Ciao a tutti,
il mese scorso siete stati un po' birichini presentando un problema indeterminato.
Dopo tanti anni oramai vi conosco e so che vi divertite a "tirare a fregare"... Ma sapete cosa vi dico? Che così mi diverto di più anch'io: è sicuramente più stimolante cercare di risolvere un problema pieno di trabocchetti invece di uno che non lo ha.

Ma veniamo a noi. Il primo problema chiedeva di individuare la strategia ottimale per effettuare più lanci possibile in un ipotetico gioco di frisbee nel quale ogni persona non può lanciare due o più di due volte alla stessa persona. Bisogna massimizzare il numero di lanci e capire se indipendentemente dalle dimensioni del gruppo il numero massimo di lanci realmente effettuabili coincide con il limite superiore dei lanci possibili.

Iniziamo con il costruire una tabella quadrata con tante righe (e colonne) quanti sono i giocatori.
Numeriamo le righe dall'alto e le colonne da sinistra. Numeriamo i giocatori da 1 a *n*.
Ogni volta che il giocatore "i" lancia il fresbee al giocatore "j" riempiamo la casella (i,j) della tabella. Nota: $n \varepsilon N, \quad 1 \leq i,j \leq n$
Il problema diventa quello equivalente di riempire tutte le caselle della tabella (tranne quelle della diagonale, un giocatore non può lanciare il frisbee a se stesso) con la regola che il numero di colonna della casella riempita al passo *k* $(k \varepsilon N)$ diventa il numero di riga della casella riempita al passo *k*+1 (chi riceve il frisbee è quello che lo lancia al passo successivo).

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	J=6
i=1						
i=2						
i=3						
i=4						
i=5						
i=6						

Tabella per *n*=6

Si vede subito che il limite superiore di lanci possibili, per *n* giocatori, è pari a $n^2 - n$.

Dimostreremo ora che per qualunque numero *"n"* di giocatori esiste una strategia che ci permette di effettuare proprio il massimo dei lanci possibili. Come? Per induzione!
Dimostriamo prima che esiste una strategia ottimale per , $n = 2$, $n = 3$ $(n, m\ \varepsilon N)$.
Dimostriamo poi che se esiste una strategia ottimale per *n=m* giocatori allora esiste anche una strategia ottimale per *n=m+1* giocatori.
Contiamo i lanci effettuati e riempiamo la casella del lancio dal giocatore "i" al giocatore "j" con il numero progressivo che identifica il numero di passaggi avvenuti fino a quel momento (compreso il lancio in corso).

