

LE SCIENZE Problema di febbraio 2019

Torte all'infinito

Si consideri una torta circolare e si inscriva un n-agono regolare nel cerchio tortesco.

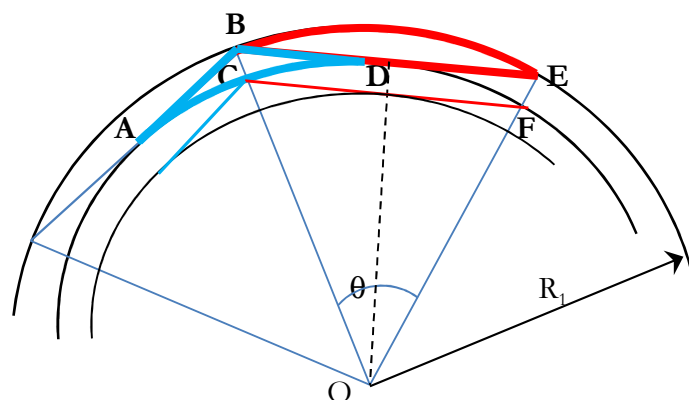
Dentro all'n-agono si inscriva un cerchio e si può immaginare di andare avanti (all'infinito) fino al centro della torta.

I pezzi di torta ottenibili in questo modo sono di due tipi:

- di tipo 1 quelli che hanno la parte curva della fetta, che è una convessità, verso l'esterno
- di tipo 2 quelli con la parte curva che è una concavità rivolta verso l'interno.

Si deve scegliere un tipo di fetta e non si può cambiare. Quale tipo di fette conviene per massimizzare la quantità di torta?

Soluzione di Angelo P.



Il generico n-agono avrà i lati che corrispondono ad un angolo al centro $\theta = 2\pi/n$.

Le fette di tipo 1 corrispondono al segmento circolare BDE in tinta rossa, quelle di tipo 2 allo pseudotriangolo ABD in tinta azzurra.

Se ho individuato correttamente i tipi di fette, osservando un disegno fatto con un minimo di cura (per esempio con $n = 3$, oppure 4 o 6), appare evidente che le fette di tipo 1 sono più grandi di quelle di tipo 2. Ma i matematici hanno bisogno di certezze matematiche.

Posto il raggio $R_1 = 1$, il segmento BDE ha l'area S_1 data dalla differenza tra l'area del settore circolare di ampiezza θ , che vale $\frac{\pi}{n}$ e l'area del triangolo OBE, pari a

$$2 \frac{BD \times OD}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n}, \text{ per cui:}$$

$$S_1 = \frac{\pi}{n} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}.$$

Continuando con i tracciamenti inscrivendo alternativamente n-agoni e cerchi, nell'ambito di uno stesso settore si trovano infinite fette del tipo 1 e di tipo 2, aventi dimensioni via via decrescenti, ma sempre simili.

L'arco di corona circolare BCFE [compresa tra i raggi 1 e $\cos(\pi/n)$] è la somma di una fetta di tipo 1 ed una di tipo 2.

Eseguendo il rapporto tra S_1 , fetta di tipo 1, e l'arco A_c di corona BCFE relativo allo stesso settore si ottengono le dimensioni relative:

$$A_c = \frac{\pi}{n} (1 - \cos^2 \frac{\pi}{n}) = \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{n} \quad \text{e quindi}$$

$$\frac{S_1}{A_c} = \frac{\frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} - \frac{1}{\frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

Occorre trovare il limite di S_1/A_c per $n \rightarrow \infty$. Ponendo $x = \pi/n$, si calcola il limite di questo rapporto per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x \cdot \operatorname{tg} x} \right) = \frac{2}{3}, \quad \text{limite confermato anche mediante WolframAlpha.}$$

Per valori finiti di n il rapporto S_1/A_c è maggiore di $2/3$. Infatti:

$$\frac{S_1}{A_c}(n=3) = 0,782 ; \qquad \frac{S_1}{A_c}(n=12) = 0,67282 ;$$

$$\frac{S_1}{A_c}(n=1.000) = 0,66666754 ; \qquad \frac{S_1}{A_c}(n \rightarrow \infty) = \frac{2}{3} .$$

In conclusione le fette di tipo 1 hanno area doppia o più che doppia di quelle di tipo 2.