Il gomitolo di Gordio

Rudi matematici - Marzo 2011

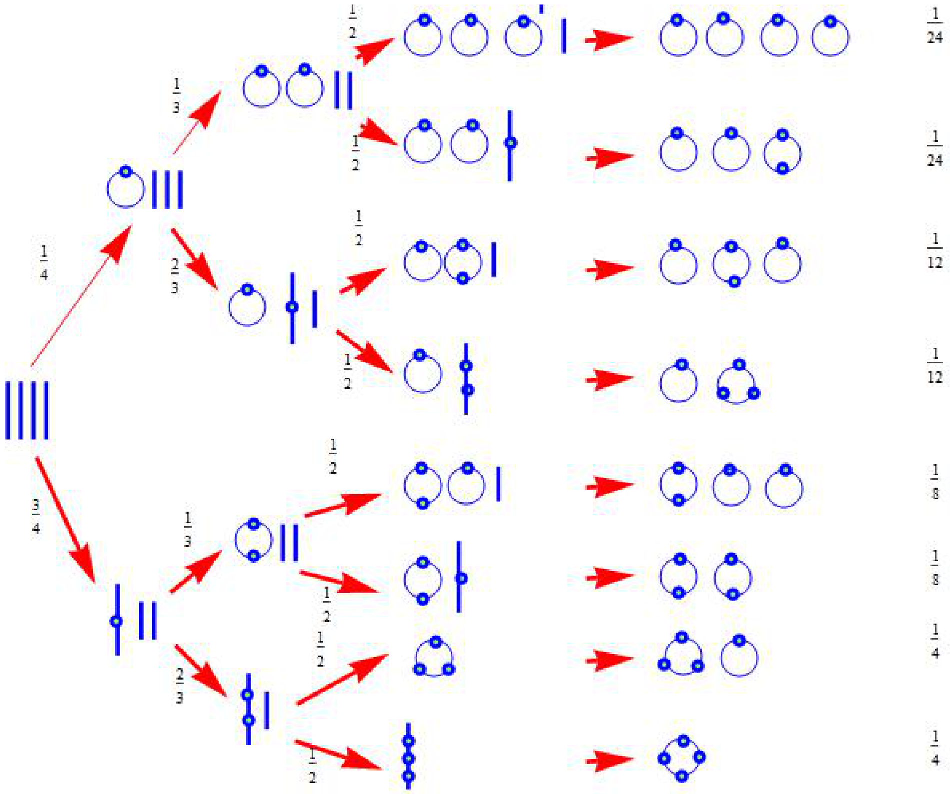
Soluzione di Carlo Ferjancic

- **Quick & dirty**

  Alla fine ci possiamo aspettare come situazione piu' probabile, **due anelli**. Uno formato da un solo filo (con un solo nodo) e uno formato da tutti gli altri fili rimasti.

- **Simulazione a mano**

  Supponiamo di partire con quattro fili. Scegliendo a caso, la probabilita' di individuare i due capi appartenenti allo stesso filo e' di $\frac{1}{4}$, mentre la probabilita' di scegliere due capi appartenenti a due fili diversi e' di $\frac{3}{4}$. Per esaminare tutti i casi possibili procediamo nello sviluppo di un albero binario fino la punto in cui rimane un solo filo (con nessuno o piu' nodi) i cui capi si possono annodare formando l'ultimo anello. Per ogni diramazione, il ramo in alto corrisponde alla chiusura di un anello e il ramo in basso alla giunzione di due fili. Se N e' il numero di fili disponibili ad ogni nodo dell'albero, la probabilita' del ramo in alto e' pari a $\frac{1}{N}$ mentre la probabilita' del ramo in basso e' pari a $\frac{N-1}{N}$.



- **Configurazioni**

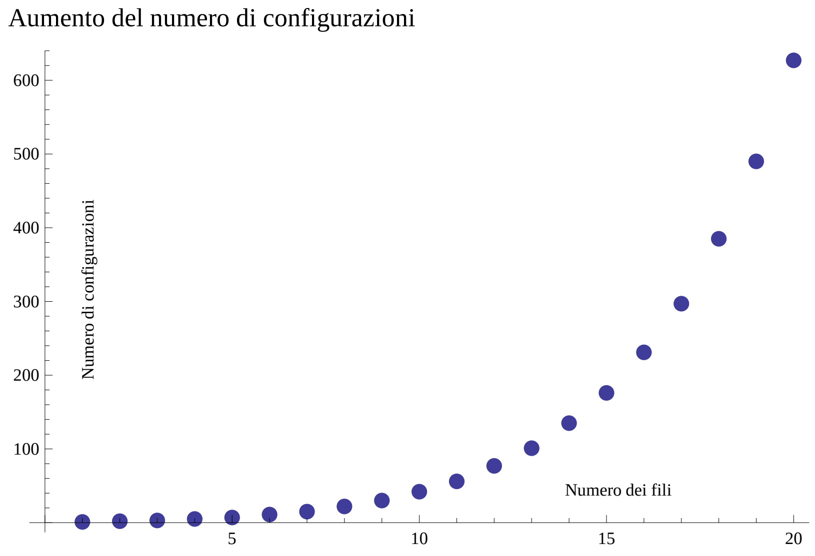
Quante sono le configurazioni distinte che si possono ottenere da N fili? Nel caso dell'esempio, N=4, si hanno {1,1,1,1}, {2,1,1},{2,2},{3,1} e {4}, quindi i modi possibili diversi di distribuire 4 oggetti in 4 contenitori.
La formula generale delle configurazioni ottenibili e' data da {{N},{N-1,1},{N-2,2},{N-2,1,1}, ..., {1,1,1,1....,1}}. Il numero delle configurazioni cresce molto velocemente con N.

