Le Scienze Blog – Rudi Matematici

Il gioco delle tre monete

Sintesi di Carlo

Obiettivo:

Cercare di fornire una serie di passaggi che conducano alla comprensione della regola mnemonica che consente la vittoria nel gioco delle tre Monete.

Avvertenza:

Questo problema è stato da me affrontato cinque o sei anni fa quando fu proposto, con altro titolo dai Rudi.

I passaggi che esporrò seguono il mio approccio al problema e, in questo ambito, dovrò utilizzare anche dei documenti PDF che, all'epoca, erano un metodo possibile per trasferire calcoli e risultati ottenuti con Mathematica a chi non lo aveva.

La simbologia adottata per terne di monete è stata, in alcuni casi binaria ({0,1,1} al posto di {C,T,T}) .per motivi di semplicità di elaborazione.

Le probabilità associate alle terne alcune volte si riferiscono al giocatore che propone la prima terna e, altre volte, al giocatore che propone la seconda terna.

Esempio: Nella ricerca della soluzione teorica ho utilizzato anche le funzioni generatrici e in alcuni calcoli era più vantaggioso rovesciare la situazione.

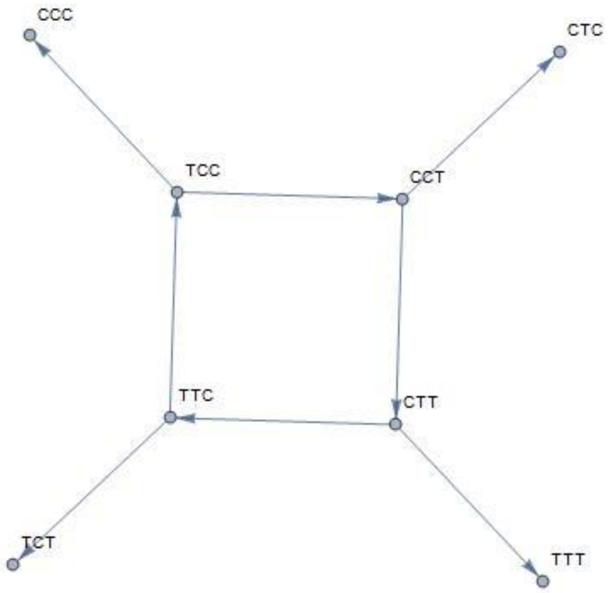
Le funzioni generatrici sono uno strumento molto potente nel campo del calcolo delle probabilita', e non solo,. In rete si trovano ottimi tutorial sull'argomento per approfondire.

Primo passaggio – Simulazione

Aprire il documento "Tre Monete Simulazione.pdf".

Letto?

Bene, allora si capisce anche il perche' del riferimento che ho fatto alla morra cinese osservando il grafo dei rapporti forza tra le coppie di terne. Ogni freccia punta alla terna perdente.



Secondo passaggio – Rapporti di forza teorici

Alla domanda "Perché' ricavare i rapporti di forza teorici se con la strategia vista prima si riesce a giocare decentemente (vincendo)?" si può rispondere che ci sono due motivi legati a due problemi possibili.

1.- imprecisione dei risultati per una simulazione inadeguata.

2.- come ci si comporta se ci troviamo a giocare con una moneta non equilibrata?

Una moneta è non equilibrata quando $P(C) \neq 1\text{-}P(T)$.

Vedremo tra poco che alcuni usano il termine odds anziché' probabilità per definire i rapporti di forza.

Gli odds sono indicati come rapporto f/c dove $i =$ numero di eventi a favore e $v=$ numero di eventi contrari; la probabilità $p = 1/(f+c)$.

Metodo 1 – Funzione generatrice

Caricare il file "Funzione generatrice.PDF"

E' una tabella che il risultato finale della elaborazione.

Ogni riga della tabella contiene tre elementi:

1- Terna del giocatore 1.
2- Terna del giocatore 2.

3.1 Formula della probabilità esatta con parametro p

3.2 Probabilita' della terna 1 con moneta equilibrata.
3.3 Probabilita' della terna 2 con moneta squilibrata 0.6.

La funzione di distribuzione fornisce molti altri parametri statistici relativi al confronto tra terne quali durata della partita, deviazioni standard, etc che non ho aggiunto perché' non rilevanti .

