Tre cartoline da Zanzibar

Rudi Matematici - Settembre 2011

Soluzione di Carlo Ferjancic

- **Risposta**

  Rudy ha puntato sulla sequenza testa-testa-croce ; Doc punta sulla sequenza croce-croce-testa e ha una probabilita' di vittoria del 73.9 % circa.

- **Definizioni**

  Sequenze binarie : sb = {{0,0,0},{0,0,1},{0,1,0},{0,1,1},{1,0,0},{1,0,1},{1,1,0},{1,1,1}};
  sono le 8 sequenze distinte ottenibili con tre lanci di una moneta. Non e' rilevante associare testa a 0 e croce a 1 o viceversa.

  per economia di scrittura delle sequenze riscriviamo sq come
  Sequenze decimali: sd = {1,2,3,4,5,6,7,8}, dove 1 sta per {0,0,0}, 2 per {0,0,1} e cosi' via.

  Le coppie di sequenze ottenibili sono
  {{1,1},{1,2},{2,3},{2,4},{3,5},{3,6},{4,7},{4,8},{5,1},{5,2},{6,3},{6,4},{7,5},{7,6},{8,7},{8,8}}
  in quanto (nella rappresentazione binaria) gli ultimi due elementi della prima sequenza devono essere uguali ai primi due elementi della seconda sequenza.
  Ad esempio, {4,7} e' legittimo in quanto la coppia {0,1,1} e {1,1,0} rispetta questo vincolo;

  Sequenza di gioco.
  Supponiamo che il risultato del lancio della moneta per 6 volte sia stato {1,0,1,0,1,1}; Le quattro sequenze sono state , in successione,
  {{1,0,1},{0,1,0},{1,0,1},{0,1,1}}
  ovvero, in rappresentazione decimale, {6,3,6,4} e sono la "concatenazione" delle coppie {6,3},{3,6} e {6,4}

- **Strategia di gioco**

  Il primo giocatore sceglie una sequenza "A" e il secondo ne sceglie una diversa "B". Vincitore di una partita sara' colui la cui sequenza si presentera' per prima.
  Una sequenza di gioco si puo' rappresentare, come visto, da una successione di numeri decimali, da 1 a 8, in cui ogni numero e il successivo appartengano ad una delle sequenze ottenibili.

  All'interno della sequenza di gioco vi sono un certo numero di sequenze {A,*,B}, {A,*,*,B}, ...{A,*,*,*,*,*,B} dove "*" rappresenta una cifra diversa da "A" e da "B".
  Occorre conoscere la probabilita' che "A" si verifichi prima di "B".
  Scomodando Thomas Bayes si potrebbero effettuare dei calcoli che ci permettono di calcolare questa probabilita' , data una certa lunghezza della sequenza di gioco. Da tener presente che puo' verificarsi una sequenza molto lunga di "*" prima che si verifichi "A" o "B".

  Piu' pragmaticamente, con l'aiuto del PC, ho generato tutte le sequenze di gioco possibili che si possono ricavare con n lanci di moneta ovvero 2^n.
  Ogni sequenza di gioco genera n-2 sequenze. Quindi si devono analizzare (n-2) 2^n sequenze per individuare quelle in cui si verificano i seguenti 3 casi:

1)- prima “A”;
2)- prima “B”;
3)- la sequenza si esaurisce senza che sia uscita “A” o “B”;

La probabilita’ di ogni caso e’ data dal rapporto tra il numero di eventi corrispondenti ad ognuno dei tre casi e 2^n.

Matrice di gioco

La matrice di gioco che fornisce la base per una strategia e’ formata di valori di probabilita’ per ognuna delle 56 possibili scelte:
8 x 8 - 8 (“A” e “B” devono essere diverse).
La seguente matrice e’ stata calcolata per sequenze di gioco di 22 lanci. Una precisione maggiore della probabilita’ puo’ essere ricavata usando sequenze piu’ lunghe, ma i tempi di calcolo crescono notevolmente per incrementi minimi dei decimali esatti.

