Verso l'infinito ed oltre

Gianmarco Bramanti*
Università rudica
(Dated: 22 maggio 2011)

Doc e Treccia, ignari delle trame di Rudy sono su due navicelle spaziali unite da un cavo di Rame e Kevlar pronti a filar via quasi alla velocità della luce. Il fine di Rudy è di stabilire se il cavo di Rame e Kevlar reggerà al moto posto che Treccia e Doc eseguano le stesse manovre, ciascuno nella propria navicella dotate entrambe di motori.

IL PROBLEMA

Rudy: "...Alice e Doc sono adesso ben posizionati, ognuno nella sua graziosa navicella, equidistanti dalla ISS e uniti da robusto cavo di kevlar e rame di una decina di chilometri. Al mio via, entrambi cominceranno a muoversi lungo la direzione del cavo ben teso che li unisce, uno dietro l'altra. [..] Il problema è che non riesco a visualizzare bene le conseguenze, le implicazioni teoriche di questo sistema dinamica. Guarda, adesso siamo tutti solidali e relativamente fermi, in questo sistema di riferimento che chiamiamo SR della ISS. Quando di due tapini partiranno, li vedremo muoversi rispetto a noi, con le relativistiche conseguenze del caso. D'altra parte, Doc dal suo pesonale sistema di riferimento vedrà Treccia compiere le stesse azioni, e altrettanto capiterà a treccia osservando il SR di Doc. E, con buona pace delle lezioni di Einstein, non riesco ancora a capire se ilc avo che li unisce si romperò o meno: è certo in grado di resistere a qualche buona sollecitazione, ma se entrano in ballo le contrazioni e dilatazioni relativistiche... Così mi son detto: che c'è di meglio che provare?"

RISPOSTA

A causa del cavo in Kevlar e delle contrazioni relativistiche, l'accelerazione di Doc risulta maggiore dell'accelerazione di treccia in misura di $a_1 = \frac{a_0}{1-\frac{a_0 L}{c^2}}$ dove $c^2/L = 9 \times 10^{12} ms^{-2}$ è un valore limite dell'accelerazione ben lungi dall'essere raggiunto. Anche ammesso di sottoporre Treccia e Doc ad accelerazioni insostenibili di 100 o 1000 volte maggiori di quella dovuta all'attrazione terrestre sul livello del mare (del resto siamo in una rubrica di giochi matematici e Treccia e Doc sono fondamentalmente due super-eroi dotati di poteri speciali) tali da spingerli al 90% della velocità della luce in una settimana, o in meno di un giorno, risulterebbe comunque un surplus di accelerazione a carico del cavo in Kevlar-Rame pari a non più di $\Delta a = 10^{-4} ms^{-2}$ e quindi anche per una massa della navicella di 10 tonnellate risulta una forza peso non superiore ad un chilogrammo-peso. Cioè il cavo in Kevlar-Rame regge benissimo l'accelerazione aggiuntiva dovuta alla contrazione. Diversamente però al capo opposto il cavo risulta soggetto ad una tensione: $\rho a L + \frac{M\Delta a}{\pi r^2}$ che non può superare la tensione di rottura del Kevlar-Rame (per una sezione di un mm^2 il secondo termine è trascurabile anche per l'acciaio). Considerando che a parità di peso il Kevlar ha una resistenza alla rottura superiore per cinque volte a quella del migliore acciaio basta fare un calcolo dell'accelerazione limite per l'acciaio migliore e moltiplicare il risultato per cinque ammesso che il contenuto in rame contribuisca trascurabilmente alla densità. Allora l'accelerazione limite risulta di circa $75 ms^{-2}$ Quindi il cavo può reggere con tranquillità una accelerazione di circa 7 volte quella terrestre al livello del mare.

SOLUZIONE

Immaginiamo per un momento che Treccia e Doc si muovano indipendentemente uno dall'altro, senza ausilio di un cavo, ma in modo che compiano le stesse azioni: quindi ciascuno vedrà l'altro accendere i motori nello stesso momento ed impostare la stessa forza, cui per l'assenza del cavo corrisponderà la stessa accelerazione (con il tempo di ritardo di 1 trentamillesimo di secondo dovuto alla distanza). In queste ipotesi con il trascorrere del tempo Doc e Treccia vedranno aumentare gradualmente la loro distanza relativa che invece rimmarrà invariata dal punto di vista di SR-ISS. Per dimostrare questo iniziamo dal risolvere le equazioni del moto della singola navicella nell'ipotesi di accelerazione costante. Possiamo partire dalle equazioni dinamiche per forza costante o trattare il problema cinematicamente. Preferisco seguire dapprima la via cinematica e poi mostrare come l'impostazione dinamica (che presuppone in verità tacitamente l'argomento cinematico conduce più speditamente al risultato)

