L’immaginazione al potere

Rudi Matematici - Dicembre 2013

Soluzione di Carlo

Riposta

La folaga dalla fronte bianca si salvera’ se la velocita’ di Gaetanagnesi e’ quattro volte la sua velocita’, come ha dichiarato Rudy.
Il rapporto tra la velocita’ massima di Gaetanagnesi e la folaga, che ho definito come k, individua varie situazioni in cui la folaga si puo’ salvare in modi diversi.
C’e la possibilita’ di salvezza se il rapporto di velocita’ gatta/folaga e’ inferiore a 4.6033...
Il decollo rapido al suolo assicure la salvezza alla folaga anche quando tocca terra solo un istante prima dell’arrivo della gatta.
Le situazioni che ho individuato sono:

1. **$k < \pi$**
2. **$\pi < k < \pi + 1$**
3. **$\pi + 1 < k < 4.60334$**

Spiegazione

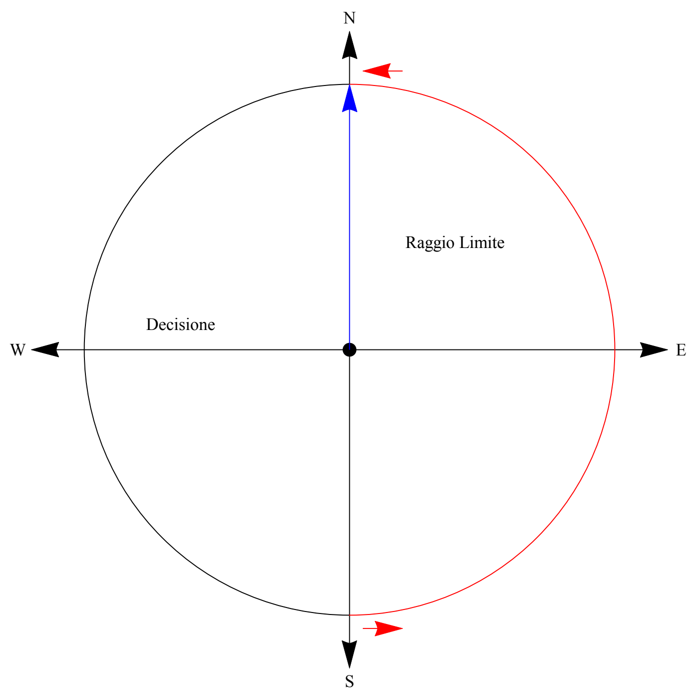
Definizioni

f = Folaga dalla fronte bianca
g= Gaetanagnesi
O= Centro del lago
R= Raggio del lago circolare
r= Distanza della folaga dal centro del lago
vf= Velocita' della folaga
vg= Velocita' di Gaetanagnesi
v_t= Componente trasversale di vf
v_r= Componente radiale di vf
k= rapporto $\frac{vg}{vf}$
ω_f= Velocita' angolare della folaga
ω_r= Velocita' radiale della folaga

Caso 1 - 0 < k < π

La folaga parte direttamente verso la riva prendendo la direzione opposta alla posizione della gatta.

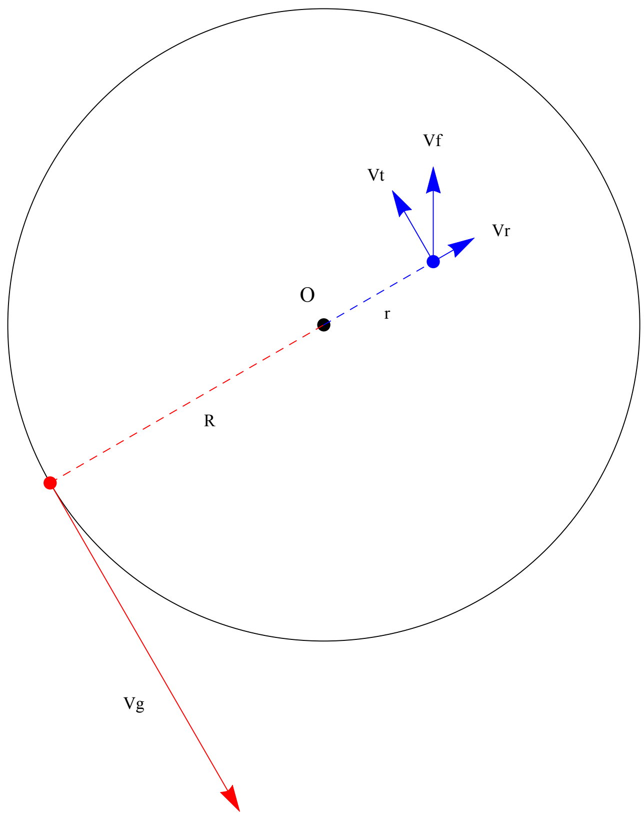
Il tempo per arrivare a riva sara' $t_f = \frac{R}{vf}$ mentre il tempo della gatta per raggiungere il punto di approdo sara' $t_g = \frac{\pi R}{k\, v_f}$.
Sara' sempre $t_g > t_f$ se k < π.



