

# L'immaginazione al potere

Rudi Matematici - Dicembre 2013

---

## Appendice alla soluzione di Carlo

### Risposta

La folaga dalla fronte bianca si salvera' se la velocita' di Gaetanagnesi e' quattro volte la sua velocita', come ha dichiarato Rudy.

Il rapporto tra la velocita' massima di Gaetanagnesi e la folaga, che ho definito come  $k$ , individua varie situazioni in cui la folaga si puo' salvare in modi diversi.

C'e la possibilita' di salvezza se il rapporto di velocita' gatta/folaga e' inferiore a 4.6033...

Il decollo rapido al suolo assicura la salvezza alla folaga anche quando tocca terra solo un istante prima dell'arrivo della gatta.

Le situazioni che ho individuato sono:

1.  $k < \pi$
2.  $\pi < k < \pi + 1$
3.  $\pi + 1 < k < 4.60334$  (con la gatta che procede sempre nello stesso verso)
4.  $\pi + 1 < k < 4.60334$  (con la gatta che puo' cambiare verso di percorrenza)

## Analisi del caso 4.

### Ringraziamenti

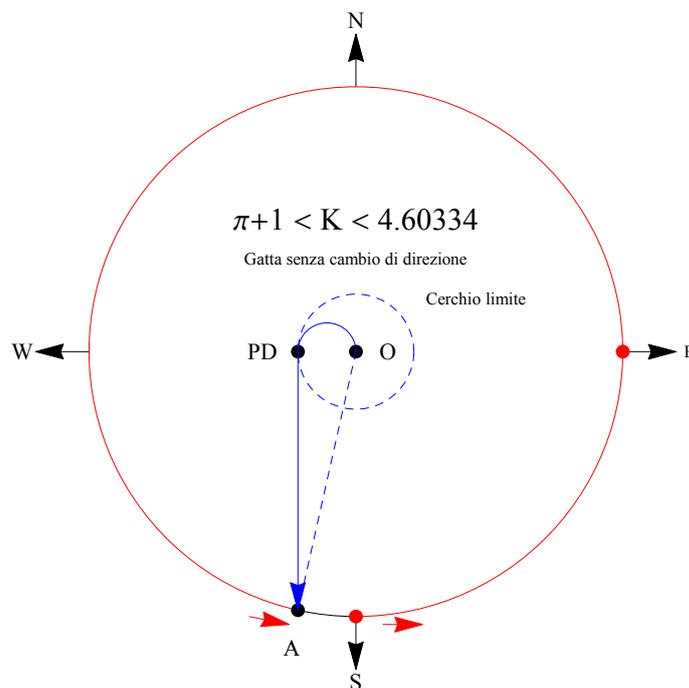
Voglio ringraziare **yopenzo**, **Guido** e **gnugnu**, nell'ordine di intervento sul Blog, che mi hanno stimolato a compilare questa appendice in modo da coprire un aspetto del problema che non era stato considerato in modo approfondito:

**yopenzo** con il suo riferimento scherzoso al radar doppler incorporato nei gatti (Alice, ne sai nulla?) mi ha fatto riflettere sul ruolo dell'utilizzo delle informazioni in un problema come questo dove la tempestività nel prendere decisioni per implementare una certa strategia è essenziale. Al termine di questa appendice risulterà che Gaetanagnesi, oltre al radar doppler, deve avere un sistema di telemetria tipo NASA.

**Guido** per primo mi ha fatto rilevare l'importanza per la gatta di poter invertire la direzione per neutralizzare la strategia della folaga. Nella realtà qualsiasi gatto in condizioni similari non terrebbe conto dell'esistenza di un vincolo in questo senso.

**gnugnu** esprimendo la sua perplessità per il valore limite di  $K$  mi ha convinto ad affrontare la questione anche nel caso generale. La sua osservazione "Se la folaga "parte per la tangente", quando s'avvede che la gatta ha optato per il percorso più breve, dovrebbe tornare sui suoi passi con un guadagno sostanzialmente nullo" è stata la chiave per la soluzione che propongo in questa analisi.

### Richiamo del caso 3



La folaga esegue il semicerchio compreso tra **O** e **PD** per mantenere la gatta in opposizione rispetto al centro del lago. Dato il rapporto **k** tra  $\frac{\text{velocita' folaga}}{\text{velocita' gatta}}$ , il raggio di questo semicerchio e' pari a  $\frac{R}{2k}$ . Quando la folaga arriva al punto di decisione **PD**, la gatta arriva al punto **Est**. Il verso di percorrenza antiorario verra' mantenuto sino al punto **A**. Il rapporto limite **k** viene ricavato equagliando i tempi di percorrenza **Pd - A** (per la folaga) e **S - A** (per la gatta) considerando il punto **A** generico e risolvendo (con metodi numerici) le due equazioni nelle incognite **k** e  $\alpha$ , dove  $\alpha$  e' l'angolo formato dal raggio **O-A** con il vettore **O-W**. I valori di **k** e  $\alpha$  ottimali sono rappresentati in figura e rappresentano (per la folaga) la regola aurea della tangente al cerchio limite per salvarsi.

**Caso 4** -  $\pi + 1 < k < 4.60334$  (con la gatta che puo' cambiare verso di percorrenza)**Definizione del raggio di salvezza**

**rs** = Distanza della folaga dal centro del lago tale che, avendo la gatta in opposizione, consenta di dirigere verso il punto piu' vicino della riva senza poter essere raggiunta.

La **rs** serve a definire il cerchio di salvezza (molto utile per la folaga!).

Vediamo quanto vale:

La folaga deve percorrere la distanza  $R - rs$  per raggiungere la riva piu' vicina e il tempo che impegna e' pari a  $\frac{R-rs}{vf}$ .

