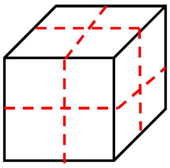
LE SCIENZE Febbraio 2017

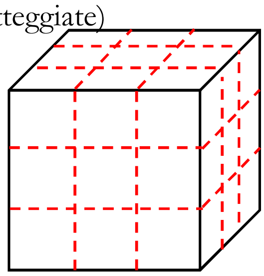
Lavoretti di falegnameria: Dato un cubo di legno avente dimensioni n × n × n, con n intero, trovare qual è il minimo numero di tagli necessario per ottenere dei cubetti unitari 1 x 1, avendo licenza di risistemare i pezzi ad ogni taglio per ottimizzare il lavoro.

Generalizzare poi il problema relativo a parallelepipedi con dimensioni intere a × b × c.

<u>**Soluzione di Angelo**</u>

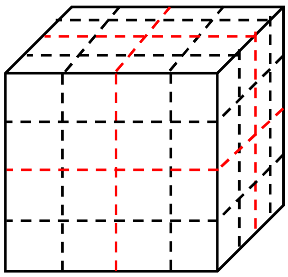
Il caso più semplice riguarda il cubo 2 × 2 × 2, per il quale sono necessari 3 tagli, uno per ognuna delle 3 dimensioni (lungo le linee rosse tratteggiate)





mentre per il cubo 3 × 3 × 3 sono necessari 6 tagli, 2 per ognuna delle 3 dimensioni (immaginate di provare a tagliare).

I risparmi dei tagli cominciano a manifestarsi con il cubo 4 × 4 × 4, avendo cura di risistemare i pezzi in modo da tagliarne il maggior numero possibile ed il più possibile a metà.



Infatti, dopo i primi 3 tagli a metà lungo le linee rosse si ottengono 8 cubi 2 × 2; mettendoli in fila, con il 4° taglio si ottengono 16 parallelepipedi 2 × 2 × 1; con il 5° taglio si ottengono 32 parallelepipedi 2 × 1 × 1; messi in fila con il 6° taglio si completa l'opera.

Quindi per il cubo 4 × 4 × 4 sono sufficienti 6 tagli, tanti quanti ne occorrevano per il cubo 3 × 3 × 3.

Per un cubo generico di n × n × n, il risultato è già stato trovato da Martin Gardner nel suo libro citato dai Rudi:

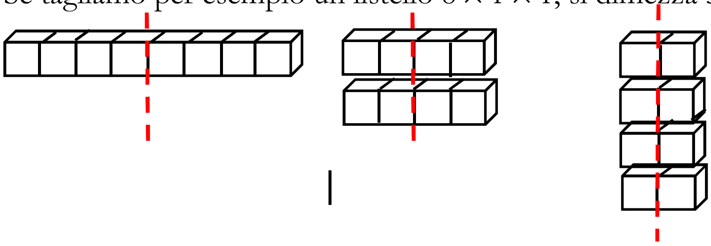
il numero minimo di tagli occorrenti è 3k, dove

$2^k \geq n > 2^{k-1}$.

Sembra più difficile (ma non troppo!) il caso del <u>**parallelepipedo con dimensioni intere a × b × c**</u>, di cui Martin Gardner fa cenno, senza esplicitare la soluzione.

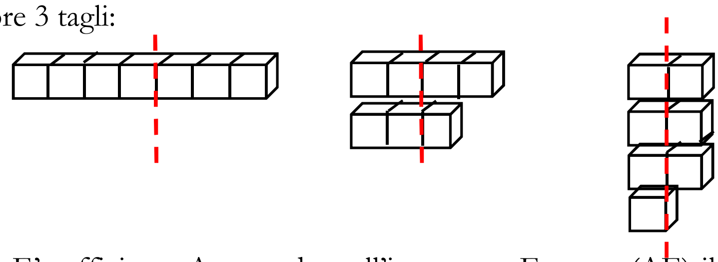
Consideriamo inizialmente un <u>**listello**</u> con dimensioni a × 1 × 1.

Se tagliamo per esempio un listello 8 × 1 × 1, si dimezza 3 volte, cioè $8 = 2^3$:



E' evidente che quando a è una potenza di 2, i tagli k necessari sono dati da $a = 2^k$, ossia k è il logaritmo in base 2 di a: $k = \log_2(a)$.

