LE SCIENZE Problema di agosto 2018

La carica dei Seicento

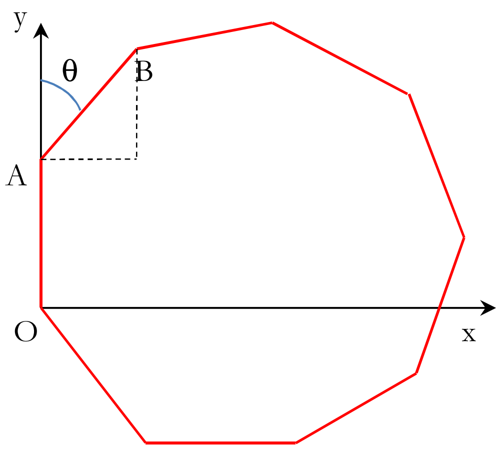
Gli invitati a cena dai Rudi, prima di congedarsi, come test etilico, devono camminare per una lunghezza unitaria, ruotare verso destra di un certo angolo (da definire) e ricominciare da capo. Scopo del gioco era ripetere queste operazioni per 9 volte, ritrovandosi al punto di partenza. Quelli che ci sono riusciti hanno metodi tutti differenti fra loro; quelli che non ci sono riusciti, invece, si sono ritrovati tutti, alla fine, ad una distanza unitaria (in linea d'aria) dal luogo di partenza, arrivandoci tutti con metodi diversi uno dall'altro.

Bisogna determinare il numero degli invitati.

Soluzione di Angelo

Ruotare verso destra si suppone che l'angolo di deviazione possa variare solo da 0 a 180°.

Essendo 9 il numero delle "operazioni" elementari, spostamento unitario più rotazione a destra, il caso più semplice consiste nel partire da un vertice e descrivere un poligono regolare di 9 lati con ogni rotazione pari a $\theta = 360°/9 = 40°$, ritornando al vertice di partenza, facendo 9 passi unitari e 8 rotazioni a destra



In ogni caso, posto il punto di partenza nell'origine O(0, 0) di un sistema di assi cartesiani x, y, dopo il primo passo unitario ci si ritrova nel punto A ruotati di un angolo $\theta = 40°$ con coordinate A(0, 1); dopo il secondo passo si ritrova nel punto B avente coordinate

$x_B = \text{sen}(40°)$ $\qquad$ $y_B = 1 + \cos(40°)$

e così via; alla fine, dopo 9 passi e 8 rotazioni le coordinate x_{Fo}, y_{Fo} saranno date da

$x_{Fo} = \text{sen}(40°) + \text{sen}(2 * 40°) + \text{sen}(3 * 40°) + \ldots + \text{sen}(8 * 40°)$

$y_{Fo} = 1 + \cos(40°) + \cos(2 * 40°) + \cos(3 + 40°) + \ldots + \cos(8 * 40°)$

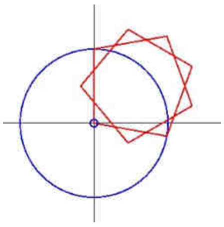
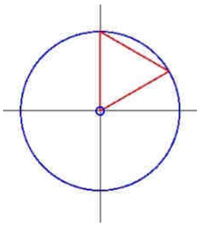
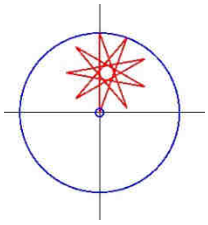
Nel caso di k rotazioni con angolo θ, queste somme sono date dalle seguenti formule:

$$\sum_{n=1}^{k} \text{sen}(n * \theta) = \text{sen}\left(\frac{(k+1)}{2}\theta\right) * \text{sen}\left(\frac{k\theta}{2}\right) / \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{k} \cos(n * \theta) = \cos\left(\frac{(k+1)}{2}\theta\right) * \text{sen}\left(\frac{k\theta}{2}\right) / \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

che nel caso k = 8 e $\theta = 40°$ forniscono $x_{Fo} = 0$ ed $y_{Fo} = 0$, confermando di aver raggiunto il punto di partenza.

