La delizia degli idioti

Rudi matematici - Febbraio 2011

Soluzione di Carlo Ferjancic

▪ Quick & dirty

Doc ha puntato su **“match”.**
Si verifica un **“No-match”** se ci sono 52 ribaltamenti con carte diverse. La probabilita’ che le due carte siano uguali e’ $\frac{1}{52}$; la probabilita' che le due carte siano diverse e’ $\left(1-\frac{1}{52}\right)$.
La probabilta’ che il gioco si concluda con un “no-match” sarebbe quindi pari a $\left(1-\frac{1}{52}\right)^{52}$= 0.364314 e, ovviamente, la conclusione con un “match” ha probabilita’ 0.635686.
La probabilita’ di “no-match” arriva al limite di $\frac{1}{e}$ = 0.367879 per numero di carte molto grande.
Il calcolo preciso delle probabilita’ teoriche richiede pero’ un esame approfondito.
Per illustrare il punto supponiamo di giocare con due mazzi di sole 4 carte {1,2,3,4}.
Supponiamo che Rudy mantenga il proprio mazzo ordinato (forse detesta mescolare !) e che Doc mescoli bene il proprio. Le successioni di carte che si possono presentare per Doc sono 4! = 24 , le permutazioni di {1,2,3,4}.
Poiche’ Rudy mantiene fissa la propria successione e’ facile effettuare il confronto per ogni giocata.

ci saranno:
8 casi in cui si verifica il “match” -
{{1,3,4,2},{1,4,2,3},{2,3,1,4},{2,4,3,1},{3,1,2,4},{3,2,4,1},{4,1,3,2},{4,2,1,3}};
6 casi in cui ci sono 2 “match” -
{{1,2,4,3},{1,3,2,4},{1,4,3,2},{2,1,3,4},{3,2,1,4},{4,2,3,1}};
1 caso in cui ci sono 4 “match” -
{1,2,3,4};
9 casi in cui **non** ci sono “match” -
{{2,1,4,3},{2,3,4,1},{2,4,1,3},{3,1,4,2},{3,4,1,2},{3,4,2,1},{4,1,2,3},{4,3,1,2},{4,3,2,1}}

ecco che la probabilita’ di “no-match” = $\frac{9}{24}$ = 0.375 e la probabilita’ di “match” = $\frac{5}{8}$ = 0.625, contro i valori di $\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4}$= 0.316406 e 0.683594 , se calcolati con l’approccio quick & dirty.

▪ Approccio teorico

Obiettivo: calcolare il numero di permutazioni in cui nessuno degli elementi dell’insieme iniziale compare nella sua posizione originaria.
Questo numero diviso il fattoriale del numero di carte fornisce la probabilita’ teorica di “no-match”.
In inglese queste permutazioni sono chiamate “derangements” e il loro conteggio si avvale di una funzione “Subfattoriale” ricorsiva che di solito e’ indicata con “! n” e
che si presenta come

$$!\,n = (n-1)\,(\,!(n-1) + !(n-2))$$

In *Mathematica* questa funzione e' disponibile e nel caso del mio esempio precedente con mazzo di 4 carte si ha:
Subfactorial[4] = 9 che e' il risultato visto prima.

Volendo ricavare anche il numero teorico di "match" che si possono verificare in una giocata completa, ho ricavato la seguente espressione che fornisce il numero di permutazioni con un determinato numero di "match" utilizzando la funzione subfattoriale:

$\binom{n}{\mathrm{nm}}$ Subfactorial[n – nm] ; con n = numero di carte di un mazzo,

nm = numero di "match" rispetto alla permutazione originaria ;

Per l'esempio con 4 carte, si ha

Table[$\binom{4}{\mathrm{nm}}$ Subfactorial[4 – nm], {nm, 0, 4}]

```
{9, 8, 6, 0, 1}
```