Caso 2 - $\pi < k < \pi + 1$

Avvicinamento alla riva in sicurezza

La folaga deve allontanarsi dal centro del lago mantenendo Gaetanagnesi in posizione diametralmente opposta. Ovviamente la gatta si mettera' correre lungo la sponda del lago cercando di arrivare al possibile punto di approdo prima della folaga.
Osserviamo la figura :



La velocita' della folaga V_f puo' essere scomposta in V_r,
velocita' radiale che avvicina la folaga alla riva,
e una velocita' tangenziale V_t che mantiene la gatta in opposizione rispetto al centro.

Poiche' deve essere $\omega_f = \omega_g$, sara' $\frac{v_t}{r} = \frac{v_g}{R}$, ovvero $V_t = \frac{r}{R} V_g$ e $V_r = \sqrt{V_f^2 - V_t^2} .= \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{R^2}}\, V_f$.

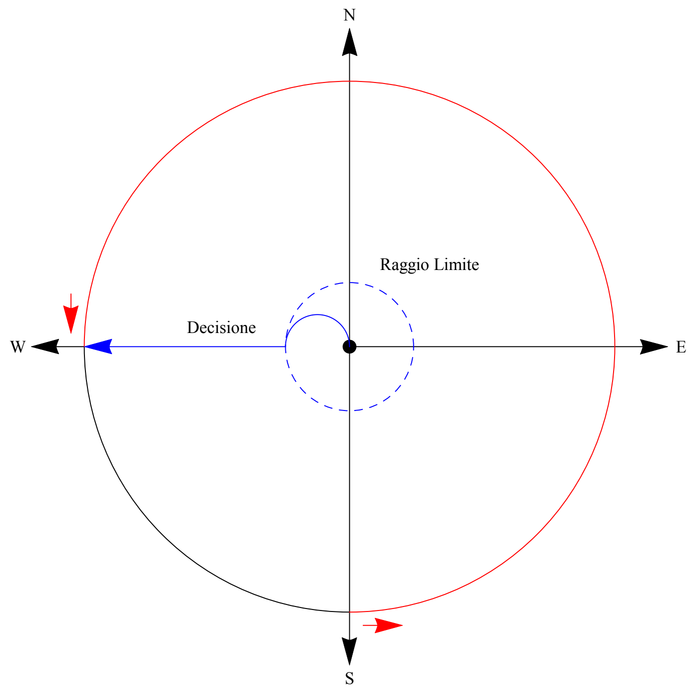
Quando la V_r si annulla, la folaga si trova ad una distanza r dal centro tale che tutta la sua velocita' e' necessaria per mantenere la gatta in opposizione. Questo valore di r, definiamolo come raggio limite e' pari a $\frac{R}{k}$.

Quanto tempo impiega la folaga a raggiungere il raggio limite? Essendo $V_r = \frac{dr}{dt}$, $\int_0^{r_l} \frac{1}{vr}\, dt$ e si ricava $t_l = \frac{\pi R}{2\, k\, vf}$.

Il percorso seguito dalla folaga e' definito in coordinate polari come **R Sin[α]** , dove **R** e' il raggio del lago e α l'angolo descritto dalla gatta dall'inizio. E' una semicirconferenza di raggio r_l/2 ovvero $\frac{R}{2k}$.

