Problema di Didone

Rudi Matematici - Dicembre 2009

Ipotesi

(salvo non specificato le unità di misura sono del SI)

Il percorso scelto ha lo scopo di massimizzare l'area in un tempo dato pertanto avrà la forma di un poligono regolare con:

- n ($\in\mathbb{N}$, ≥ 3) lati di lunghezza $a \geq 0$,
- di area $A \geq 0$ e perimetro $n\,a$,
- il tempo impiegato a fissare un palo sia $t = 60$ s,
- il tempo totale a disposizione sia $T = 86400$ s (24 ore),
- la velocità di percorrenza sia fissata costante a $V > 0$.

Tesi

Il percorso migliore da scegliere è quello che traccia un poligono regolare di 17 lati (ovvero eptadecagono).

Dimostrazione

Sia l'area di un poligono regolare definita come:

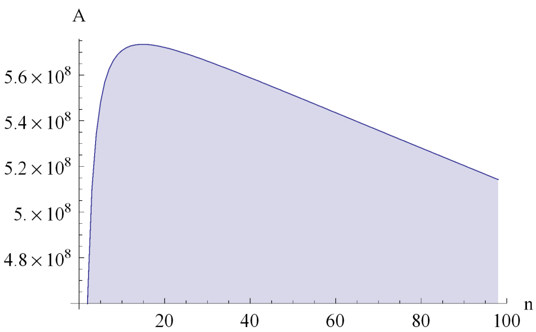
$$A(n,\ a) = \frac{1}{4}\, n\, a^2 \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{0.1}$$

e limitata dal tempo massimo a disposizione dalla seguente equazione che considera un moto uniforme a velocità costante ed un tempo al netto del fissaggio dei paletti:

$$n\,a = (T - n\,t)\,V \tag{0.2}$$

$$A(n,\ V) = \frac{1}{4}\, n \left[(T - n\,t)\,\frac{V}{n}\right]^2 \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{0.3}$$

$$A(n,\ V) = \frac{1}{n}\left[\frac{V}{2}\,(T - n\,t)\right]^2 \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{0.4}$$



Si tratta ora di trovare il massimo di questa funzione: calcolo la sua derivata prima che risulta:

$$A'(n,\ V) = \left\{(n\,t\ -\ T)\left[V \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]^2\right\}\left[2\,\pi(n\,t\ -\ T) + n\,(n\,t\ + T)\sin\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)\right]\frac{1}{8\,n^3} \tag{0.5}$$

Con le sostituzioni numeriche su T e t:

$$A'(n,\ V) = \left\{(n - 1440)\left[V \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]^2\right\}\left[2\,\pi\,(n - 1440) + n\,(1440 + n)\sin\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)\right]\frac{450}{n^3} \tag{0.6}$$

Noto che il primo fattore fra parentesi graffe non si annulla mai se non per $n = 1440$, un caso (di minimo) che volutamente escludo qui e tratterò più oltre. Tra l'altro si noti anche che il problema dei massimi non dipenderà più da V che compare solo in questo primo fattore: ecco perché non era stata fornita come dato dagli autori!

Il secondo fattore fra parentesi quadre e anch'esso trascendente va purtroppo analizzato in qualche maniera... Sarà opportuno trovare gli zeri numericamente. Infatti, dopo si dovrà comunque procedere ad un controllo numerico perché si dovrà scegliere un opportuno n naturale. Si trova:

$$A' = 0 \Leftrightarrow n \approx 16.821 \tag{0.7}$$

Come appena detto procedo ora ad un controllo numerico nell'intorno:

$$A(16, V) \approx 5.7343 \times 10^8 V^2 \tag{0.8}$$

$$A(17, V) \approx 5.7348 \times 10^8 V^2 \tag{0.9}$$

Scelgo dunque l'area maggiore che è quella con il poligono regolare di 17 lati.

Considerazioni

Questo risultato avrebbe scoraggiato Didone, Virgilio e anche Enea perché ai tempi la costruzione con riga e compasso di un eptadecagono doveva essere ancora scoperta (bisognerà attendere Gauss 3000 anni dopo!) e anche se fosse stata nota li avrebbe scoraggiati di sicuro nel costruirlo su un'area così estesa.
Supponiamo di porre $V = 1$(a passo veloce). Allora si avrebbe:

$$a \approx 5.055 \text{ km} \tag{0.10}$$

$$n\, a \approx 85.38 \text{ km} \tag{0.11}$$

$$A(17, 1) \approx 573.5 \text{ km}^2 \tag{0.12}$$

Una superficie maggiore della città del Vaticano!

Il caso $n = 1440$ è quello in cui il tempo totale del fissaggio dei paletti copre l'arco del tempo massimo dato delle 24 ore, ed è dunque il minimo assoluto della funzione (nel dominio dato nelle ipotesi) in cui l'area marcata è nulla ed i paletti sarebbero fissati uno sopra l'altro...
Interessante notare l'andamento del grafico t vs. n (del poligono ottimale). Questo mette in luce come, se la soluzione non era sensibile a V, lo è invece moltissimo a t. Al diminuire di t i lati del poligono regolare della soluzione aumentano velocemente, mentre al suo crescere diminuiscono molto lentamente. Forse, dopotutto, l'idea di piazzare un solo paletto e con una corda tracciare una circonferenza rimane la soluzione più praticabile.