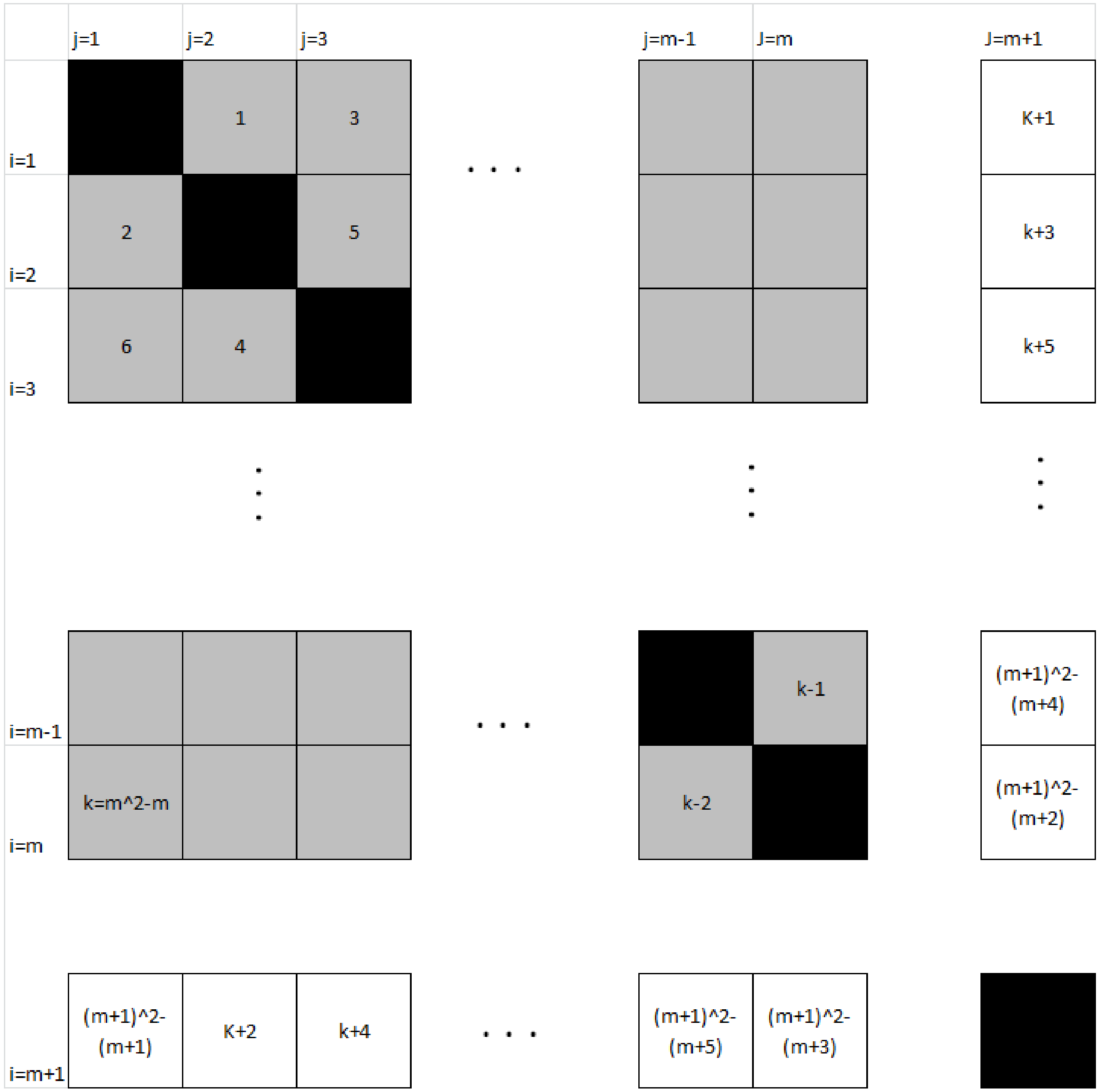
Se abbiamo 3 giocatori abbiamo che il giocatore 1 lancia al 2 (primo passaggio), poi il giocatore 2 rilancia all'1 (secondo passaggio), poi l'uno al 3, poi il 3 al 2, poi il due al 3 (quinto passaggio) ed infine il 3 rilancia all'1 avremo una tabella così compilata:

	j=1	j=2	j=3
i=1		1	3
i=2	2		5
i=3	6	4	

Questa tabella mostra che esiste una strategia ottimale sia per $n = 2$che per $n = 3$.
Aggiungiamo che in tale strategia nell'ultimo passaggio il frisbee torna al giocatore "1".

Sotto queste ipotesi (tabella di dimensioni *n=m* riempita e frisbee in mano al giocatore 1), vediamo se riusciamo a riempire una tabella a cui abbiamo aggiunto una riga
ed una colonna, rispettivamente sotto e a destra (tabella di dimensioni n=m+1).
La strategia è molto semplice: si inizia col primo giocatore che lancia all'(m+1)-esimo giocatore (casella in alto a destra); l'(m+1)-esimo giocatore lancia al ***secondo giocatore*** (seconda casella da sinistra della (m+1)-esima riga); il secondo lancia all'(m+1)-esimo giocatore (seconda casella dall'alto della (m+1)-esima colonna), l'(m+1)-esimo giocatore lancia al terzo giocatore e così via fino a quando l'm-esimo giocatore lancia all'(m+1)-esimo giocatore, e l'(m+1)-esimo giocatore rilancia il fresbee al primo giocatore completando così i lanci (e riempiendo la prima casella a sinistra della (m+1)-esima riga).

Più facile a farsi che a dirsi, come si può vedere dallo schema seguente:



Abbiamo quindi dimostrato per induzione che qualunque numero di giocatori può adottare una strategia che permetta loro di effettuare il numero massimo di lanci possibile.