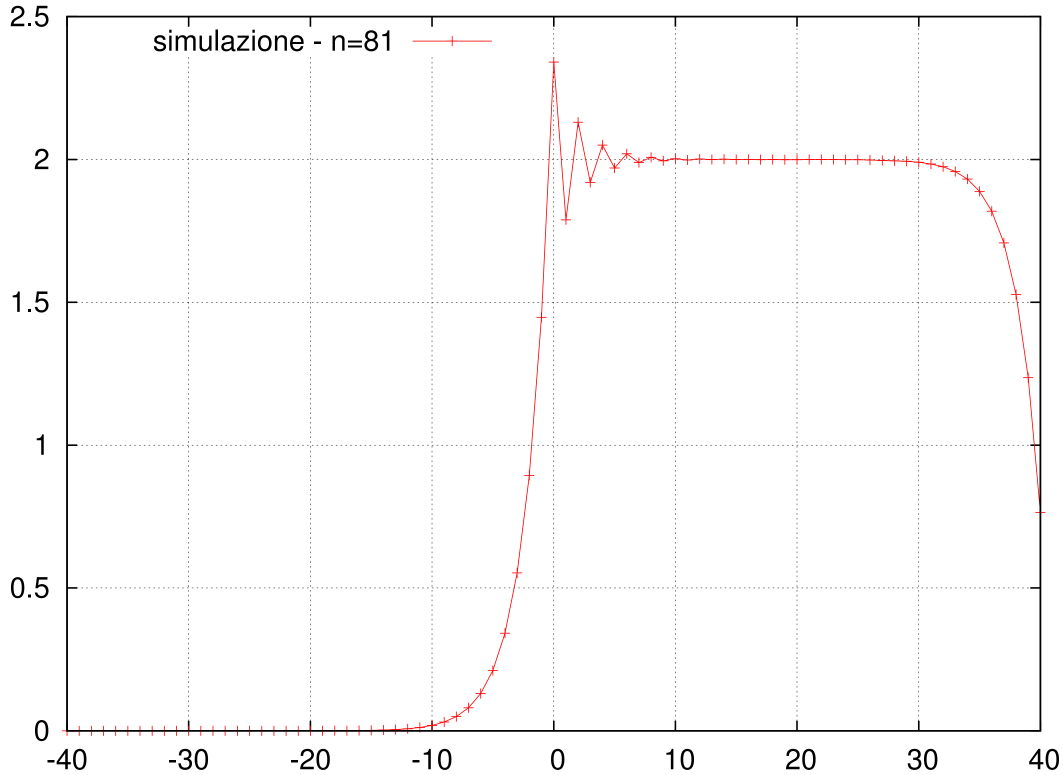
Sbronza monodimensionale

È abbastanza ovvio che è solo un fatto probabilitico che alcuni punti non verranno toccati. Una simulazione, però, permette di stimare che per alcuni punti la probabilità è veramente bassa. La figura riportata sotto mostra il numero di passi medio del percorso $(-40, 40)$ ($n = 81$ passi). La figura è stata ottenuta contando il numero di volte che l'ubriaco passa per un punto in $N_c = 1000000000$ cammini casuali diversi e dividendo per N_c.



Lo stesso risultato si può ottenere per via teorica cercando il punto fisso della matrice di transizione, cioè di quella matrice quadrata $n \times n$ che raggruppa le probabilità di transizione dell'ubriaco da un punto all'altro del percorso:

$$\mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} m_{i-1,i} = 1/2 & m_{i+2,i} = 1/2 & i = 2, \ldots, n-2 \\ m_{k,1} = 1/2 & m_{3,1} = 1/2 & \\ m_{k,n-1} = 1/2 & m_{n-2,n-1} = 1/2 & \\ m_{k,n} = 1/2 & m_{n-1,n} = 1/2 & k = \lceil n/2 \rceil \end{pmatrix}$$

La posizione k è il punto di partenza e la riga k-esima ha cinque elementi non nulli (a differenza delle altre che ne contengono solo due), perché appena un ubriaco esce (da destra o da sinistra) un altro prende il suo posto al punto di partenza. Per un cammino con sette posizioni otteniamo:

$$\mathbf{M}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

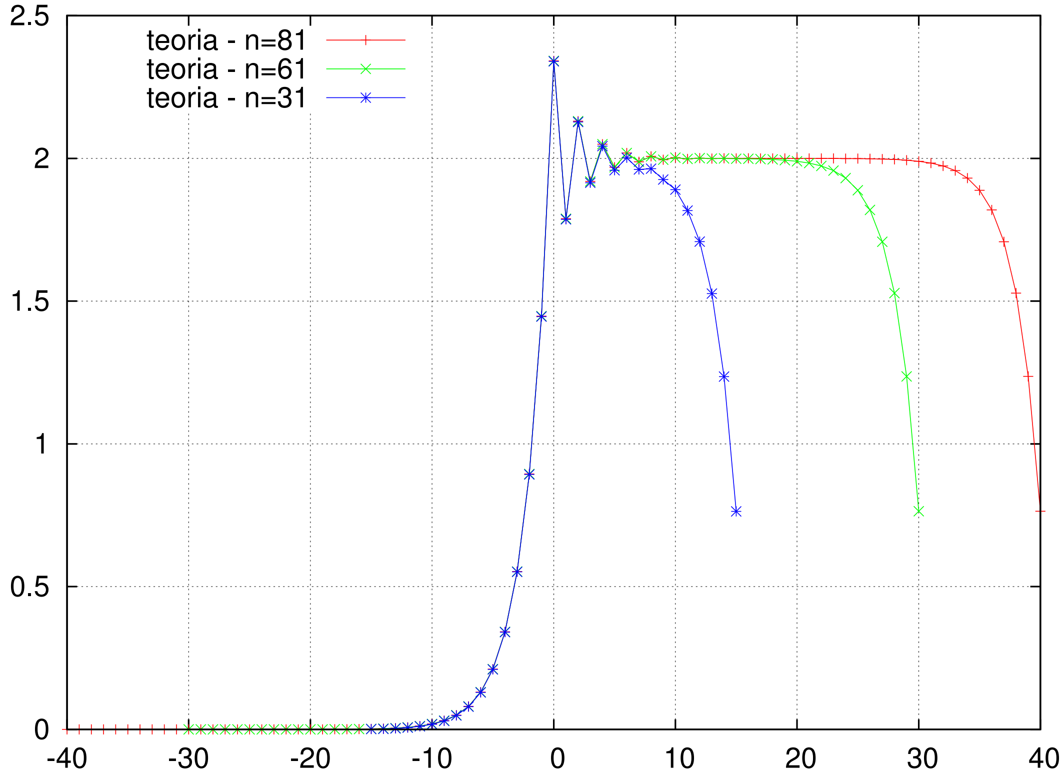
L'equazione da risovere è, in generale:

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

con $\mathbf{x}$ autovettore relativo all'autovalore unitario (che esiste sempre per queste matrici). Per fare in modo che $\mathbf{x}$ rappresenti il numero medio di passaggi per ogni possibile posizione occorre normalizzarlo in modo che

$$x_1 + x_{n-1} + x_n = 1$$

I risultati del calcolo teorico sono riportati nella figura che segue per $n = 31, 61, 81$.



teoria - n=81
teoria - n=61
teoria - n=31
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
40