La gatta per raggiungere lo stesso punto della riva (partendo dall'opposizione) dovra' percorrere la distanza  $\pi R$  procedendo a velocita'  $k vf$ . Quindi

$$rs = R \left(1 - \frac{\pi}{k}\right)$$

Da notare che questo risultato e' indipendente dal verso di percorrenza della gatta.

**Definizione del Punto di Approdo**

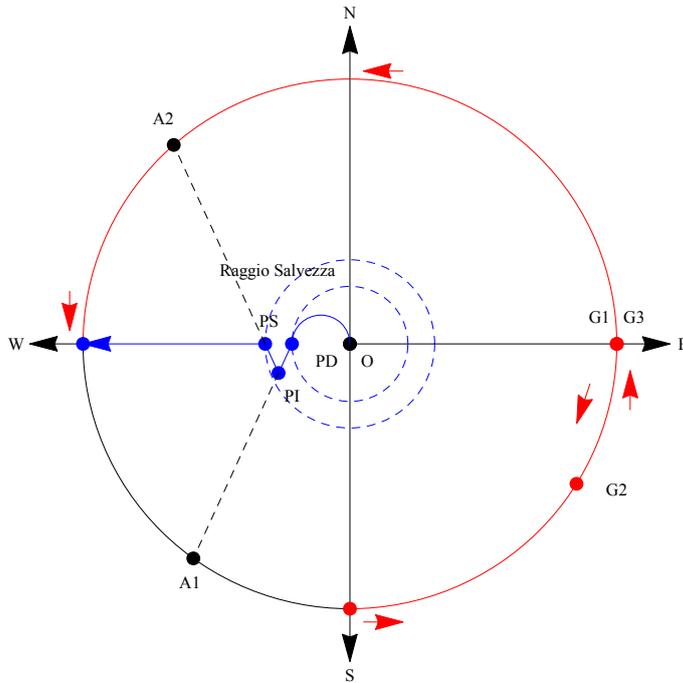
La telemetria, il radar doppler o altro consentono alla gatta di valutare istantaneamente se la rotta della folaga dirige verso un punto della riva.

Questa informazione porta la gatta a decidere istantaneamente il proprio verso di percorrenza in modo da minimizzare il tempo di arrivo al punto di approdo (segue il percorso piu' breve).

Contemporaneamente (ricordiamo la vista della folaga) la folaga prende le proprie decisioni ...

**Esempio**

Seguiamo lo sviluppo della vicenda utilizzando un esempio numerico con i soliti  $R=100$  m,  $k=4.60334$ ,  $vf = 1$  m/s e  $vg=k vf$  m/s. e aiutandoci con la figura seguente:



La folaga parte dal centro del lago O e mentre la gatta procede in senso antiorario si mantiene in opposizione percorrendo il semicerchio O - PD. Quando e' arrivata la punto di decisione PD e la gatta e' nel punto G1 (Est), inizia a seguire la tangente al cerchio limite puntando verso il punto di approdo A della figura precedente. La gatta con i suoi sensori si accorge della manovra, e decide istantaneamente di invertire la corsa in quanto percorso piu' breve. La folaga con la sua vista acutissima se ne accorge e pensa " *ma chi me lo fa fare a seguire la tangente? Mi conviene puntare ad un punto che sia sull'asse ortogonale a O-W e intermedio tra PD e PS*" (vedremo dopo perche'). Opera di conseguenza e dirige verso il punto PI. La gatta se ne accorge ma non cambia il suo verso di percorrenza perche' il nuovo punto di approdo A1 e' ancora dalla parte piu' conveniente.

Quando la folaga arriva al punto PI, accosta a dritta e dirige verso il punto PS che appartiene al cerchio di salvezza in opposizione al punto G1 in cui la gatta ha invertito la rotta.

Ora il nuovo punto di approdo e' diventato A2 e la gatta che si trova in G2 inverte e si dirige in verso antiorario per raggiungere A2.

Quando la folaga arriva al punto PS, la gatta e' al punto G3, esattamente in opposizione. Questo e' avvenuto perche' il tempo di percorrenza G1-G2 e' esattamente uguale al tempo di percorrenza G2-G3 in quanto corrispondenti ai tempi di percorrenza PD-PI e PI-PS della folaga.

Ora la folaga e' salva perche', per definizione di raggio di salvezza, il suo tempo di percorrenza del tratto PS- W e' inferiore di un  $\epsilon$  piccolo a piacere del tempo impiegato dalla gatta per andare da G3 a W.

## Conclusione

Questa strategia funziona perche' la folaga non segue la regola della tangente se la

gatta inverte il verso di percorrenza, ma ne approfitta, anzi, per accorciare i tempi di arrivo al cerchio di sicurezza.

Questo sembrerebbe essere provato notando i tempi di percorrenza totali di questo esempio confrontati con quelli del caso senza inversione: in questo caso la folaga si salva prima. 126.548 s contro 131,735 s

#### Dati numerici relativi all'esempio in figura

Tempo (s)	Pos. Folaga	metri Folaga	Pos. Gatta	metri Gatta
0	O	0	S	0.
34.123	PD	34.123	G1	157.08
46.2124	PI	46.2124	G2	212.731
58.3018	PS	58.3018	G3	268.383
126.548	W	126.548	W	582.542

Le coordinate dei punti in figura sono riferite agli assi cartesiani W-E e N-S

O	{0, 0}
PD	{-21.7234, 0}
PI	{-26.7387, -11}
PS	{-31.754, 0}
W	{-100, 0}
A1	{-58.6516, -80.9937}
A2	{-66.0052, 75.122}
S	{0, -100}
G1	{100, 0}
G2	{84.9101, -52.8231}
G3	{100, 0}

Un saluto a tutti voi .

*Carlo*