"X"	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	{"0.493", "0.493", "0.014"}	{"0.395", "0.592", "0.013"}	{"0.400", "0.600", "0.000"}	{"0.125", "0.861", "0.014"}	{"0.416", "0.582", "0.002"}	{"0.300", "0.700", "0.000"}	{"0.493", "0.493", "0.014"}
2	{"0.493", "0.493", "0.014"}	0	{"0.665", "0.333", "0.002"}	{"0.667", "0.333", "0.000"}	{"0.250", "0.739", "0.011"}	{"0.625", "0.375", "0.000"}	{"0.500", "0.500", "0.000"}	{"0.700", "0.300", "0.000"}
3	{"0.592", "0.395", "0.013"}	{"0.333", "0.665", "0.002"}	0	{"0.500", "0.500", "0.000"}	{"0.499", "0.499", "0.002"}	{"0.493", "0.493", "0.014"}	{"0.375", "0.625", "0.000"}	{"0.582", "0.416", "0.002"}
4	{"0.600", "0.400", "0.000"}	{"0.333", "0.667", "0.000"}	{"0.500", "0.500", "0.000"}	0	{"0.500", "0.500", "0.000"}	{"0.499", "0.499", "0.002"}	{"0.739", "0.250", "0.011"}	{"0.861", "0.125", "0.014"}
5	{"0.861", "0.125", "0.014"}	{"0.739", "0.250", "0.011"}	{"0.499", "0.499", "0.002"}	{"0.500", "0.500", "0.000"}	0	{"0.500", "0.500", "0.000"}	{"0.333", "0.667", "0.000"}	{"0.600", "0.400", "0.000"}
6	{"0.582", "0.416", "0.002"}	{"0.375", "0.625", "0.000"}	{"0.493", "0.493", "0.014"}	{"0.499", "0.499", "0.002"}	{"0.500", "0.500", "0.000"}	0	{"0.333", "0.665", "0.002"}	{"0.592", "0.395", "0.013"}
7	{"0.700", "0.300", "0.000"}	{"0.500", "0.500", "0.000"}	{"0.625", "0.375", "0.000"}	{"0.250", "0.739", "0.011"}	{"0.667", "0.333", "0.000"}	{"0.665", "0.333", "0.002"}	0	{"0.493", "0.493", "0.014"}
8	{"0.493", "0.493", "0.014"}	{"0.300", "0.700", "0.000"}	{"0.416", "0.582", "0.002"}	{"0.125", "0.861", "0.014"}	{"0.400", "0.600", "0.000"}	{"0.395", "0.592", "0.013"}	{"0.493", "0.493", "0.014"}	0

Il numero a sinistra di ogni riga individua la scelta del primo giocatore; il numero in testa ad ogni colonna individua la scelta del secondo giocatore.
Ad esempio, il gioco {4,7} ha associata la probabilita' di vittoria del 74% per il primo giocatore e significa che il primo giocatore ha puntato sulla sequenza {0,1,1} e il secondo sulla sequenza {1,1,0}.

Simulazione

Per ogni combinazione di possibili scelte, ho simulato 1000 partite e ho riportato le frequenze di ogni caso.

"X"	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	{0.4977, 0.4886, 0.0137}	{0.3968, 0.591, 0.0122}	{0.3965, 0.6027, 0.0008}	{0.125, 0.8626, 0.0124}	{0.4152, 0.5828, 0.002}	{0.3079, 0.6917, 0.0004}	{0.4953, 0.49, 0.0147}
2	{0.4894, 0.495, 0.0156}	0	{0.6594, 0.3388, 0.0018}	{0.6724, 0.3276, 0.}	{0.2509, 0.74, 0.0091}	{0.6221, 0.3779, 0.}	{0.5004, 0.4996, 0.}	{0.6956, 0.3039, 0.0005}
3	{0.5927, 0.393, 0.0143}	{0.3269, 0.6707, 0.0024}	0	{0.501, 0.499, 0.}	{0.5073, 0.4907, 0.002}	{0.4907, 0.4936, 0.0157}	{0.3747, 0.6253, 0.}	{0.581, 0.4168, 0.0022}
4	{0.597, 0.4027, 0.0003}	{0.3351, 0.6649, 0.}	{0.494, 0.506, 0.}	0	{0.4958, 0.5042, 0.}	{0.4856, 0.5124, 0.002}	{0.7387, 0.2508, 0.0105}	{0.8596, 0.1257, 0.0147}
5	{0.8578, 0.128, 0.0142}	{0.7384, 0.2494, 0.0122}	{0.5036, 0.4932, 0.0032}	{0.4996, 0.5004, 0.}	0	{0.4952, 0.5048, 0.}	{0.3337, 0.6662, 0.0001}	{0.6108, 0.3888, 0.0004}
6	{0.58, 0.4181, 0.0019}	{0.3773, 0.6227, 0.}	{0.4881, 0.5002, 0.0117}	{0.5047, 0.4931, 0.0022}	{0.5019, 0.4981, 0.}	0	{0.3298, 0.668, 0.0022}	{0.5969, 0.3888, 0.0143}
7	{0.697, 0.3024, 0.0006}	{0.5015, 0.4985, 0.}	{0.6348, 0.3652, 0.}	{0.2549, 0.7317, 0.0134}	{0.6723, 0.3277, 0.}	{0.665, 0.3326, 0.0024}	0	{0.5001, 0.487, 0.0129}
8	{0.4893, 0.5001, 0.0106}	{0.3011, 0.6988, 0.0001}	{0.4171, 0.581, 0.0019}	{0.1279, 0.8579, 0.0142}	{0.3947, 0.6051, 0.0002}	{0.4, 0.5869, 0.0131}	{0.499, 0.4887, 0.0123}	0

L'accordo con la matrice "teorica" e' buono anche con un numero ridotto di partite.

Strategia

Primo giocatore:
scegliere la sequenza con il massimo valore di probabilita' tra i minimi dei primi valori di ogni riga {MinMax).

Secondo Giocatore:
Nella riga determinata dal primo giocatore, scegliere la sequenza con il massimo valore della seconda riga.

Tornando al problema, Rudy ha scelto testa-testa-croce ovvero {0,0,1} (se 0 = testa e 1 = croce, significa riga 2.
Doc, che ha memorizzato la matrice, risponde istantaneamente con la sequenza {1,0,0} (croce-testa-testa) con probabilita' di vittoria del 73.9 %.

Saluti

Buon lavoro a tutti voi,

Carlo Ferjancic