Sbronza monodimensionale

Rudi Matematici - Luglio 2012

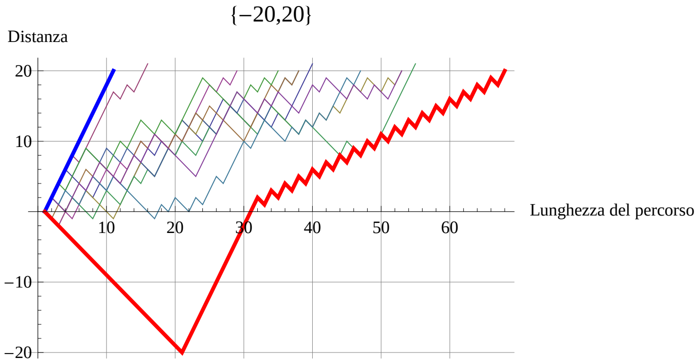
Soluzione di Carlo

- **Il quesito di Rudy**

  I Rudi sono al centro di un percorso rettilineo che fronteggia il mare e che si estende per N passi a destra e N passi a sinistra. Piotr deve andare a prendere tre birre al chiosco, che si trova a N passi a destra, usando una procedura ideata da Rudy: lanciare una moneta e se esce testa posizionarsi due passi a destra; se esce croce, posizionarsi un passo a sinistra. Piotr potra' muoversi tra N e -N e alcuni numeri non saranno toccati.
  Se il totale di questi numeri non toccati e' m, Rudy chiede il valore del rapporto $\frac{m}{2N+1}$;

- **Rappresentazione grafica di alcuni dei percorsi possibili**

  Nel grafico sono riportati alcuni possibili percorsi relativi a N=20. In Blu e' riportato il percorso piu' breve possibile (una successione di 10 teste della moneta; in Rosso e' riportato uno dei possibili percorsi piu' lunghi.
  In Blu abbiamo l'unico caso in cui i punti non toccati sono $N + \frac{N}{2}$ ovvero 30 e con un rapporto pari a $\frac{30}{41}$ = 0,731707.
  L'esempio in rosso ha un rapporto pari a 0, evidentemente.



  Questo problema e' stato esaminato con tre metodi:

  - Simulazione
  - Probabilita'
  - Calcolo Combinatorio

Simulazione

Il programma di simulazione raccoglie i seguenti dati relativi ad un intervallo { -N, N }

- *Lunghezza del percorso.*
- *Posti toccati durante il percorso.*
- *Posti non toccati durante il percoso.*

Il programma viene iterato “m” volte e, alla fine, vengono forniti i seguenti dati:

- *Distribuzione delle lunghezze del percorso.*
- *Distribuzione dei posti non toccati.*

Di seguito sono riportati Valor medio e Varianza per le distribuzioni di Lunghezze di percorso e Rapporti, nei casi di N = 100, 500, 2000.

N = 100

Lunghezze = {201.932`, 1807.058}
Rapporti = {0.5647, 0.0005}

N = 500

Lunghezze = {1001.877`, 9066.693}
Rapporti = {0.571, 0.000092}

N = 2000

Lunghezze = {4001.6978`, 35837.552}
Rapporti = {0.5725988, 0.000022554}

Statistica

L'obiettivo era quello di pervenire alle distribuzioni teoriche funzioni di N utilizzando alcuni principi propri della statistica.
I principali principi utilizzati sono :
- La varianza di una somma di variabili casuali indipendenti e' la somma delle loro varianze.
- La legge dei grandi numeri che asserisce che la media aritmetica di una somma di variabili casuali indipendenti(ognuna con media μ e varianza σ^2)differisce dal suo valore probabile μ per una differenza ϵ che tende a zero per numero di variabili tendente a ∞.
- Distribuzione campionaria delle medie.