Cinematica dell'accelerazione costante

Supponiamo che Treccia si stia già muovendo con velocità v rispetto ad SR-ISS ed indichiamo con un apice le coordinate di Treccia in un riferimento inerziale K inizialmente in quiete. Mentre senza apice le corrispondenti coordinate nel sistema affine di SR-ISS che ha lo stesso centro del centro sistema K. Fintanto che la velocità di Treccia è contenuta l'equazione del moto risulta:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = a \tag{1}$$

in accordo alla dinamica newtoniana. In SR-ISS risulta:

$$x = \gamma x' + \gamma\beta ct' \tag{2}$$
$$ct = +\gamma ct' + \gamma\beta x' \tag{3}$$

dove $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ essendo v la velocità di K rispetto ad SR-ISS e c la velocità della luce nel vuoto. Fintanto che l'equazione del moto newtoniana è valida ed il tempo proprio di Treccia può essere confuso con il tempo del riferimento K possiamo parametrizzare il moto in SR-ISS ponendo semplicemente $x' = at'^2/2$. In modo che:

$$x = \gamma at'^2/2 + \gamma\beta ct' \tag{4}$$
$$ct = \gamma\beta at'^2/2 + \gamma ct' \tag{5}$$

Allora derivando una volta rispetto a t' con t'=0:

$$\frac{dx}{dt'} = \gamma\beta c \tag{6}$$
$$\frac{dt}{dt'} = +\gamma \tag{7}$$

e derivando due volte:

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = \gamma a \tag{8}$$
$$\frac{d^2t}{dt'^2} = \gamma\beta a/c \tag{9}$$

Queste equazioni sono esatte in quanto entrambe le ipotesi di approssimazione che abbiamo premesso a validazione della descrizione parametrica approssimata del moto valgono fino al secondo ordine essendo la correzione relativista relativa a t' del secondo ordine in v che è del primo ordine in t' (in modo che la correzione assoluta è del terzo ordine in t'). Derivando l'equazione 6 rispetto a t ed usando l'equazione 7 con la regola di derivazione della funzione inversa risulta:

$$\frac{d(\gamma\beta c)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt'}\right) = \frac{d^2x}{dt'^2}\frac{dt'}{dt} = ga\frac{1}{g} = a \tag{10}$$

Da cui risulta:

$$\gamma\beta = at/c \tag{11}$$

E poiché $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$:

$$\beta = \frac{(at/c)}{\sqrt{1+(at/c)^2}} \tag{12}$$
$$\gamma = \sqrt{1+(at/c)^2} \tag{13}$$

Da cui risulta che la velocità è:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(at)}{\sqrt{1+(at/c)^2}} \tag{14}$$

ed integrando in t, con la condizione iniziale $x(0) = x_0$:

$$x(t) = x_0 + (c^2/a)(\sqrt{1+(at/c)^2} - 1) \tag{15}$$

Dinamica dell'accelerazione costante

L'impostazione dinamica del problema parte dall'equazione del moto relativistica:

$$\frac{dp}{dt} = f \tag{16}$$

dove $p = m\beta\gamma c$ è la definizione relativistica dell'impulso e conduce immediatamente all'equazione (10).

Ubicazioni relative dei corpi ad accelerazione costante

Ad ogni tempo di SR-ISS la distanza fra Treccia e Doc nelle ipotesi di moto indipendente ma uguale risulta costante. Non è lo stesso nel riferimento di Treccia. Infatti in tale riferimento la distanza di Doc sarà, in prima approssimazione, finché risulta $at << c$, data da γL questa distanza tende a crescere e per calcolare l'esatto valore occorre risolvere un sistema:

$$\Delta x' = \gamma\Delta x(t) - \beta\gamma c\Delta t \tag{17}$$
$$0 = c\gamma\Delta t - \beta\gamma\Delta x(t) \tag{18}$$

dove:

$$\Delta x(t) = -L + \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{a(t+\Delta t)}{c}\right)^2} - \sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}\right) \tag{19}$$

L'equazione 18 impone qui il vincolo di simultaneità del riferimento inerziale in cui la navicella che ospita Treccia è istantaneamente in quiete al tempo t. Nel limite $at/c >> 1$ si può stimare facilmente:

$$\Delta t = 2\sqrt{Lt/c} \tag{20}$$
$$\Delta x = -L + 2\sqrt{Lct} \tag{21}$$

Da un punto di vista geometrico la soluzione esatta del sistema corrisponde a null'altro che al sistema fra due iperboli parallele ed una retta. Un'attenta considerazione del problema geometrico permette di concludere che la distanza apparente fra Treccia e Doc in mancanza di cavo in Kevlar-Rame risulta monotona crescente.