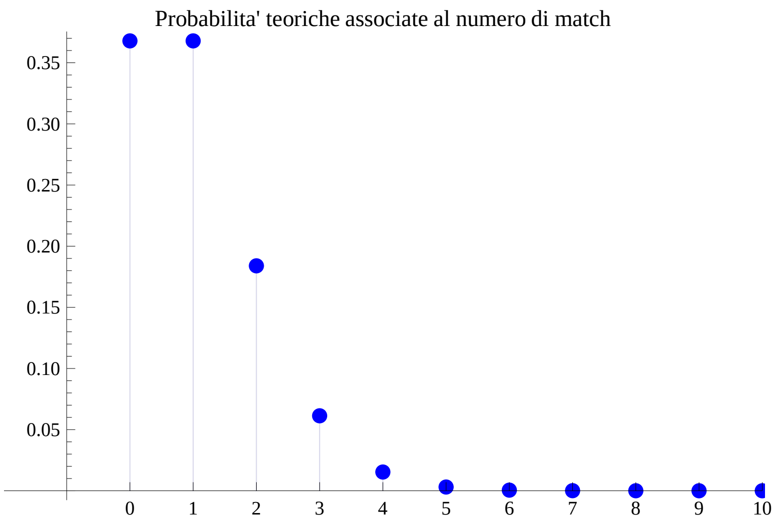
ovvero, 9 permutazioni con 0 "match", 8 permutazioni con 1 "match", 6 permutazioni con 2 "match" e 1 permutazione con 4 "match"

■ Probabilita' teoriche per i giochi tra Rudy e Doc.

Con due mazzi da 52 carte:
permutazioni totali = 52!

$$\textbf{prob} = \frac{1}{52!}\ \textbf{Table}\left[\binom{52}{\textbf{nm}}\ \textbf{Subfactorial[52} - \textbf{nm], \{nm, 0, 52\}}\right][\![\textbf{1 ;; 20}]\!]\ \textbf{//}\ N$$

N. match	Prob.
0	0.367879
1	0.367879
2	0.18394
3	0.0613132
4	0.0153283
5	0.00306566
6	0.000510944
7	0.000072992
8	9.12399×10^{-6}
9	1.01378×10^{-6}
10	1.01378×10^{-7}
11	9.21616×10^{-9}
12	7.68013×10^{-10}
13	5.90779×10^{-11}
14	4.21985×10^{-12}
15	2.81323×10^{-13}
16	1.75827×10^{-14}
17	1.03428×10^{-15}
18	5.74599×10^{-17}
19	3.0242×10^{-18}



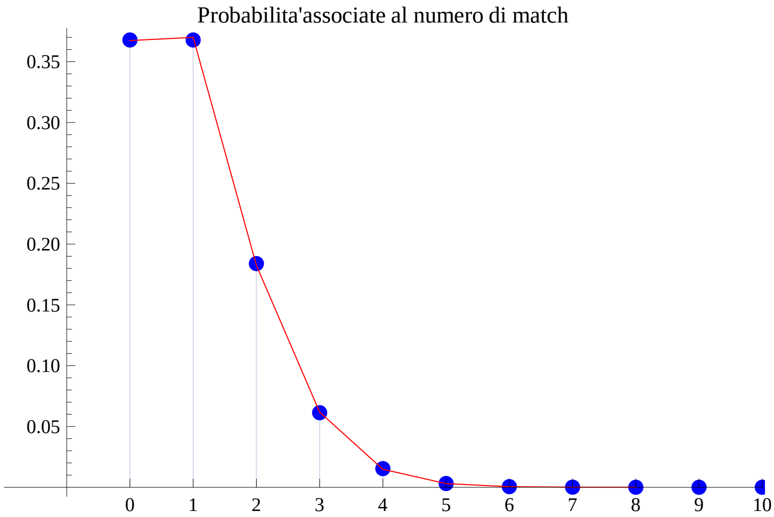
■ Simulazione e verifica

Sono state simulate 100000 giocate e, per ogni giocata, si sono registrati i numeri di “match” verificatisi. Questi numeri, divisi per 100000, hanno fornito le probabilita’.

I risultati in tabella sono:

N. match	Prob.
0	0.3674
1	0.37002
2	0.18248
3	0.06178
4	0.01479
5	0.003
6	0.00045
7	0.00005
8	0.00003

In grafico (rosso) e sovrapposto ai risultati teorici :



■ Saluti

Buon lavoro a tutti voi !

Carlo Ferjancic