

Incapacity has landed!

Rudi Matematici - Marzo 2013

Soluzione di Carlo

Riposta

La circumnavigazione di Marte, con una distribuzione casuale dei distributori e delle loro capacità, e' **sempre** possibile.

Ci sono due soluzioni distinte caratterizzate dalla posizione del distributore presso cui far atterrare Incapacity e dal verso di percorrenza dell'equatore (A - Antiorario; O- Orario).

Soluzione

Definizioni e convenzioni

Uso unita' di misura normalizzate $\{0,1\}$, sia per la lunghezza dell'equatore marziano che per la capacita' del serbatoio di Incapacity.

Siano n i distributori da posizionare.

Siano p_i le posizioni dei distributori d_i a partire da un punto di origine arbitrario sull'equatore e, convenzionalmente, in senso antiorario.

Siano q_i le capacita' dei distributori d_i . Deve essere $\sum_{i=1}^n q_i = 1$.

Chiamo tratta t_i la distanza pari a $|p_{i+1} - p_i|$. Deve essere $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

Ogni missione viene identificata da una serie di n tratte e di n capacita' : $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$.

Condizioni per il successo di una missione

Per esplicitare le condizioni che determinano il successo o l'insuccesso della missione (circumnavigazione di Marte) conviene partire con la missione generica con tre distributori : $\{t_1, t_2, t_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}$.

La missione con due distributori e' banale: si fa atterrare Incapacity presso il distributore con capacita' maggiore e lo si dirige verso l'altro distributore; raggiunto il secondo distributore, ha raccolto tutto il carburante necessario per completare la missione.

Chiamo **M3** la missione $\{t_1, t_2, t_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}$ senza aver definito la posizione di atterraggio.

La missione **M3** in senso orario (**M3 - A**) dovrebbe tornare al punto di partenza con una o piu' delle tre successioni di tratte $\{t_1, t_2, t_3\}, \{t_2, t_3, t_1\}, \{t_3, t_1, t_2\}$.

La missione **M3** in senso antiorario (**M3 - O**) dovrebbe tornare al punto di partenza con una o piu' delle tre successioni di tratte $\{t_3, t_2, t_1\}, \{t_2, t_1, t_3\}, \{t_1, t_3, t_2\}$.

Vediamo le condizioni necessarie per il successo della missione **M3 - A** $-P_1$, ovvero $\{t_1, t_2, t_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}$ con punto di atterraggio P_1 .

Si devono verificare tre gruppi di condizioni:

$$C_{11} = q_1 \geq t_1$$

$$C_{12} = q_1 + q_2 \geq t_1 + t_2$$

ricordando che $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ e $t_1 + t_2 + t_3 = 1$.

Le condizioni necessarie per il successo della missione **M3 - A** $-P_2$, ovvero $\{t_2, t_3, t_1\}, \{q_2, q_3, q_1\}$ con punto di atterraggio P_2 sono:

$$C_{21} = q_2 \geq t_2$$

$$C_{22} = q_2 + q_3 \geq t_2 + t_3$$

Le condizioni necessarie per il successo della missione **M3 - A** $-P_3$, ovvero $\{t_3, t_1, t_2\}, \{q_3, q_1, q_2\}$ con punto di atterraggio P_3 sono:

$$C_{31} = q_3 \geq t_3$$

$$C_{32} = q_3 + q_1 \geq t_3 + t_1$$

In modo analogo si ottengono le condizioni per il successo della missione **(M3 - A)** .

Generalizzando per missioni con **n** distributori, si ottengono **2 n** gruppi di condizioni con **n-1** condizioni ognuno.

Determinazione del distributore di atterraggio

Missione in senso antiorario.

Si definiscono le serie di capacità e tratte per ognuno dei possibili distributori di partenza:

$$P_1 \rightarrow \{\{q_1, q_2, q_3\}, \{t_1, t_2, t_3\}\}$$

$$P_2 \rightarrow \{\{q_2, q_3, q_1\}, \{t_2, t_3, t_1\}\}$$

$$P_3 \rightarrow \{\{q_3, q_1, q_2\}, \{t_3, t_1, t_2\}\}$$

Si calcolano le quantità cumulate di carburante e tratte per ogni distributore;

$$P_1 \rightarrow \{\{q_1, q_1+q_2, q_1+q_2+q_3\}, \{t_1, t_1+t_2, t_1+t_2+t_3\}\}$$

$$P_2 \rightarrow \{\{q_2, q_2+q_3, q_2+q_3+q_1\}, \{t_2, t_2+t_3, t_2+t_3+t_1\}\}$$

$$P_3 \rightarrow \{\{q_3, q_3+q_1, q_3+q_1+q_2\}, \{t_3, t_3+t_1, t_3+t_1+t_2\}\}$$

La differenza tra la serie delle capacità e quella delle tratte rappresenta la quantità di carburante rimasta all'arrivo di ogni distributore successivo a quello di partenza.