Il problema dinamico in presenza del cavo inestensibile

Supponiamo per un momento di disporre anziché del cavo in Kevlar-Rame, di un vincolo capace di mantenere costante la mutua distanza di Treccia e Doc, vedremo che per accelerazioni umanamente sostenibili il cavo di Kevlar-Rame può comportarsi come tale. Per procedere in questa direzione andremo a "costruire" la traiettoria di Doc e dei punti del cavo a partire da quella di Treccia in modo che ogni punto rimanga, in ciascun riferimento istantaneo di quiete per Treccia $K(t)$ ad una distanza costante lungo l'intero moto.

Dalle equazioni (2,3) risulta che i punti sincronizzati a Treccia nel sistema inerziale istantaneamente in quiete con Treccia quando il tempo di SR-ISS vale t stanno sulla linea d'universo:

$$x(\Delta x') - x^{Tr}(t) = \gamma \Delta x' \tag{22}$$
$$t(\Delta x') - t = \gamma\beta \Delta x' \tag{23}$$

Dove $\Delta x'$ è la distanza da Treccia nel riferimento $K(\eta)$ definito dal tempo $\eta = t$ misurato in SR-ISS relativamente alla posizione di Treccia lungo la sua linea oraria.

Se andiamo a sostituire il valore di $\beta\gamma = a\eta/c$ dall'equazione 11 e l'espressione per $x^{Tr}(\eta) = x_0 + c^2/a(\gamma(\eta) - 1)$ dall'equazione 15 otteniamo:

$$x(x', \eta) = (x_0^{Tr} - c^2/a) + \gamma(\Delta x' + c^2/a) \tag{24}$$
$$t(x', \eta) = \eta(1 + \Delta x'/(c^2/a)) \tag{25}$$

Da questa equazione si impara che indipendentemente dal parametro η il punto di coordinata $x' = -c^2/a$ sincrono a Treccia ha coordinate in SR-Iss: $t = 0$ ed $x = x_0 - c^2/a$ che non dipendono da η. Di conseguenza se riferiamo a questo punto tanto la coordinata x_0^{Tr} di Treccia al tempo zero, che assume così il valore $x_0^{Tr} = c^2/a$, quanto le coordinate x', in modo che $\Delta x' = x' - c^2/a$ risulta:

$$x(x', \eta) = \gamma x' = x'\sqrt{1 + (a\eta/c)^2} \tag{26}$$
$$t(x', \eta) = (a\eta/c)x'/c \tag{27}$$

Le traiettorie dei punti sincroni, che si mantengono quindi a distanza costante da Treccia, sono ottenute dalla (26) tramite la (27) eliminando il parametro η:

$$x(x', t) = x'\sqrt{1 + (ct/x')^2} \tag{28}$$

Ogni traiettoria risulta quindi dalla traiettoria di Treccia per omotetia nel sistema SR-Iss e siccome le omotetie mandano rette date in rette parallele risulta che la velocità di ciascun punto simultaneo a Treccia nel suo riferimento istantaneo di quiete è identica, cioè ogni punto è istantaneamente in quiete nello stesso sistema inerziale in cui Treccia è in quiete (sia pure in momenti di SR-Iss differenti). Cioè punti che si mantengono equispaziati si muovono ad uguale velocità istantanea. Per confronto fra l'equazione 28 e l'equazione 15 risulta invece che le accelerazioni dei differenti punti sono differenti infatti risulta: $a(x') = c^2/x'$.

Ne sappiamo abbastanza per andare a stimare quale forza in più deve sviluppare il cavo per tenere Doc e Treccia a distanza costante. Risulta infatti:

$$a_1 = \frac{c^2}{x_0 - L} = \frac{a_0}{1 - \frac{a_0 L}{c^2}} \tag{29}$$

che è la formula chiave della risposta. Possiamo anche calcolare la sollecitazione di trazione nelle sezioni trasverse lungo il cavo che è necessaria per garantire il moto solidale di tutto il sistema dall'equazione differenziale:

$$\frac{d\tau}{dx} = \lambda a(x) \tag{30}$$

Da cui:

$$\tau(\Delta x) = M(a_1 - a_0) + \lambda c^2 Ln\left(\frac{x_0 - \Delta x}{x_0 - L}\right) \tag{31}$$

che nel nostro caso valendo l'ipotesi che $a_0 << c^2/L$ conduce alla testa del cavo ad una tensione di circa: $M(a_0^2 L/c^2) + \lambda L a_0$