Quando a non è una potenza di 2, allora, per esempio, con un listello $7 \times 1 \times 1$ occorrono sempre 3 tagli:



E' sufficiente Arrotondare all'intero per Eccesso (AE) il logaritmo in base 2 per ottenere i tagli necessari con qualsiasi valore intero di a:

$k = AE[\log_2(a)]$.

Questa relazione equivale a quella (unidimensionale) di Gardner, cioè occorrono k tagli dove:

$2^k \geq a > 2^{k-1}$.

Esempi di tagli k del listello $a \times 1 \times 1$

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\log_2(a)$	2	1,58	2	2,32	2,58	2,8	3	3,17	3,32	3,46	3,58	3,70	….
$k = AE[\log_2(a)]$	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	….

Considerando una tavoletta rettangolare con dimensioni $a \times b \times 1$, occorrono (k + h) tagli dati da

$k = AE[\log_2(a)]$ $\quad h = AE[\log_2(b)]$

Nel caso di un **parallelepipedo retto $a \times b \times c$** occorrono **(k + h + m) tagli** con

$k = AE[\log_2(a)]$; $\quad h = AE[\log_2(b)]$; $\quad m = AE[\log_2(c)]$

ovvero:

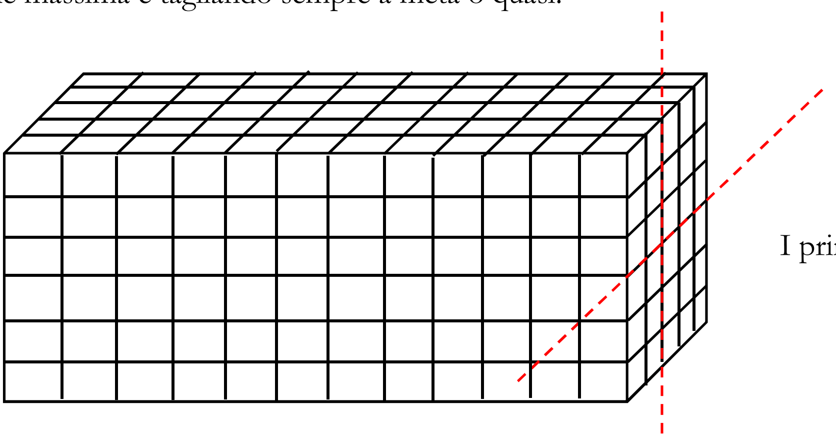
$2^k \geq a > 2^{k-1}$

$2^h \geq b > 2^{h-1}$

$2^m \geq c > 2^{m-1}$.

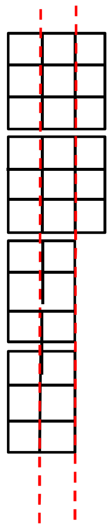
Nel caso in cui a = b = c = n si ritrova il cubo di spigolo n.

Esempio. Consideriamo un parallelepipedo di lati $5 \times 6 \times 12$. Secondo le suddette formule occorrono (3 + 3 + 4) = 10 tagli. Verifichiamo, avendo cura di partire con tagli paralleli alla dimensione massima e tagliando sempre a metà o quasi:

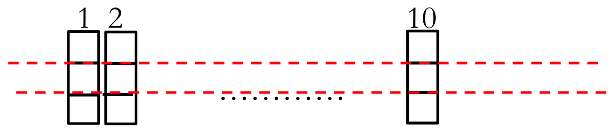


I primi 2 tagli

Rimangono 4 parallelepipedi, 2 con misure 3×3 e 2 di 2×3, entrambi lunghi 12. Visti di fronte e incolonnati:



3° e 4° taglio



5° e 6° taglio

Come si vede, con il 3° e 4° taglio si ottengono 10 listelli $3 \times 1 \times 12$, poi con il 5° e 6° taglio si ottengono 30 listelli $1 \times 1 \times 12$.

Mettendo in colonna questi 30 listelli, il 7° taglio, eseguito a metà di ciascuno, produce 60 listelli $1 \times 1 \times 6$. L'8° taglio, alla loro metà, fornisce 120 listelli $1 \times 1 \times 3$. Il 9° ed 10° taglio riducono in cubetti unitari.