Le Scienze - Ottobre 2010

Rudi algoritmi per RUDI

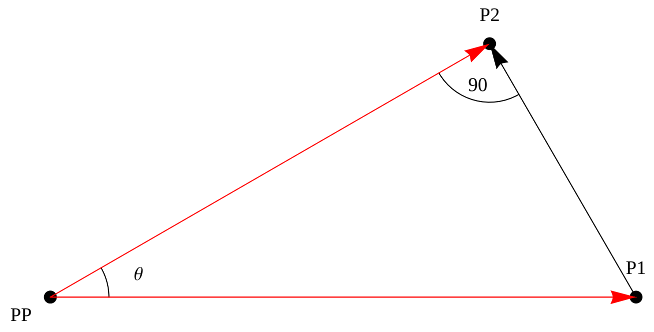
Vincoli

- Segmenti di retta in numero N.
- Diminuzione costante della distanza dal punto di arrivo.
- La somma delle N distanze deve essere massima.

Considerazioni sul segmento generico

Supponiamo che RUDI si muova in senso antiorario rispetto al palo di arrivo PP.
Un segmento generico va dal punto P1 al punto P2. Poiche' la distanza dal palo PP deve diminuire e, contemporaneamente, la lunghezza del segmento P1-P2 deve essere massima, il vettore P2-P1 deve essere normale al vettore P2-PP.
Sia la lunghezza di P1-PP pari "R"; l'angolo tra P1-PP e P2-PP sia θ. Il segmento PP-P2 sara' lungo "R Cos[θ]" e il segmento P2-P1 sara' lungo "R Sin[θ]".

Segmento generico



Percorso di 7 segmenti

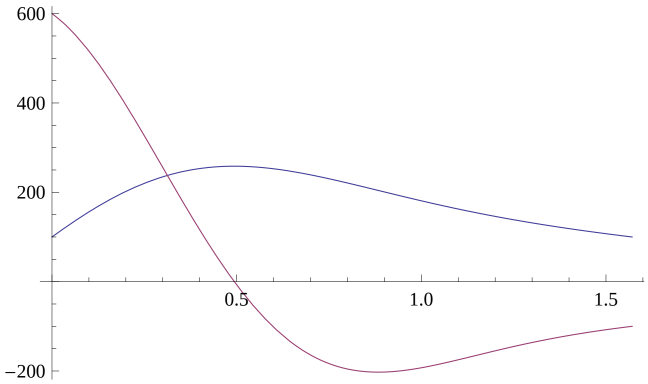
Adottiamo un sistema di riferimento cartesiano con centro in PP e con asse delle X lungo la direzione PP-P1.
La successione dei 7 punti sara' data da:

$$\{\{100, 0\}, \{100\,\text{Cos}[\theta]^2, 100\,\text{Cos}[\theta]\,\text{Sin}[\theta]\}, \{100\,\text{Cos}[\theta]^2\,\text{Cos}[2\theta], 100\,\text{Cos}[\theta]^2\,\text{Sin}[2\theta]\}, \{100\,\text{Cos}[\theta]^3\,\text{Cos}[3\theta], 100\,\text{Cos}[\theta]^3\,\text{Sin}[3\theta]\}, \{100\,\text{Cos}[\theta]^4\,\text{Cos}[4\theta], 100\,\text{Cos}[\theta]^4\,\text{Sin}[4\theta]\}, \{100\,\text{Cos}[\theta]^5\,\text{Cos}[5\theta], 100\,\text{Cos}[\theta]^5\,\text{Sin}[5\theta]\}, \{100\,\text{Cos}[\theta]^6\,\text{Cos}[6\theta], 100\,\text{Cos}[\theta]^6\,\text{Sin}[6\theta]\}, \{0, 0\}\}$$

Il percorso totale sara' pari a:

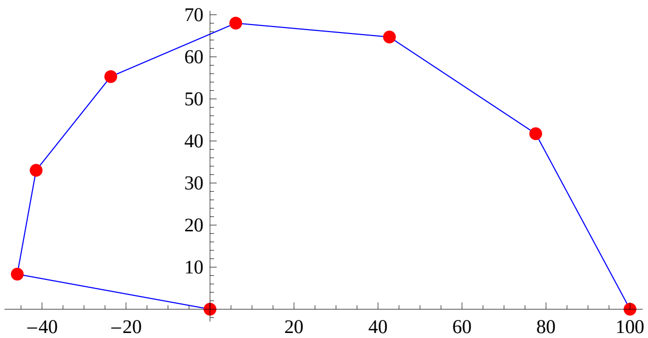
$$100\left(\sqrt{\text{Cos}[\theta]^{12}} + \sqrt{\text{Sin}[\theta]^2} + \sqrt{\text{Cos}[\theta]^2\,\text{Sin}[\theta]^2} + \sqrt{\text{Cos}[\theta]^4\,\text{Sin}[\theta]^2} + \sqrt{\text{Cos}[\theta]^6\,\text{Sin}[\theta]^2} + \sqrt{\text{Cos}[\theta]^8\,\text{Sin}[\theta]^2} + \sqrt{\text{Cos}[\theta]^{10}\,\text{Sin}[\theta]^2}\right)$$

Occorre ora determinare il valore ottimo θo che massimizza la lunghezza totale del percorso;
Derivando rispetto a θ e trovando lo zero si ha che θo = 0.493643 ovvero 28.2837 gradi.



Sostituendo questo valore al posto del θ generico si ha che la lunghezza massima e' pari a 258.436 m.

Possiamo fare il grafico del percorso.



- **Percorso di N segmenti**

L'aspetto del percorso a 7 segmenti suggerisce che i punti possono essere posizionati su una spirale logaritmica.

L'espressione della spirale logaritmica sia $\rho\, e^{-b\,\theta}$;

Il vettore Pi - PP avra' le coordinate $\{e^{-b\,i\,\theta}\,\rho\,\mathrm{Cos}[i\,\theta],\ e^{-b\,i\,\theta}\,\rho\,\mathrm{Sin}[i\,\theta]\}$;

Il vettore Si = (Pi+1 - Pi) avra' le coordinate $\{e^{-b\,(1+i)\,\theta}\,\rho\,\mathrm{Cos}[(1+i)\,\theta],\ e^{-b\,(1+i)\,\theta}\,\rho\,\mathrm{Sin}[(1+i)\,\theta]\}$

Poiche' il vettore Si deve essere normale al vettore Pi+1 -PP si deve verificare la condizione $e^{-2\,b\,(1+i)\,\theta}\,\rho^2\,\left(1-e^{b\,\theta}\,\mathrm{Cos}[\theta]\right)=0$

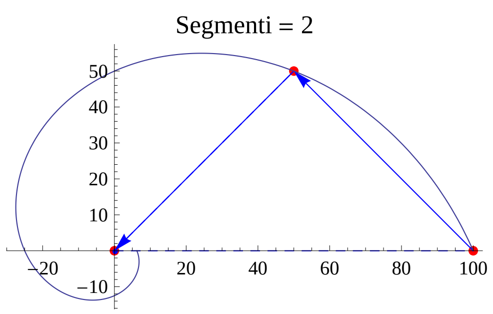
Questa condizione e' verificata per $b = \frac{\mathrm{Log}[\mathrm{Sec}[\theta]]}{\theta}$ e sostituendo questo valore nell'espressione della spirale logaritmica si ha:

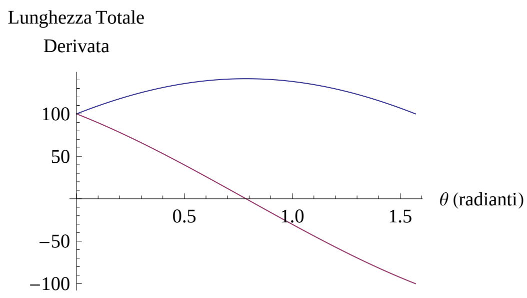
$\rho\,\mathrm{Cos}[\theta]$.

