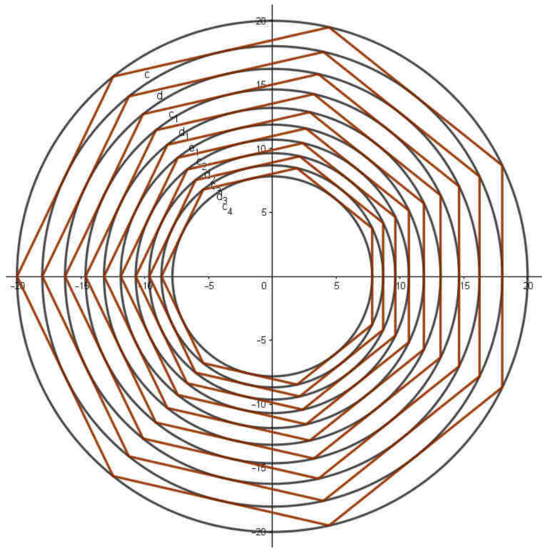
Torte all’infinito

(Problema di Febbraio 2019)

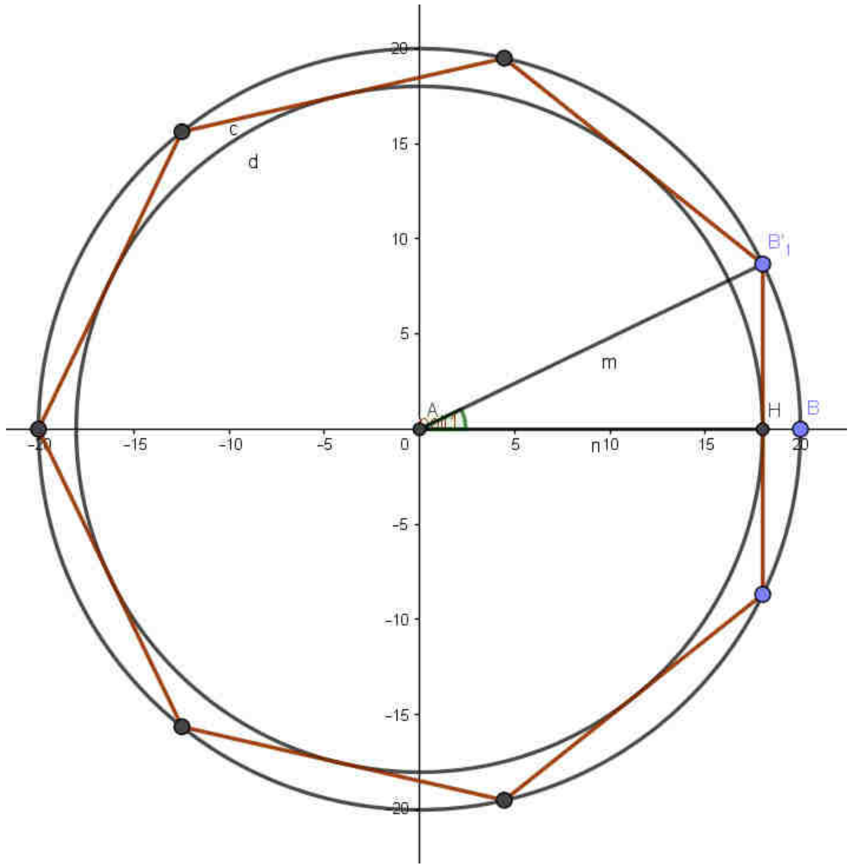
<u>Il Problema</u>

Bisogna scegliere il tipo di pezzi di torta che si ottengono inscrivendo in essa (considerata un cerchio perfetto) un poligono regolare, poi nel poligono un cerchio e così di seguito per infiniti tagli successivi (vedi figura per poligono di 7 lati e i primi tagli degli infiniti che portano al centro).



Inoltre bisogna decidere se e come si modifica la scelta quando il numero dei lati del poligono tende ad infinito.

Si può subito notare che man mano che ci si avvicina al centro la distanza tra i cerchi diminuisce ma il rapporto tra le aree dei due tipi di pezzi (1° tipo con convessità verso l’esterno e 2° tipo con convessità verso l’interno) si mantiene costante.
Per questo motivo basterà analizzare quello che accade in una qualsiasi corona circolare e il risultato sarà valido in generale.



L’area dei pezzi del primo tipo appartenenti alla corona sarà data dall’area del cerchio più grande *A* meno l’area del poligono *P,* mentre l’area dei pezzi del secondo tipo sarà l’area del poligono *P* meno l’area del cerchio più piccolo A_1.
Detto *R* il raggio del cerchio grande, *r* il raggio del cerchio piccolo ed *n* il numero dei lati del poligono valgono le seguenti relazioni:

$$r = R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$P = R^2 \cdot n \cdot cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$A = \pi \cdot R^2$$

$$A_1 = \pi \cdot R^2 \cdot cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$$

Utilizzando un foglio di calcolo si può osservare che l’area dei pezzi di primo tipo è sempre maggiore di quella dei pezzi di secondo tipo per *n* grande ma finito.
Per *n* tendente ad infinito, il poligono tende a giacere sulla circonferenza e anche la circonferenza più “interna” tende a giacere sulla circonferenza più “esterna” per cui le aree dovrebbero essere nulle.