

Consideriamo solo la prima corona circolare: il rapporto tra l'area totale delle fette del primo tipo e quella delle fette del secondo tipo sarà uguale per tutte le successive corone circolari all'infinito.

Chiamiamo R il raggio della circonferenza esterna, p il semiperimetro del poligono di n lati, a il suo apotema.

L'area totale delle fette del primo tipo allora è

$$R^2\pi - pa = R^2\pi - \frac{2R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n}{2} \cdot \frac{2R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

per il teorema della corda (in questo caso il lato del poligono) e per la definizione trigonometrica di apotema. Questa espressione si può ridurre a

$$R^2\pi - R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = R^2\pi - R^2 \cdot n \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} = \frac{R^2}{2} \left(2\pi - n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

L'area totale delle fette del secondo tipo invece è

$$pa - a^2\pi = R^2 \cdot n \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} - \pi \cdot \left(R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2$$

che si riduce a

$$R^2 \cdot n \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} - R^2 \cdot \pi \cdot \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 1}{2} = \frac{R^2}{2} \cdot \left(n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \pi \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \pi\right)$$

Abbiamo quindi trovato entrambe le aree in funzione del numero n di lati. Il prossimo passaggio è calcolare il valore delle due espressioni per n tendente a infinito. Poiché si ha

$$\lim n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2\pi \quad \lim \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1$$

Allora l'area delle fette del primo tipo tende a

$$\frac{R^2}{2} \left(2\pi - n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \frac{R^2}{2} (2\pi - 2\pi) = 0$$

Mentre quella delle fette del secondo tipo tende a

$$\frac{R^2}{2} \left(n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \pi \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \pi\right) = \frac{R^2}{2} (2\pi - \pi + \pi) = \frac{R^2 2\pi}{2} = R^2\pi$$

È perciò più conveniente scegliere il secondo tipo di fette.