Procedendo ora come nel caso dei 7 segmenti, si possono ricavare i valori per N segmenti.

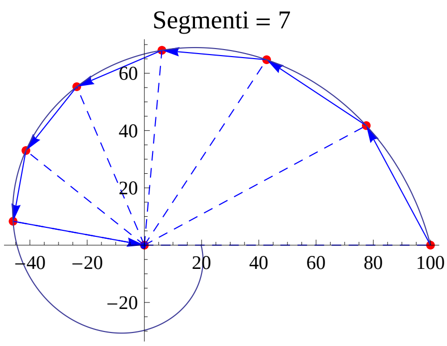
- **Esempi**

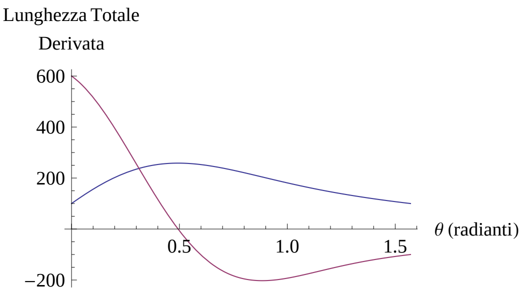
- **Percorso di 2 segmenti.**



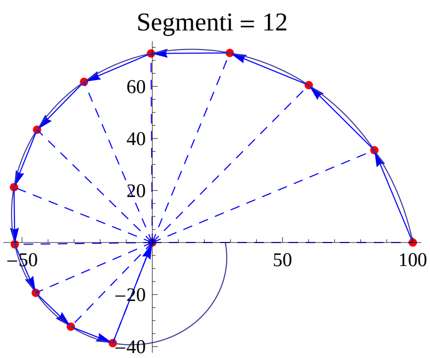


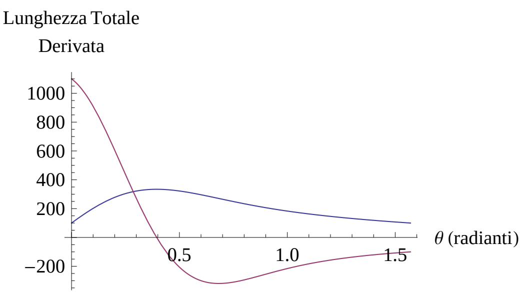
- **Percorso di 7 segmenti.**



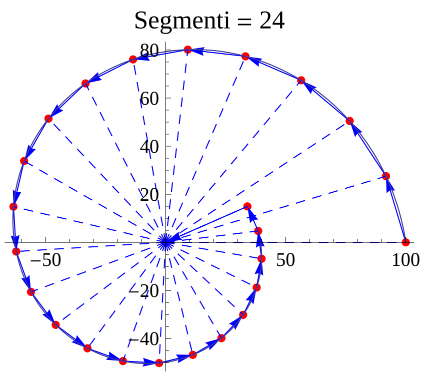


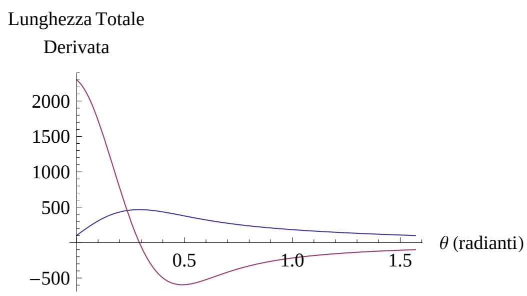
- **Percorso di 12 segmenti.**





- **Percorso di 24 segmenti.**





- **`Tabella Riassuntiva degli esempi`**

Numero di segmenti	θo (rad)	Lunghezza (m)	Spirale Logaritmica
2	0.785398	141.421	$100\ e^{-0.441271\,\phi}$
7	0.493643	258.436	$100\ e^{-0.25755\,\phi}$
12	0.394405	334.165	$100\ e^{-0.202538\,\phi}$
24	0.291156	465.555	$100\ e^{-0.147683\,\phi}$

Tanti cari saluti,

Carlo Ferjancic