

Tre per due uguale tre (Le Scienze, marzo 2019)

Si chiede di trovare quante sequenze di almeno 3 elementi "0" e "1" si possono costruire non composte unicamente da sottosequenze uguali. Si chiede inoltre se il numero di tali sequenze sarà sempre divisibile per 6.

Prendo tutte le sequenze costruibili con n elementi, a queste sottraggo le due sequenze di elementi tutti uguali (tutti "0" o tutti "1") e le sequenze formate da sottosequenze tutte uguali di almeno due elementi.

Lunghezza della sequenza	$n = 3, 4, 5, \dots$
Fattori primi di n minori di n	$p_1, p_2, \dots, p_r$
N° totale di sequenze	2^n
N° di sequenze da scartare	$2 + \sum_{i=1}^r 2^{p_i} - 2r$
N° di sequenze valide	$2[(2^{n-1} - 1) - \sum_{i=1}^r (2^{p_i-1} - 1)] = 2N$

Osservo che 2^h è del tipo $(3k + 1)$ o $(3k - 1)$ (con k dispari) rispettivamente per h pari o dispari. Infatti $2^2 = (3 + 1)$ e, ragionando con un'induzione completa, se $2^{2j} = (3k + 1)$, risulta $2^{2j+1} = [3(2k + 1) - 1]$ e $2^{2j+2} = [3(4k + 1) + 1]$. Siccome $(h - 1)$ è dispari se h è pari, e viceversa, ne segue che:

$(2^{h-1} - 1)$	è del tipo $(3k)$ (con k dispari)	per h dispari
$(2^{h-1} - 1)$	è del tipo $(3k + 1)$ (con k pari)	per h pari

Il numero di sequenze valide è pari a $2N$, con N somma di $(r + 1)$ addendi del tipo $(2^{h-1} - 1)$. Se n è dispari, tutti gli addendi hanno h dispari; Se n è pari, due soli addendi hanno h pari. In ogni caso N è multiplo di 3 e quindi il numero di sequenze valide è multiplo di 6.

Giuliotom