Considerazioni numeriche

Supponiamo che la navicella di testa misuri un'accelerazione pari a quella di gravità terrestre e riesca a mantenerla per un tempo sufficientemente lungo. Dopo quanto tempo raggiungerebbe una velocità di 0.9 c? Allo scopo è sufficiente ricordare che la (11) $\gamma\beta = at/c$ da cui: $t = (c/a)\gamma\beta = (x_0/c)\gamma\beta = 2.06 \times 3 \times 10^7 s$ e siccome in un anno stanno 3.1×10^7 secondi otteniamo che circa 2 anni di Paolo e Rudy sarebbero necessari. In questo tempo lo spazio percorso sarebbe: $x(t) - x(0) = (\gamma - 1)x_0 = (\gamma - 1)c^2/a = 18 \times 10^{16} m$ che si estende ben oltre i confini del sistema solare. Si tratta infatti di 1,2 milioni di unità astronomiche, quando il sistema solare si estende per appena 80 unità astronomiche. Dalla 29 risulta che la differenza relativa di accelerazione fra Treccia e Doc ammonta in tutto questo ad appena 1 pico e tale sarà quindi questo l'ordine di grandezza della tensione fornita dal cavo rispetto alla spinta dei motori nel caso che queste siano uguali per Doc e per Treccia. Mentre la loro distanza apparente si riduce di circa 20 volte nel sistema di Paolo e Rudy.

Considerazioni accessorie: di ringiovanimenti, ed altre accelerazioni

Oltre alla questione principale cui abbiamo risposto si pongono altre questioni di curiosità che richiedono una migliore esplicitazione delle relazioni che intercorrono fra il tempo proprio misurato da Treccia e Doc con il tempo misurato da Rudy e Paolo Torniamo a questo scopo alle equazioni (6,7)

$$\frac{dx}{dt'} = \gamma\beta c \tag{32}$$

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \tag{33}$$

derivando la prima rispetto a t' e tenendo conto della seconda risulta:

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = a\gamma \tag{34}$$

e ricordando le equazioni 12 e 28 risulta:

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = (c^2/x_0)x \tag{35}$$

mentre derivando la seconda:

$$\frac{d^2t}{dt'^2} = (1/x_0)\frac{dx}{dt'} = (c/x_0)^2 t \tag{36}$$

Ne segue:

$$x(t') = x_0 Cosh(ct'/x_0) \tag{37}$$

$$t(t') = (x_0/c)Senh(ct'/x_0) \tag{38}$$

da cui:

$$\beta = \frac{dx}{dt} = Tanh(ct'/x_0) \tag{39}$$

e quindi il tempo proprio misurato da Treccia per necessario per giungere a velocità 0,9c è certamente

$$T = (x_0/c)Atanh(\beta) = (c/a)Atanh(\beta) \tag{40}$$

da confrontare con il tempo Paolo-Rudy, ottenuto dall'equazione 11: $t = (c/a)\gamma\beta$

Correttamente il fattore di contrazione non dipende dall'accelerazione ma solo dalla velocità raggiunta, quale che sia il tempo impiegato.

Il tempo di orologio segnato dagli orologi di bordo di Treccia e Doc è di solo il 71% del tempo trascorso per Paolo e Rudy. Cioè meno di un anno e mezzo per giungere a 0,9 c, quindi al ritorno Treccia e Doc (dopo 4 anni di Paolo e Rudy) per Treccia e Doc saranno trascorsi 3 anni, e quindi essi risulterebbero ringiovaniti di un anno. Rimanendo all'incirca coetenai fra loro nonostante le accelerazioni lievemente differenti.

Ragioniamo, comunque, anche al contrario: che accelerazione dovrebbero subire Treccia e Doc per giungere alla velocità di 0,9 c in, poniamo, una settimana? Il conto è presto fatto: $a = c\gamma\beta/t$. Ovvero, circa 100 g. Ma bastava anche una semplice proporzione infatti una settimana è un centesimo di due anni. Accelerazione, comunque, decisamente insopportabile che comporterebbe oltretutto un vantaggio di età identico solo in termini percentuali e quindi ben più esiguo in termini assoluti e la rottura del cavo di Kevlar.

CONCLUSIONI

Il cavo in Kevlar resiste bene alle accelerazioni dovute alla contrazione relativistica tanto che il maggiore effetto che pone un limite all'accelerazione è dovuto, non propriamente alla relatività ristretta, bensì alla "comune" massa inerziale newtoniana dello stesso filo.