Nel nostro caso la variabile casuale associata al lancio della moneta secondo la regola di Rudy e':

z = {-1 , 2}

Il valore medio e la varianza di zeta sono: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right\}$

Sia k1 = la probabilita' dell'evento testa e k2 = la probabilita' dell'evento croce.
Siano m1 il numero deli eventi testa e m2 il numero degli eventi croce.
Si ha che:

k1 = k2
2 m1- m2 = N
La media delle Lunghezze di percorso sara' 2 N
La varianza delle Lunghezze di percorso sara' 4 N $\frac{9}{2}$

Prima conclusione

Le Lunghezze di percorso sono distribuite secondo una Distribuzione Normale avente media = $\frac{N}{2}$ e Deviazione Standard = $3\sqrt{2N}$

Ora bisogna considerare la correlazione che esiste tra la lunghezza del percorso e il numero di posti non toccati.
Rudy ha gia' fatto osservare che al crescere della lunghezza di percorso diminuisce il numero dei posti non toccati.
Dalla rappresentazione grafica di alcuni percorsi si e' visto che il rapporto richiesto vale $\frac{3N}{1+2N}$ nell'unico caso di lunghezza piu' breve e potrebbe valere 0 per lunghezze pari o superiori a 3.5 N.

Seconda conclusione

Il valore del rapporto e' legato (statisticamente) alla lunghezza del percorso dalla seguente relazione:

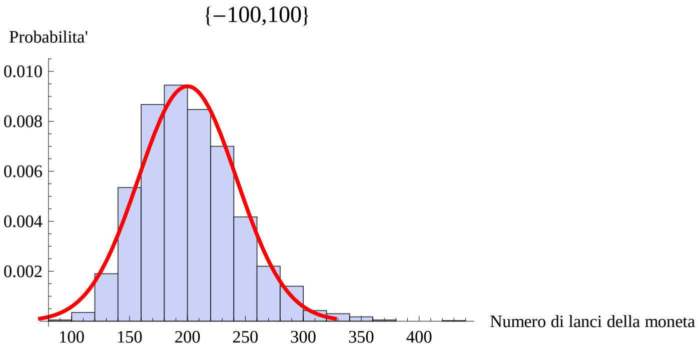
R = $\frac{12N-3\,\mathrm{LP}}{7+14N}$ dove LP e' la Lunghezza Percorso.

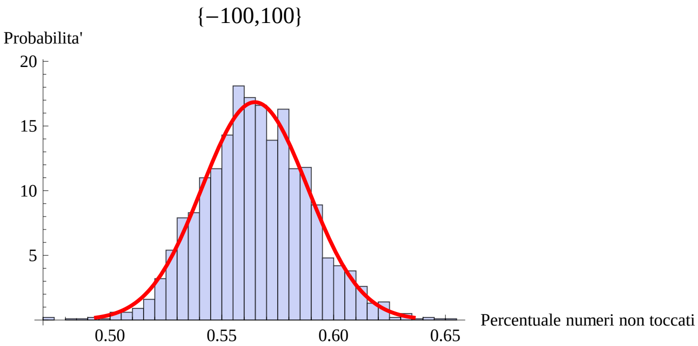
Ora e' possibile ricavare con trasformazione di variabile la probabilita' di distribuzione di R associata alla probabilita' di distribuzione delle Lunghezze deui percorsi.

■ Esempi

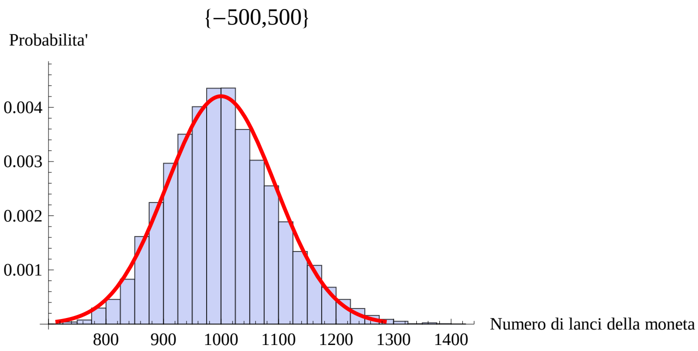
Vengono riportate le distribuzioni di probabilita' teoriche (in rosso) sovrapposte ai corrispondenti dati da simulazione.