Metodo 2 – Algoritmo di Conway

John Conway è un matematico inglese, molto bravo, attivo in svariati settori tra cui anche la matematica richeativa. Io ho da tempo i due volumi della sua opera intitolata "Winning Ways for your Mathematical Plays".

Perché' cito questo algoritmo? Perché' ne sono venuto a conoscenza non da molto tempo e mi ha impressionato per la sua eleganza.

Riporto integralmente l'articolo che riguarda il suo algoritmo applicato alle tre monete perche' 1: l'inglese usato non è molto complicato 2: non saprei rendere bene l'eleganza dell'algoritmo con una traduzione in italiano.

… The famous mathematician John Conway proposed a beautiful algorithm to do this (you can find out more about Conway in a past interview with *Plus*). Conway introduced *leading numbers* as an index indicating the degree of pattern overlap. Leading numbers are also an index of the level of repetition of a given pattern within a preceding pattern.

Conway's algorithm for working out the leading number for two triples works as follows. First, put the two triples one above the other with the digits aligned, as we've done below for the two triples HHH and THH. Now compare the two triples: if they are the same, put a 1 above the first digit of the first sequence, if not put a 0.

0
T H H
H H H

Next, remove the leading digit from the upper triple, and shift it to the left, aligning the leading elements. Then, compare the first two digits of the upper sequence to the first two digits in the lower sequence: if they are the same, place a 1 above the leading element of the upper sequence, or a 0 otherwise.

1
H H
H H H

Repeat this procedure through to the last element of the upper sequence.

1
H
H H H

Finally, compile the results as follows:

0 1 1

T H H
H H H

The resulting triple of 0s and 1s is an index of the overlap between the two sequences. It can be read as a binary number. In our example, the binary number 011 is equal to the decimal number 3.

Given two triples $A$and B, the leading numbers give us a way of working out the Player B's odds. Write $AA$for the leading number we get using triple Aas the upper and lower sequence, $AB$for the leading number we get using triple Aas the upper sequence and triple Bas the lower sequence, and so on. The odds of Player Bwinning are given by the equation

$$(AA - AB)/(BB - BA).$$

In our example with A given the triple HHH and B by the triple THH we have

1 1 1	0 0 0
A: H H H	A: H H H
A: H H H	B: T H H

1 0 0	0 1 1
B: T H H	B: T H H
B: T H H	A: H H H

Converting these four values to decimal numbers (111 in binary equals 7, 000 equals 0, 100 equals 4 and 011 equals 3) and substituting them into the equation, we have

$$\frac{AA - AB}{BB - BA} = \frac{7-0}{4-3} = 7.$$

So Player B’s odds are given as 7, which we take as meaning 7:1, matching with the first entry in Table 1.

Taking Player A’s probability of winning as $p$and Player B’s probability of winning as q,we obtain

$$p = \frac{1}{1+7} = \frac{1}{8}, q = \frac{7}{1+7} = \frac{7}{8}.$$

Both Player A and Player B have eight possible selections. Because the players make their selections independently, there are possible matches, and the odds for each are automatically generated by the Conway algorithm as shown in table 2. Taking the best odds for Player B with respect to Player A's selection gives the results listed in table 1. Conway's algorithm is very powerful, in that it can give probabilities not only for sequences of length 3, but for those of any length, or even for sequences of dissimilar length.

A

B

	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT
HHH		1/2	2/5	2/5	1/8	5/12	3/10	1/2
HHT	1/2		2/3	2/3	1/4	5/8	1/2	7/10
HTH	3/5	1/3		1/2	1/2	1/2	3/8	7/12
HTT	3/5	1/3	1/2		1/2	1/2	3/4	7/8
THH	7/8	3/4	1/2	1/2		1/2	1/3	3/5
THT	7/12	3/8	1/2	1/2	1/2		1/3	3/5
TTH	7/10	1/2	5/8	1/4	2/3	2/3		1/2
TTT	1/2	3/10	5/12	1/8	2/5	2/5	1/2	

Metodo 3 – Analisi del gioco di Panurgo

Il link ->
http://www.base5forum.it/post20182.html?hilit=penney%20ante#p20173

Come vedete, sono molti e diversi i modi per risolvere problemi di probabilità.

Metodo mnemonico

Terna del giocatore 1 = { X1,X2,X3}

Terna da dichiarare per vincere = {Y2,X1,X2}

Dove Y2 = T se X2 = C e Y2 = C se X2 = T