LE SCIENZE Problema di settembre 2021

Probabilità al cubo

Nel lancio di una moneta truccata, testa o croce, giocano il banco contro un giocatore (pollo).

Il banco ha una probabilità di vincere pari a 0,501, il giocatore ha i restanti 0,499.

In ogni giocata se vince il banco il giocatore paga un centesimo al banco, se vince il giocatore il banco gli paga un centesimo. Il banco comincia il gioco con una dotazione di k centesimi, ma poi se resta senza centesimi va in bancarotta. Bisogna avere almeno un centesimo per giocare.

1) Bisogna calcolare il valore minimo di k per cui il banco abbia una probabilità > 0,5 di non andare in bancarotta.
2) Inoltre dopo quante giocate è più probabile che il banco vada in bancarotta ? Supponendo che si cominci a giocare alla mezzanotte del primo gennaio, 24 ore al giorno, con una giocata all'ora, quale è il momento di massima probabilità di bancarotta per il banco ?

Soluzione di Angelo P.

Consideriamo il banco A ed un giocatore B. A ha un capitale iniziale k e supponiamo che il giocatore B abbia un capitale iniziale b (capitali in centesimi).

Il problema è una passeggiata aleatoria con barriere assorbenti, dove le barriere rappresentano la rovina di uno o la fortuna di uno o dell'altro giocatore, corrispondenti all'azzeramento del proprio capitale o alla vincita di tutto il capitale dell'avversario. In tal caso il gioco termina.

Sia E l'evento "il patrimonio di A scende, prima o poi, a zero sapendo che inizialmente è k" e sia p(k) la probabilità di E:

P(E) = p(k);

Analogamente sia l'evento F "il patrimonio di B scende, prima o poi, a zero sapendo che il patrimonio iniziale di A è k", e sia q(k) la probabilità di F:

P(F) = q(k).

L'evento E è complementare all'evento F e deve essere p(k) + q(k) = 1.

Il problema si risolve ricorrendo ad una equazione alle differenze finite oppure con le catene di Markov. Ho ripassato il primo metodo, le catene di Markov le conosco poco.

Si dimostra che nel nostro caso trattandosi di gioco non equo $p \neq q$ si ha che la probabilità che A vada in bancarotta risulta:

$$p(k) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{k} - \left(\frac{q}{p}\right)^{k+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{k+b}}$$

mentre la probabilità che A non vada in rovina è q(k) = 1 - p(k) = $\dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^{b} - \left(\frac{p}{q}\right)^{k+b}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{k+b}}$

La previsione del numero medio di giocate D_k per arrivare ad una delle due barriere assorbenti è

$$D_k = \frac{k}{q-p} - \frac{k+b}{q-p}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{k}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{k+b}}$$

Se il gioco fosse equo p = q si avrebbe D_k = kb.

Bisogna trovare il valore minimo di k per cui il banco A abbia probabilità > 0,5 di non andare in rovina.

Poiché si vuole che q(k) sia > 0.5 e sono dati p e q, la probabilità dipende solo da b.

Consideriamo il caso estremo di b = 1: q(1) = 0,501.

Per valori k > 1 la probabilità q(k) risulta superiore, quindi in questo caso k = 1 è il valore minimo. Per valori così piccoli di k e b il numero medio di giocate del gioco non equo coincidono con quelle del gioco equo, cioè D_k = kb. In questo caso D_1 = 1, ovvio.

All'altro estremo, il capitale b del giocatore potrebbe essere molto grande (se il giocatore B fosse un Paperon de Paperoni molto ricco, con dotazione di iniziale di b "fantastilioni") al limite ∞, nel nostro caso di gioco non equo p > q:

$$\lim_{b\to+\infty} p(k) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k} \qquad \text{se } p > q.$$

Essendo p = 0,501 e b → ∞, se fosse k = 174, la probabilità di rovina sarebbe

p(k) = 0,49857 e quindi la probabilità di NON rovina q(k) = 1 – p(k) = 0,5014.

cioè quando il gioco è appena poco favorevole ad A la probabilità che A stesso vada in bancarotta contro un avversario B molto ricco è molto bassa.

Nel caso generico con b avente valori vari 1 < b < ∞ si ottiene (p = 0,501, q = 0,499)

Capitale b del giocatore	Probabilità di non rovina per il banco p(k)	k per minimo p > 0,5	Numero medio di giocate D_k	Giorni (1 giocata/ora)
2	0,502	2	4	
5	0,505	5	25	1
10	0,510	10	100	4,17
50	0,502	42	2105	87,7
100	0,503	72	7264	302,7
500	0,503	157	86619	3609
1000	0,502	172	208196	8675

Come si vede per piccoli numeri c'é coincidenza col gioco equo (D_k = kb e k(p > 0,5) = b).