano che , mentre per i triangoli la formula di Erone vale sempre , per il quadrilatero vale solo quando è inscritto in una circonferenza . E invece non è strano per nulla , se si pensa che tutti i triangoli sono inscrivibili in una circonferenza.

CALCOLI NUMERICI

Con i dati forniti dalla rivista , prendo la disposizione : d=4 , a=4 , b=1 , c=2

Le due soluzioni sono :

$$\cos A = 8\cos A - 6.75$$
$$\cos A = -8\cos A + 6.75$$

dalla prima si ricava : cosA = 6.75/7 = 0.96428 ; dalla seconda : cosA = 6.75 / 9 = 0.75 .

Perciò , dalla prima A = C = 15.36 ° : con questi angoli , il quadrilatero NON sarebbe convesso . L'area varrebbe , se ho calcolato bene : S = 2.384 .

Dalla seconda soluzione si ricava : **A = 41.41°** , quindi il supplementare è : **C = 138.59 °** . Con le dovute sostituzioni nella formula dell'area si ha :

S = ½ (ad senA + bc senC) = ½ (ad + bc) senA = 5.95 (approx alla seconda cifra decimale) (6)

PERCIÒ L'AREA MAX VALE : S = 5.95 dm^2

e' questo il valore massimo , con i lati da 4 consecutivi .Curiosamente , se aprissimo al massimo la forbice tra i lati d ed a , fino ad allineare i lati b e c , si avrebbe un triangolo isoscele di base 3 , lati obliqui 4 , di angolo A = 44,04° e area S = 5,5621 , minore di quella trovata . Dobbiamo chiudere solo un po' la forbice , per avere l'area massima del quadr. di lati dati.

Passo ora ad esaminare la configurazione con i lati da 4 opposti : d=4 , a=1 , b=4 , c=2
Ovviamente devo trovare lo stesso risultato per l'area , ma la forma (gli angoli) sono diversi .

Calcolo prima i differenti valori numerici di k ed m . Le due soluzioni della (5) sono ora :

$$\cos A = +0.5\cos A + 0.1875$$
$$\cos A = -\,0.5\cos A - 0.1875$$

Con la prima soluzione , cosA = cosC = 0.375 . Quindi : A = C = 67. 97 ° . Con le dovute sostituzioni nella formula dell'area si ha : S = 5.56 . Non è questa la massima .

Con la seconda soluzione , cosA = - cos C = - 0.125 . Da cui **A = 97.18 ° , e C = 82.82 °** .
Con le dovute sostituzioni nella formula (6) dell'area si ha : S = 5.95 (approx alla 2° cifra decimale)

PERCIÒ , ANCHE QUI L'AREA MAX VALE : S = 5.95 dm^2

come nella precedente disposizione dei lati ! E non poteva essere diversamente. Le disposizioni diverse , con due lati da 4 , sono solo due , oltre alle speculari.

Con la formula simil-Erone , si ha :

p = 5.5 , da cui : S = sqrt [1.5*1.5* 4.5*3.5] = 5.9529 dm^2 .

Se i lati fossero stati tutti diseguali, ad es. 1,2,3,4 , sarebbe :

p = 5 , da cui : S = sqrt (4*3*2*1) = 4.899 dm^2 circa .

Ovviamente , cambiano gli angoli , e le ora disposizioni diverse sono tre , oltre alle speculari .

Ne considero una sola , la 4123 (4 è la base d fissa , 1,2,3 sono i tre lati abc in ordine orario a partire dal vertice inferiore sinistro A) . Risulta :

cosA = -k/ (1+m) = 0.2 , da cui : A = 78.463°

Inoltre , per verifica dell'area : S = ½ (ad + bc) senA = ½ (1*4 + 2*3) * 0.9798 = 4.899 dm^2

L'angolo B , scrivendo la formula dell'area nell'altro modo : S = ½ (ab + cd) senB , si ricava da:

(ad + bc) senA = (ab + cd) senB

ovvero : senB = senA * (ad + bc) / (ab + cd)

Sostituendo i numeri , si trova : senB = senA / 1.4 = 0.6998 , da cui B = 135.58° (il valore 44.41° è il supplementare) .

Per riassumere, i risultati principali sono questi :

1. dati quattro segmenti che siano in grado di formare un quadr. (ciascuno deve essere minore della somma degli altri tre) , il quadr di area massima ha gli angoli opposti supplementari
2. condizione necessaria e sufficiente perchè un quadr abbia gli angoli opposti supplementari è che esso sia inscritto in una circonferenza (quadr convesso, non ho indagato sul concavo....)
3. l'area massima , a parità di misure dei lati (pure tutti e quattro disuguali) , non dipende dall' ordine dei lati .

LA CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA

Per costruire il quadr . MAX1234 , devo ora trovare la circonferenza circoscritta .

Innanzitutto , una osservazione .

Provo a disegnare la circonferenza di diametro AD = d = 4 , con centro nel punto medio O' di AD e raggio O'A = 2 . Da A , con raggio 1 , la interseco in B' ; da D , con raggio 3 , la interseco in C' . E' facile vedere che i due triangoli AB'D e AC'D sono rettangoli in B' e rispettivamente in C' . Ma il quadrilatero AB'C'D **non è** quello che vogliamo , poichè si vede (io l'ho fatto con la Geometria analitica, e verificato con Geogebra) che la distanza B'C' è, sia pure di poco, inferiore a 2 ; vale infatti : 1,81 circa .
Questo vuol dire che la circonferenza disegnata , di diametro AD = 4 , **non è** quella che circoscrive il reale MAX1234 . LA circonferenza che cerchiamo è leggermente più grande , e il suo centro O è diverso da O' , pur essendo sempre sull'asse di AD (e degli altri 3 lati a, b , c) , sicchè AD è una corda , pochissimo distante dal centro O.
Con la Geometria analitica , ponendo A nell'origine (0,0) di un rif. cartesiano , e D in (4,0) , l'asse di AD ha equazione : x = 2 . Tracciata in A la retta t di equazione : y = tgA * x (dove A = 78.463°) , si determina l'asse di AB (B dista 1 da A e appartiene alla retta t) , il quale incontra l'asse di AD nel punto O , centro della circonferenza cercata.

Risulta che O ha coordinate : (2 , 0.1) , quindi è poco al di sopra dell'asse x . La circonferenza cercata ha raggio r = sqrt (4+0.01) = 2.0025 , che differisce da 2 di soli 25

decimillesimi circa .

L'equazione della circonferenza é : $(x - 2)^2 + (y - 0.1)^2 = 4.01$

E ora , il trucco alla Beppe : riscaldo i lamierini al calor bianco , li curvo e faccio una circonferenza lunga 10 dm , che racchiude un'area di 7.96 dm^2 (oppure , con le misure 1,2,4,4 , ottengo 9.63 dm^2)
Rudy lavora di più , Piotr mangia di più .