

Chiare, fresche e dolci acque... (Le Scienze, gennaio 2019)

Si tratta di far gareggiare un numero di partecipanti a gruppi di tre, senza che due partecipanti gareggino insieme più di una volta e facendo gareggiare ogni partecipante lo stesso numero di volte. Si suggerisce un numero di partecipanti pari a 5 o a 10. Ho esaminato come segue il problema per un generico numero di partecipanti, trovando alcune soluzioni ma senza arrivare a una soluzione completa.

n° di partecipanti	$p \geq 3$
n° di gare	g
n° di gare per ogni partecipante	n
n° di partecipanti per ogni gara	3
n° di partecipazioni	$3g = np$
n° di coppie per ogni gara	3
n° di coppie partecipanti alle gare	$3g$
n° massimo di coppie possibili	$\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} \geq np$, da cui $n \leq \frac{p-1}{2}$

Si osserva che il prodotto np deve contenere il fattore 3, e quindi o n o p deve essere multiplo di 3. Si hanno quindi i seguenti casi:

$p =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$n =$	m	$3m$	$3m$
$n \leq \frac{p-1}{2}$	$m \leq \frac{p-1}{2}$	$m \leq \frac{p-1}{6}$	$m \leq \frac{p-1}{6}$

e si può compilare la seguente tabella delle situazioni possibili in base ai vincoli fin qui esaminati:

p	k	$(m = 1)$		$(m = 2)$		$(m = 3)$		$(m = 3)$		$(m = 5)$	
		n	g	n	g	n	g	n	g	n	g
3	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
4	1	3	4	-	-	-	-	-	-	-	-
5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	2	1	2	2	4	-	-	-	-	-	-
7	2	3	7	-	-	-	-	-	-	-	-
8	2	3	8	-	-	-	-	-	-	-	-
9	3	1	3	2	6	3	9	4	12	-	-
10	3	3	10	-	-	-	-	-	-	-	-
11	3	3	11	-	-	-	-	-	-	-	-
12	4	1	4	2	8	3	13	4	16	5	20
13	4	3	13	6	26	-	-	-	-	-	-
14	4	3	14	6	28	-	-	-	-	-	-

Questo consente di ridurre il problema a un numero minore di casi nei quali è già garantito che tutti i partecipanti gareggino un ugual numero di volte e che il numero di coppie gareggianti non superi il numero delle coppie fattibili. Ora per ciascuno di questi casi occorre verificare se è possibile costruire degli schemi di gare in cui ogni coppia gareggiante gareggi una sola volta.

Limitandoci a un numero di persone minore o uguale a 10, si hanno 11 situazioni non escluse in base ai vincoli sin qui considerati. Per queste 11 situazioni ho verificato la possibilità di ottenere una soluzione provando le possibili combinazioni di partecipanti alle gare senza che due partecipanti gareggino insieme più di una volta e facendo gareggiare ogni partecipante lo stesso numero di volte. Questa verifica per gli ultimi due casi è risultata piuttosto laboriosa. Per 5 di queste 11 situazioni è risultato che non esiste una soluzione.

Indicando con 1, 2, 3 ... gli individui partecipanti, rappresento di seguito le terne – ciascuna rappresentante una gara – che risolvono il problema (a meno ovviamente delle possibili permutazioni degli individui partecipanti).

p	n	g	terne di individui gareggianti									
3	1	1	123									
4	3	4	-									
6	1	2	123	456								
6	2	4	123	145	246	356						
7	3	7	-									
8	3	8	-									
9	1	3	123	456	789							
9	2	6	123	145	267	389	348	579				
9	3	9	123	145	167	246	257	347	358	635	689	
9	4	12	-									
10	3	10	-									

Con questo posso dire di avere di aver semplificato il problema escludendo molte combinazioni di p , n e g che sono impossibili, ma la soluzione del problema in generale richiede comunque una verifica laboriosa dei casi non esclusi.

Giuliotom