Per il successo della missione è necessario che la serie differenze non abbia termini ≤ 0 .

Le **n** serie differenze registreranno **{0, 1, 2, . . . , n-1}** insuccessi, non necessariamente in questo ordine.

Le stesse considerazioni possono essere fatte per le missioni in senso orario.

Tutto questo porta alla conclusione che ogni missione avrà due soluzioni, una per il percorso antiorario e una per il percorso orario.

Esempio numerico con 4 distributori

Posizioni	1	0
	2	0.225564
	3	0.644534
	4	0.844122

Missione

Serie Tratte	Serie Capacita'
{0.225564, 0.41897, 0.199587, 0.155878}	{0.0550648, 0.400688, 0.0942931, 0.449954}

Senso Orario

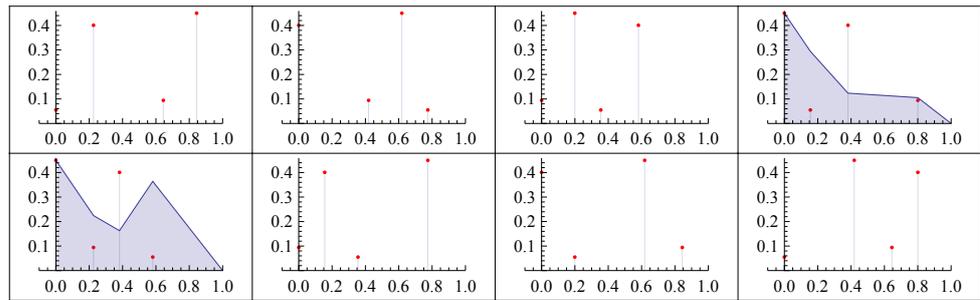
Serie Tratte	Serie Capacita'
{0.225564, 0.41897, 0.199587, 0.155878}	{0.0550648, 0.400688, 0.0942931, 0.449954}
{0.41897, 0.199587, 0.155878, 0.225564}	{0.400688, 0.0942931, 0.449954, 0.0550648}
{0.199587, 0.155878, 0.225564, 0.41897}	{0.0942931, 0.449954, 0.0550648, 0.400688}
{0.155878, 0.225564, 0.41897, 0.199587}	{0.449954, 0.0550648, 0.400688, 0.0942931}

Senso Antiorario

Serie Tratte	Serie Capacita'
{0.225564, 0.155878, 0.199587, 0.41897}	{0.449954, 0.0942931, 0.400688, 0.0550648}
{0.155878, 0.199587, 0.41897, 0.225564}	{0.0942931, 0.400688, 0.0550648, 0.449954}
{0.199587, 0.41897, 0.225564, 0.155878}	{0.400688, 0.0550648, 0.449954, 0.0942931}
{0.41897, 0.225564, 0.155878, 0.199587}	{0.0550648, 0.449954, 0.0942931, 0.400688}

Serie Differenze	1 - A	-0.170499	-0.188781	-0.294076	0
	2 - A	-0.0182823	-0.123576	0.170499	0
	3 - A	-0.105294	0.188781	0.0182823	0
	4 - A	0.294076	0.123576	0.105294	0
	1 - O	0.22439	0.162805	0.363906	0
	4 - O	-0.0615852	0.139516	-0.22439	0
	3 - O	0.201101	-0.162805	0.0615852	0
	2 - O	-0.363906	-0.139516	-0.201101	0

Grafici



Mapa dei grafici

1 - A	2 - A	3 - A	4 - A
1 - O	4 - O	3 - O	2 - O

I grafici tratteggiati indicano il livello del carburante nelle missioni con successo.

Saluti

Buon lavoro a tutti voi .

Carlo