Tre per due uguale tre
(Problema di Febbraio 2019)

Il Problema
Bisogna determinare quanti spiedini di carne e verdura (*C* e *V*) di lunghezza *n* si possono generare escludendo quelli composti unicamente da sottospiedini.
Bisogna poi indicare se questo numero è sempre divisibile per 6 (i tre Rudy reali e quelli letterari).

Soluzione:
Il numero complessivo di spiedini generabili di lunghezza *n* è 2^nda questi bisogna escludere tutti quelli costituiti unicamente da sottospiedini.
La lunghezza dei sottospiedini deve essere necessariamente un divisore di *n* per cui
Il numero di spiedini sarà: $S_n = 2^n - \sum_i S_i \ \forall \ i$ divisore di *n*.

Se n è un numero primo l'unico tipo di sottospiedini sono quelli di lunghezza 1 e perciò sarà:
$S_n = 2^n - 2$ (*n* numero primo), inoltre dato che $2^k mod\ 6 = \ -2$ se k è pari e 2 se è dispari sarà S_n *mod* 6 = 0 (si considera $n \geq 3$) il numero degli spiedini è divisibile per 6..

Se *n* è del tipo $n \ = \ p^k$ bisogna considerare sottospiedini di lunghezza $1,\ p,\ p^2,\ p^3 \dots p^{k-1}$.
Si può osservare che tutti i sottospiedini di lunghezza p^{k-1} contengono i possibili sottospiedini di lunghezza p^j con $0 \leq j < k-1$.
Ad esempio sia $n = 2^3$ i sottospiedini di lunghezza 2 CC, CV, VC, VV, sono contenuti nei sottospiedini di lunghezza 4 CCCC, CVCV, VCVC, VVVV.
Per questo motivo, nel caso in cui $n \ = \ p^k$ basterà sottrarre da 2^n tutti i sottospiedini di lunghezza $\frac{n}{p}$ per avere il risultato cercato.
$S_n = 2^n - 2^{\frac{n}{p}} \quad (n \ = \ p^k \ con \ k > 1)$, anche in questo caso il numero degli spiedini è divisibile per 6.

Nel caso più generale $n = {p_1}^{j_1} \cdot {p_2}^{j_2} \cdot \dots \cdot {p_k}^{j_k}$ dovremo considerare tutti i divisori di *n* ad esempio per $n \ = \ 2^{\,2} \cdot 3$ possiamo avere sottospiedini di lunghezza 1, 2, 3, 4, 6.
Sarà

$$
\begin{aligned}
S_{12} &= 2^{12} - S_6 - S_4 - S_3 - S_2 - S_1 \\
S_6 &= 2^6 - S_3 - S_2 - S_1 \\
S_4 &= 2^4 - S_2 - S_1 \\
S_3 &= 2^3 - S_1 \\
S_2 &= 2^2 - S_1 \\
S_1 &= 2 \\
S_{12} &= 2^{12} - (2^6 - S_3 - S_2 - S_1) - S_4 - S_3 - S_2 - S_1 \\
&= 2^{12} - 2^6 - S_4 = 2^{12} - 2^6 - (2^4 - S_2 - S_1) \\
&= 2^{12} - 2^6 - 2^4 + S_2 + S_1 \\
&= \ 2^{12} - 2^6 - 2^4 + 2^2.
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda la divisibilità si può dimostrare per induzione che gli spiedini di lunghezza maggiore o uguale a 3 saranno sempre divisibili per 6, infatti osserviamo innanzi tutto che $S_2 mod\ 6 = 2\ e\ S_1\ mod\ 6 = 2$ inoltre se *n* é pari sarà:
$S_{2k}\ mod\ 6 = \left(2^{2k} -\ S_{i_1} - S_{i_2} \dots - S_2 - S_1\right) mod\ 6 = \ (2^{2k} - S_2 - S_1)\ mod\ 6$ [essendo gli altri termini congrui a 0 modulo 6 per ipotesi induttiva].
$S_{2k}\ mod\ 6 = \ 4 - 2 - 2 = 0$

Per *n* dispari

$S_{2k+1}\ mod\ 6 = \left(2^{2k+1} -\ S_{i_1} - S_{i_2} \dots - S_1\right) mod\ 6 = \ (2^{2k+1} - S_1)\ mod\ 6 = 0$