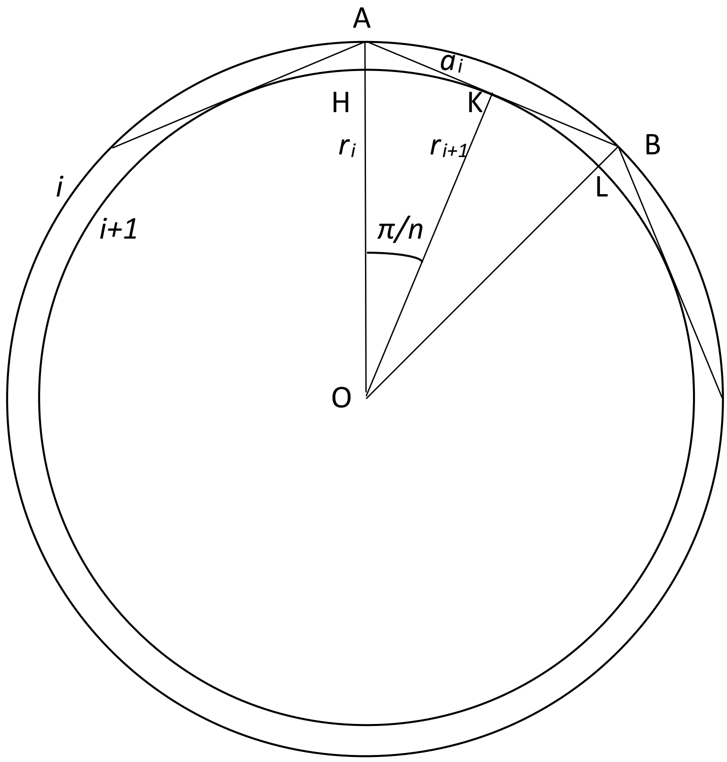
**Torte all'infinito (Le Scienze, febbraio 2019)**

Si tratta di inscrivere un $n$-agono regolare in un cerchio, poi un cerchio nell'$n$-agono, e così via all'infinito. Si ottengono due tipi di figure: infinite corone comprese fra un poligono e il suo cerchio circoscritto (figure di primo tipo) e infinite corone comprese fra un poligono e il suo cerchio inscritto (figure di secondo tipo). Si chiede se l'area complessiva delle figure di primo tipo sia maggiore o minore di quella delle figure di secondo tipo, e quale sia il rapporto fra le due aree per $n$ infinito.




Traccio in figura i cerchi $i$-esimo e *(i+1)*-esimo con il poligono di $n$ lati rispettivamente inscritto e circoscritto.
Detto $r_i$ il raggio del cerchio $i$-esimo, si ha:

| | |
|---|---|
| raggio del cerchio *(i+1)*-esimo | $r_{i+1} = r_i\cos(\pi/n)$ |
| semi-lato del poligono $i$-esimo | $a_i = r_i\mathrm{sen}(\pi/n)$ |
| area del settore circolare AOB | $S_i = r_i^2\pi/n$ |
| area del triangolo AOB | $T_i = r_i^2\mathrm{sen}(\pi/n)\cos(\pi/n)$ |
| area della lunetta AB | $L_i = r_i^2[\pi/n - \mathrm{sen}(\pi/n)\cos(\pi/n)]$ |
| area della figura AHKLBK | $F_i = T_i - S_{i+1} = r_i^2[\mathrm{sen}(\pi/n)\cos(\pi/n) - (\pi/n)cos^2(\pi/n)]$ |

Procedendo con cerchi più interni si ottengono figure simili, per cui il rapporto fra le aree delle figure non cambia. Quindi anche procedendo all'infinito, il rapporto $L/F$ fra l'area totale delle figure di primo tipo e quella delle figure di secondo tipo è pari a $L_i/F_i$.

$$\frac{L}{F} = \frac{\pi/n - \mathrm{sen}(\pi/n)\cos(\pi/n)}{\cos(\pi/n)[\mathrm{sen}(\pi/n) - (\pi/n)\cos(\pi/n)]}$$

Il rapporto è massimo pari a circa 3,59 per $n = 3$. Per $n$ che tende all'infinito si ha $\lim_{n\to\infty}(L/F) = 2$.

Giuliotom