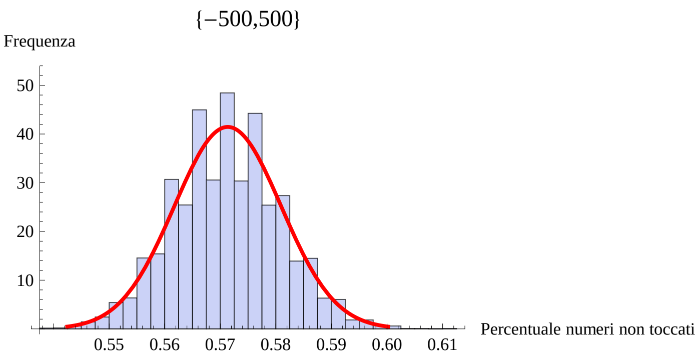
N =100



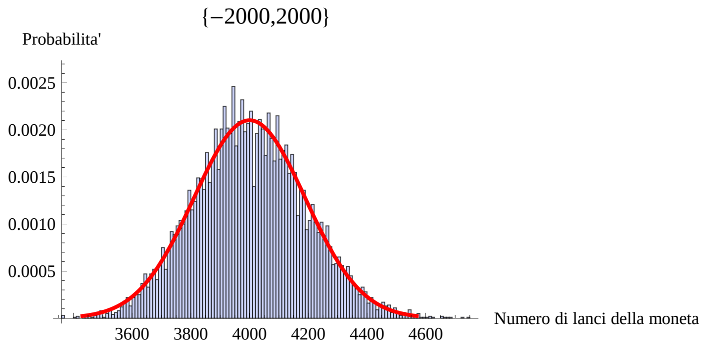


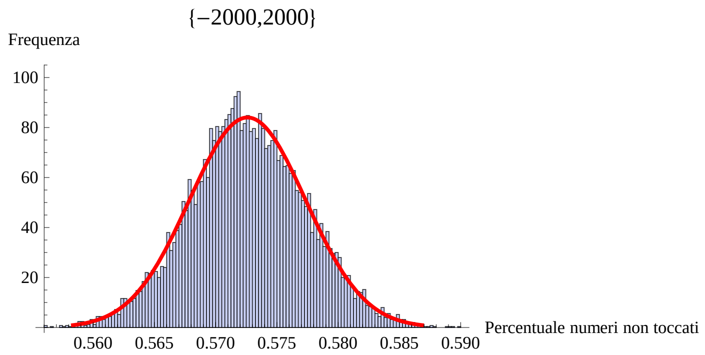
N = 500





N = 2000


{−2000,2000}
Probabilita'
0.0025
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
3600
3800
4000
4200
4400
4600
Numero di lanci della moneta


{−2000,2000}
Frequenza
100
80
60
40
20
0.560
0.565
0.570
0.575
0.580
0.585
0.590
Percentuale numeri non toccati

Calcolo Combinatorio

Con la statistica si puo' ottenere il valore di R richiesto con il grado di precisione voluto.
Mi sono chiesto se era possibile determinare la probabilita' di passare in un certo posto compreso tra -N e N dopo m lanci di moneta.
Supponiamo di avere un intervallo con N = 5 e costruiamo la seguente matrice (detta matrice dei passi):

s/d	0	1	2	3	4	5
0	0	2	4	6	8	10
1	−1	1	3	5	7	9
2	−2	0	2	4	6	8
3	−3	−1	1	3	5	7
4	−4	−2	0	2	4	6
5	−5	−3	−1	1	3	5

i numeri in giallo riportano rispettivamente i passi effettuati verso destra (Testa della moneta) e i passi effettuati verso sinistra (Croce della moneta).
La probabilita' di trovarsi in una certa casella e' data dalla seguente matrice:

s/d	0	1	2	3	4	5
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{21}{128}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{7}{32}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{63}{256}$
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{63}{256}$	$\frac{63}{256}$

Per capire come si ottiene occorre generare prima la seguente matrice in cui il valore di una casella e' dato dalla somma dei valori della casella superiore e di quella alla sua sinistra. La riga 1 e la colonna 1 sono sempre 1. Questa matrice rappresenta i percorsi diversi che una torre, nel gioco degli scacchi, puo' effettuare per arrivare in quella casella partendo dall'angolo in alto a sinistra.
Per altri, conviene osservare la matrice in diagonale, con la casella {0,0} in alto e si riconoscera' il Triangolo di Tartaglia.
A questo punto bisogna osservare che anche la matrice dei passi, osservata obliquamente, riporta i posti in cui ci si puo' trovare dopo n passi.
Poiche' i coefficienti di un Triangolo di Tartaglia sono $\binom{i+j-1}{j}$ indicando con i e j le righe e le colonne e poche' la somma dei coefficienti e' pari a 2^{i+j-1}, basta dividere il valore di ogni casella {i, j} per 2^{i+j-1} per avere le probabilita' associate a quel posto.

