Problema di Le Scienze Marzo 2010

Meccanica dei Fluidi

Considerando valida l'ipotesi, proposta dal testo, di perfetta e istantanea omogeneità della soluzione ink / H_2O del recipiente mediano (soluzione a concentrazione di inchiostro variabile nel tempo) e chiamando con V il volume iniziale di H_2O e di inchiostro (stessa quantità) nei due recipienti, con Q la portata volumetrica della soluzione ink / H_2O e di inchiostro (rubinetti uguali) e con C_{ink} (t) la funzione concentrazione della soluzione ink / H_2O del recipiente di mezzo si ha:

1. $$C_{ink}(t) = \left(Q\cdot t - \int_0^t Q\cdot C_{ink}(\mu)\, d\mu \right) / \left(V - \cancel{Q}t + \cancel{Q}t \right)$$

con μ variabile muta di integrazione**.**

I due termini a denominatore si elidono per la summenzionata ipotesi di ugual portata volumetrica, in sintesi il volume totale della soluzione nel recipiente di mezzo non varia nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_0$, e l'eqz. 1 diventa:

2. $$V\cdot C_{ink}(t) + \int_0^t Q\cdot C_{ink}(\mu)\, d\mu = Q\cdot t$$

Dalla definizione di portata volumetrica si ha che l'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_0 = t_f - 0$ trascorso dall'istante di apertura dei due rubinetti sino allo svuotamento del primo recipiente e alla contemporanea chiusura del rubinetto del recipiente posto nel mezzo è dato da:

3. $$t_f - 0 = V / Q; \quad t_f = V/Q$$

Dividendo ambo i membri dell'eqz. 2 per V ed esplicitando rispetto a C_{ink} (t) si ottiene la seguente equazione integrale nell'incognita C_{ink} (t):

4. $$C_{ink}(t) = - \left\{ \int_0^t C_{ink}(\mu)\, d\mu \right\} / t_f + t/ t_f$$

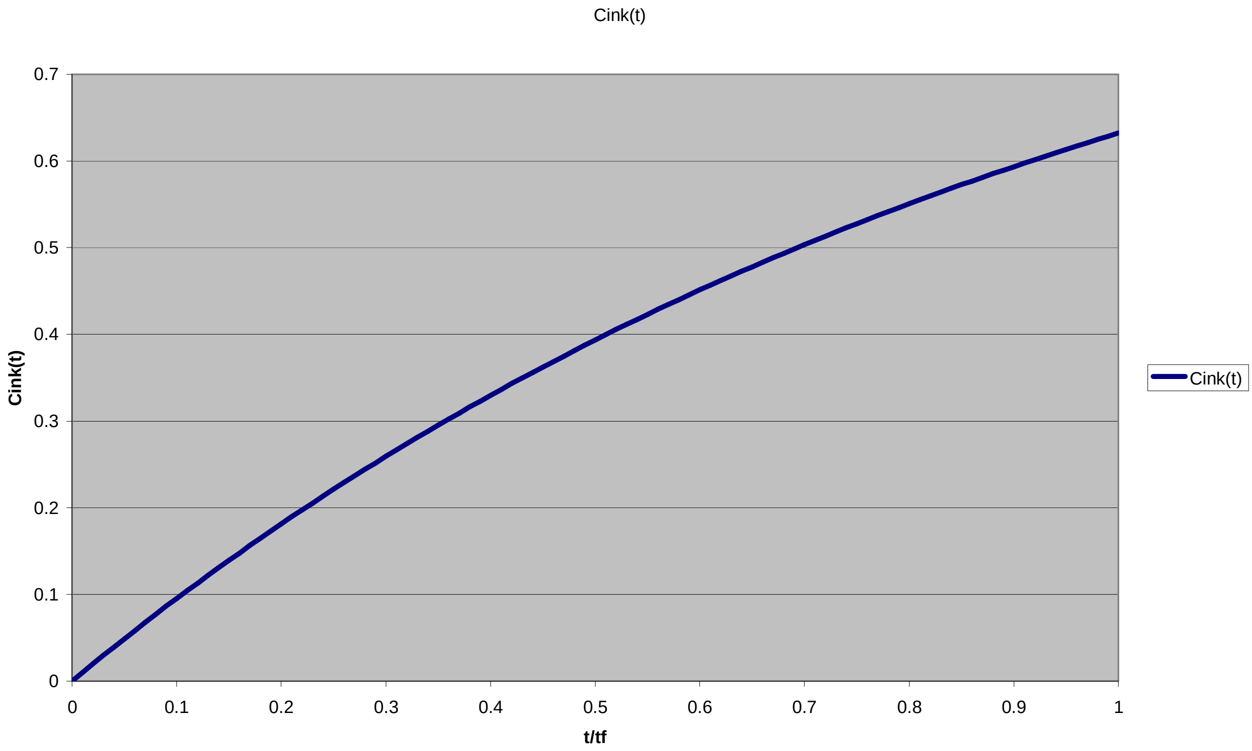
L'eqz 4 è una equazione integrale del tipo di Volterra lineare di seconda specie. Per il teorema di esistenza e unicità sappiamo che la soluzione esiste unica, dato che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità sono in questo caso soddisfatte (vedi Appendice A).
Per calcolare la soluzione procediamo con la derivazione di entrambi i membri della 4 ottenendo:

5. $$C'_{ink}(t) = - C_{ink}(t)/ t_f + 1/ t_f$$

La 5 è un'equazione differenziale del primo ordine lineare completa ; applicando la nota formula risolutiva (vedi Appendice B) e considerando la condizione iniziale $\mathbf{C_{ink}(0) = 0}$ si ottiene:

6. $$C_{ink}(t) = 1 - e^{-t/t_f}$$

L'andamento della funzione C_{ink} (t) è rappresentato nel grafico di Fig. 1.



\- Fig. 1 –

Il valore della concentrazione al tempo finale t_f ovvero la soluzione del problema risulta essere:

7. $$C_{ink}(t_f) = 1 - e^{-1} = 1 - 1/e = 0.6321$$

Pertanto la concentrazione della soluzione che si ha nel recipiente di mezzo al momento dello svuotamento del primo recipiente, e della concomitante chiusura del secondo rubinetto è del **63,21%,** come si puo' facilmente notare dal grafico in Fig. 1, insieme all'andamento della stessa in tutto l'arco di tempo proposto.

Si puo' inoltre calcolare la concentrazione del terzo recipiente all'istante t = t_f. Si ha infatti, chiamando con C_{ink3} (t) la concentrazione del recipiente sul fondo:

8. $$C_{ink3}(t) = [\,\cancel{Q}\cdot \int_0^t C_{ink}(\mu)\, d\mu\,] / \cancel{Q}\cdot t$$

Dalla quale, sostituendo la 6 e semplificando, si ottiene :

9. $$C_{ink3}(t) = 1 + t_f/t\,(e^{-t/t_f} - 1)$$ da cui:

$$C_{ink3}(t_f) = 1/e = 0.3678$$

La soluzione nel recipiente sul fondo avrà dunque all'istante $t = t_f$ una concentrazione pari al 36.78 % in inchiostro.

Appendice A

L'equazione di Volterra di II specie è del tipo:

$$\alpha) \qquad y(x) = \int_0^x K(x,t,y(t))\,dt + \varphi(x)$$

Quando $K(x,t,y(t)) = K(x,t)\cdot y$ l'eqz. integrale si dice lineare e $K(x,t)$ (nel nostro caso banalmente $K(x,t) = 1$) si dice nucleo dell'equazione. Il relativo teorema di esistenza e unicità in grande è il seguente:

ipotesi:

- D è un dominio in R^3 definito da: ($0 \le t \le x \le h$, $-\infty < y < +\infty$)
- $K(x,t,y)$ funzione continua in D
- $K_y(x,t,y)$ continua e limitata in D ($K_y(x,t,y)$ è la derivata parziale rispetto a y della $K(x,t,y)$)
- $\varphi(x)$ continua nell'intervallo [0;h]

tesi:

- esiste una e una sola soluzione y(x) continua nell'intervallo [0;h] dell'equazione α .

Come si puo' facilmente constatare le ipotesi sono, nel caso del nostro problema, completamente soddisfatte. Si ha infatti:

$K(x,t,y(t)) = -y$ che è continua per ogni $y \in (-\infty;+\infty)$
$K_y(x,t,y) = -1$ che è continua e limitata in D
$\varphi(x) = x/\text{cost}$ che è funzione continua nell'intervallo [0;h].

Esiste pertanto unica la soluzione dell'equazione integrale data calcolata successivamente come sopra.

Appendice B

Data l'equazione differenziale del primo ordine lineare del tipo:

$\beta) \qquad y' = y\cdot\varphi(x) + \psi(x) \qquad$ (nel caso del problema $\varphi(x) = \text{cost}$ **e** $\psi(x) = \text{cost}$)

si ha per essa la seguente formula risolutiva diretta:

$$y(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx}\left[C + \int \psi(x)\cdot e^{-\int \varphi(x)\,dx}\,dx \right]$$