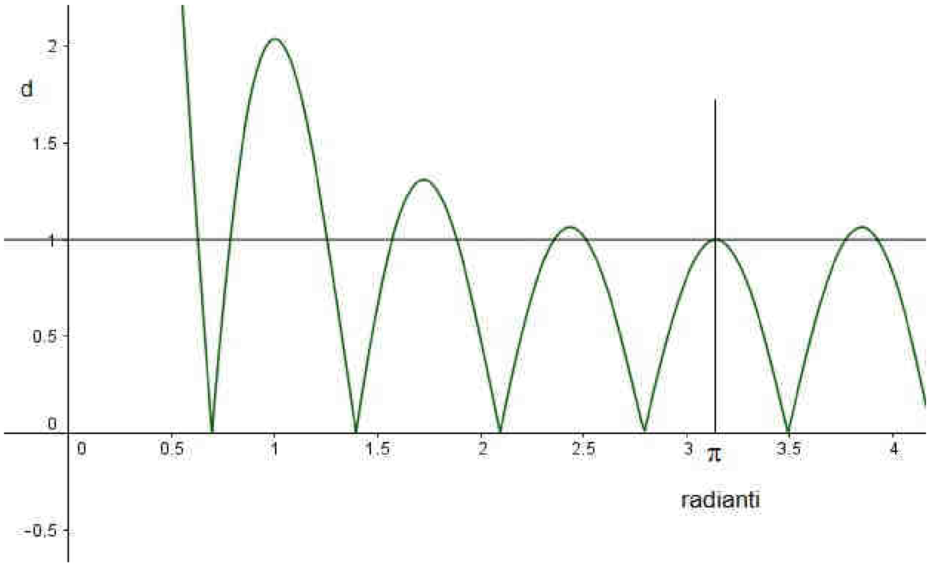
Restando sempre nel caso dei 9 passi e variando l'angolo a multipli di 40° ma ≤180° (quindi 80°, 120° e 160°) si raggiunge il punto di partenza. Con l'angolo di 80° si descrivono 2 pseudo-pentagoni (il cerchio grande ha raggio unitario, quello piccolo indica dove finisce la camminata),

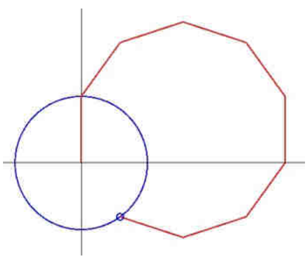
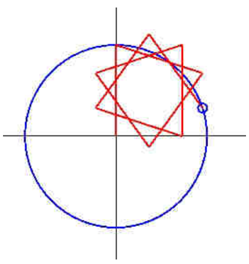
con 120° si descrive 3 volte un triangolo equilatero e con 160° si descrive una stella a 9 punte.

Bisogna poi trovare in quali casi si raggiunge un qualsiasi punto della circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario, distante cioè d = 1 dall'origine. Per semplificare la ricerca è sufficiente tracciare l'andamento (per esempio con Geogebra) della funzione d per k = 8 e facendo variare l'angolo θ:

$$d = \sqrt{x_{Fo}^2 + y_{Fo}^2} = \sqrt{\left[\operatorname{sen}\left(\frac{(k+1)}{2}\theta\right) * \operatorname{sen}\left(\frac{k\theta}{2}\right) / \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2 + \left[1 + \cos\left(\frac{(k+1)}{2}\theta\right) * \operatorname{sen}\left(\frac{k\theta}{2}\right) / \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2}$$



dove si vede che nell'intervallo 0 – 180° (0 - π rad) d = 0 per θ = 40°, 80°, 120° e 160°, cioè in 4 casi. Invece d = 1 si presenta in 8 casi, per θ = 36°, 45°, 72°, 90°, 108°, 135°, 144° e 180°. A titolo di esempio si riportano due camminate relative agli angoli di 35° e di 108°:

In definitiva gli invitati erano 12, 4 dei quali sono riusciti nel gioco ed 8 hanno invece raggiunto una distanza unitaria dal punto di partenza.

La formula sopra scritta, che fornisce $d = 0$, oppure $d = 1$ permette una immediata generalizzazione al caso di $(k + 1)$ passi qualsiasi e k rotazioni a destra.