"s/d"	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3	1	4	10	20	35	56
4	1	5	15	35	70	126
5	1	6	21	56	126	252

La generazione sia dei posti che delle probabilita’ associate a quei posti e’ molto semplice, Ad esempio vediamo affiancati posti e probabilita’ per passi fino a10.

1	{-1, 2}	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$
2	{-2, 1, 4}	$\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$
3	{-3, 0, 3, 6}	$\left\{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right\}$
4	{-4, -1, 2, 5, 8}	$\left\{\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right\}$
5	{-5, -2, 1, 4, 7, 10}	$\left\{\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32}\right\}$
6	{-6, -3, 0, 3, 6, 9, 12}	$\left\{\frac{1}{64}, \frac{3}{32}, \frac{15}{64}, \frac{5}{16}, \frac{15}{64}, \frac{3}{32}, \frac{1}{64}\right\}$
7	{-7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14}	$\left\{\frac{1}{128}, \frac{7}{128}, \frac{21}{128}, \frac{35}{128}, \frac{35}{128}, \frac{21}{128}, \frac{7}{128}, \frac{1}{128}\right\}$
8	{-8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16}	$\left\{\frac{1}{256}, \frac{1}{32}, \frac{7}{64}, \frac{7}{32}, \frac{35}{128}, \frac{7}{32}, \frac{7}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{256}\right\}$
9	{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18}	$\left\{\frac{1}{512}, \frac{9}{512}, \frac{9}{128}, \frac{21}{128}, \frac{63}{256}, \frac{63}{256}, \frac{21}{128}, \frac{9}{128}, \frac{9}{512}, \frac{1}{512}\right\}$
10	{-10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20}	$\left\{\frac{1}{1024}, \frac{5}{512}, \frac{45}{1024}, \frac{15}{128}, \frac{105}{512}, \frac{63}{256}, \frac{105}{512}, \frac{15}{128}, \frac{45}{1024}, \frac{5}{512}, \frac{1}{1024}\right\}$

- **Passo conclusivo:**

Generando un numero di passi uguale o superiore a 5 N e selezionando, per ogni passo "p" , i termini di posto N o N+1 con le relative probabilita' si possono cumulare i contributi di ogni posto. Le probabilita' inferiori a una certa soglia si considerano associate a posti non toccati.

I risultati che si ottengono con questo metodo sono in accordo con la simulazione e la statistica.

Curiosita'

Cercando di capire le probabilita' di Piotr di tornare da Rudy e Alice anziche' raggiungere il chiosco ho impostato la seguente equazione ricorsiva:

$$p(z) = \frac{1}{2}\,(p(z-2) + p(z+1))$$

ovvero: la possibilita' di trovarsi al posto z e' pari alla possibilita' di essrci arrivati dal posto (z-2) piu' la possibilita' di esserci arrivato dal posto (z+1); il tutto diviso per due dato che ogni possibilita' ha probabilita' $\frac{1}{2}$.

Con la funzione RSolve di *Mathematica*, dopo ave posto le tre condizioni al contorno, ho ottenuto:

$$-\left(-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n+z}+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n+z}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n+z}+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n+z}-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n}\right)\Big/ \left(\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-1\right)\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n}-1\right)\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)$$

che coinvolge, piuttosto decisamente direi, la Sezione Aurea o Golden Ratio che dir si voglia.

Non ho indagato oltre, ma mi e' sembrato interessante.

Risposta

Quasi dimenticavo.

La percentuale di numeri che non si tocca e' **0.572599 ± 0.004**

Saluti

Buone vacanze a tutti voi,

Carlo