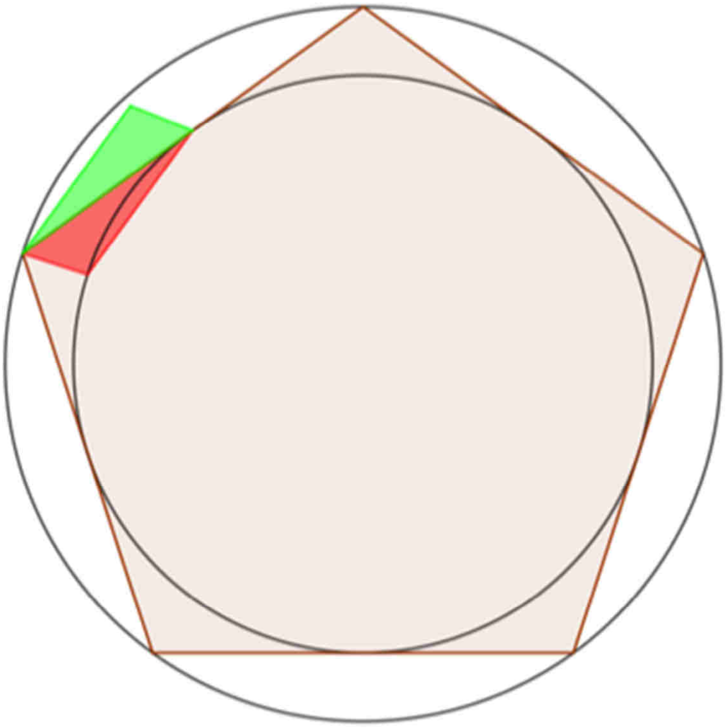
Ho iniziato cercando di intuire, senza calcoli, come potesse essere “la cosa”.

Ho poi provato a fare un po’ di conti per avere conferme o eventuali smentite.

Spero di non essermi sbagliato; parto con un disegno realizzato con GeoGebra:



Si nota che sono presenti *n* pezzi di torta di tipo uno e altrettanti pezzi di tipo due.

Il triangolo rosso ha area = ½ di un pezzo di tipo 2 + la lunula nel cerchio inscritto.

La sua area è quindi superiore all’area di mezzo pezzo di torta di tipo due.

Il triangolo verde è omologo al rosso avendolo costruito con le parallele ai sui lati.

Il lato corto del verde è interno alla lunula sul cerchio circoscritto al poligono.

Provo a motivare la mia ultima affermazione analizzando i lati del triangolo:

- il lato corto rappresenta la distanza tra i due cerchi della corona circolare

- l’angolo fra il lato corto e quello che è anche lato del poligono è inferiore a 90°

- quest’ultimo lato del triangolo ha lunghezza metà di un lato del poligono.

Si potrebbe approfondire, ma penso sia sufficiente per motivare quanto detto.

Da ciò affermo che il triangolo ha area < a ½ della lunula sul cerchio circoscritto.

Per qualsiasi poligono, quindi, l'area dei pezzi di tipo uno è > a quella di tipo due.

L'operazione si ripete partendo dal cerchio circoscritto che diventa quello inscritto.

La figura interna ottenuta è simile, nel suo complesso, a quella dell'immagine allegata.

Il rapporto fra le aree dei due tipi pezzi di torta è perciò identico al precedente.

Procedendo all'infinito si ha quindi che complessivamente tale rapporto permane.

L'area complessiva totale dei due tipi di pezzi corrisponde all'area del cerchio.

L'area totale di ognuno dei due si ottiene perciò dalla quaterna proporzionale fra aree:

cerchio sta a x (totale pezzi tipo 1 o 2) come corona circolare sta a pezzo tipo 1 o 2.

Portando n ad infinito il poligono tende a diventare sempre più simile ad un cerchio.

Con n tendente ad infinito "ci si avvicina" quindi ad avere:

- tre cerchi concentrici (quello circoscritto, il poligono e quello inscritto)

- due corone circolari con aree quasi coincidenti (sono i pezzi di torta tipo 1 e 2).

A questo punto, l'area del cerchio è equamente distribuita fra i due tipi di pezzi.

Alcuni calcoli partendo col raggio del cerchio esterno circoscritto al poligono = 1:

- area del cerchio circoscritto = π

- area dell'n-poligono = $\sin(\pi/2 - \pi/n) * \cos(\pi/2 - \pi/n) * n$

- lato dell'n-poligono = $2 * (1 - \cos(\pi/n)^2)^{½}$

- raggio del cerchio inscritto = $\cos(\pi/n)$

- area del cerchio inscritto = $\cos(\pi/n)^2 * \pi$

- area della corona circolare = $\pi - (\cos(\pi/n)^2 * \pi)$

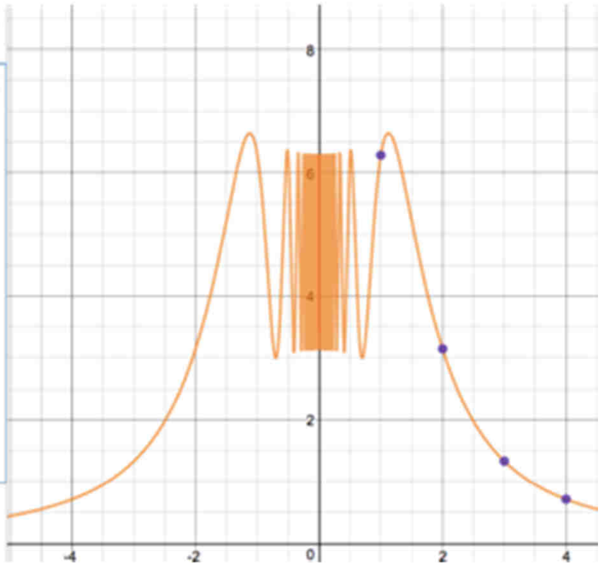
- gap area pezzi tipo 1 e 2 = $\pi – 2*(\sin(\pi/2 - \pi/n)*\cos(\pi/2 - \pi/n)*n) + (\cos(\pi/n)\text{^}2)*\pi$

Allego due immagini di quest'ultimo valore ottenute con un "tool" trovato in rete.

Grafico della funzione:

$f(x) = \pi - 2(\sin(\pi/2 - \pi/x)^* \cos(\pi/2 - \pi/x)^* x) + (\cos(\pi/x)^2)\pi$

x	$f(x)$
1	6.2831853
2	3.1415927
3	1.3289146
4	0.71238898
5	0.44250916
6	0.30163472
10	0.10533738
1000	1.033545×10^{-5}
100000	1.002148×10^{-9}



Limite per *n*à∞ (tendendo a 0 significa che le due aree tendono a coincidere):

$$\lim_{x \to \infty} \left(\pi - 2 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x} \right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x} \right) x \right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{x} \right) \pi \right) = 0$$