Decisioni

Quando la folaga ha raggiunto il raggio limite deve prendere una decisione in base al rapporto di velocita' con Gaetanagnesi. Cosideriamo il cas in cui **k < π +1.**
La folaga si dirige direttamente sul punto della riva piu' vicino che si trova ad una distanza pari a $\mathbf{R}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.



Tempo della folaga = $\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right) R}{vf} + \frac{\pi R}{2\, k\, vf}$

Tempo della gatta = $\frac{3}{2}\pi R \frac{1}{k} \frac{1}{vf}$

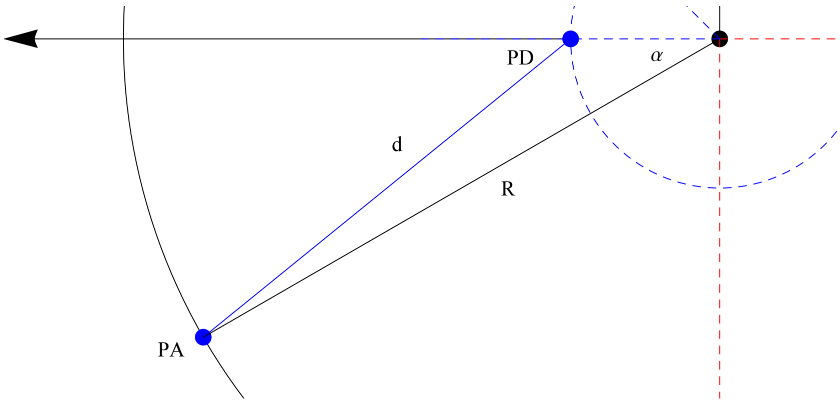
I tempi diventano eguali per $\mathbf{k = 1 + \pi}$

Essendo 1 + π = 4.14159 , e quindi maggiore del k dichiarato da Rudy, la folaga si salvera'.

Caso 3 - $\pi + 1 < k <$ 4.6033

Punto di decisione

Come nel caso 2 , la folaga mantiene costantemente la gatta in opposizione sino al punto di decisione. Vediamo se puntando ad punto diverso della riva diverso da quello piu' vicino ci sono possibilita'.
Occorre trovare la rotta giusta e per quali k e' praticabile.



Sia **PD** il punto di decisione ,
PA il punto di approdo e con α definiamo l' angolo formato dal raggio **R** con il **PA** e la direzione **W** (nell' ipotesi che la gatta vada in senso antiorario).
d e' uguale alla distanza PD – PA.
Abbiamo :

$$d = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{k}\right)^2 - 2\,\frac{R^2}{k}\,\mathrm{Cos}[\alpha]}$$

Percorso della folaga, dall' inizio dell' inseguimento :

$$pf = \pi\,\frac{R}{2\,k} + d$$

Percorso della gatta, dall' inizio dell' inseguimento :

$$pg = \frac{3}{2}\,\pi\,R + R\,\alpha$$

Tempo impiegato dalla folaga per arrivare all' approdo :

$$tf = \frac{pf}{vf} = \frac{\pi}{2\,k} + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} - \frac{2\,\mathrm{Cos}[\alpha]}{k}}$$ (si assume la velocita' della folaga = 1 , quella della gatta = k e R = 1)

Tempo impiegato dalla gatta per arrivare all'approdo:

$$tg = \frac{pg}{k} = \frac{3\,\pi + 2\,\alpha}{2\,k}$$

Sono due equazioni in $\{\alpha, \mathbf{k}\}$ che possono essere risolte numericamente con la funzione FindRoot di *Mathematica*, imponendo la condizione **tf = tg** (condizione limite per il raggiungimento della folaga).

Risultato :

α = 1.35182 rad ovvero 77.4534 gradi
k = 4.60334

Se dimensioniamo lo scenario lacustre con numeri esemplificativi, ad esempio R =100 m, vf = 1 m/s e vg =4.60334 - ϵ (piccolo a piacere) m/s ,
La folaga s'involera' dopo **131,735 s** lasciando Gaetanagnesi a bocca asciutta.

Buon lavoro a tutti voi .

Carlo