{Numero di fili,Configurazioni distinte}

```
{1, {{1}}}
{2, {{2}, {1, 1}}}
{3, {{3}, {2, 1}, {1, 1, 1}}}
{4, {{4}, {3, 1}, {2, 2}, {2, 1, 1}, {1, 1, 1, 1}}}
{5, {{5}, {4, 1}, {3, 2}, {3, 1, 1}, {2, 2, 1}, {2, 1, 1, 1}, {1, 1, 1, 1, 1}}}
{6, {{6}, {5, 1}, {4, 2}, {4, 1, 1}, {3, 3}, {3, 2, 1}, {3, 1, 1, 1}, {2, 2, 2}, {2, 2, 1, 1}, {
```

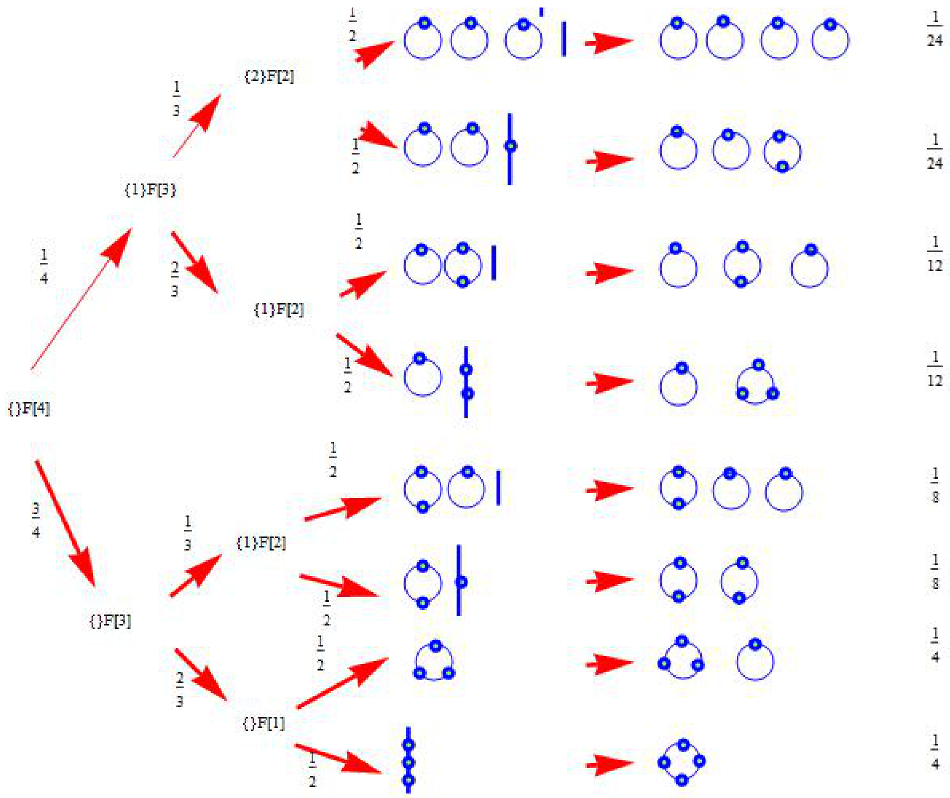
{Numero di fili, Numero di configurazioni distinte}

```
{{1, 1}, {2, 2}, {3, 3}, {4, 5}, {5, 7}, {6, 11}, {7, 15},
 {8, 22}, {9, 30}, {10, 42}, {11, 56}, {12, 77}, {13, 101}, {14, 135},
 {15, 176}, {16, 231}, {17, 297}, {18, 385}, {19, 490}, {20, 627}}
```



■ **Formula ricorsiva**

La simulazione suggerisce la struttura della funzione ricorsiva i cui parametri sono: Probabilita',Anelli chiusi e Fili disponibili (con relativi nodi).



■ **Configurazioni e probabilita'**

Dalla struttura della formula ricorsiva e' facile determinate immediatamente i valori di probabilita' delle configurazioni estreme: {1,1,1,1] e {4} in quanto la {1,1,1,1} e' pari a:

$\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}$, cioe' $\frac{1}{4!}$ e la {4} : $\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Con N fili si avra’ la configurazione quasi piu’ probabile, la {N} con probabilita’ $\frac{1}{N}$ e quella meno probabile {1,1,1, ...,1} con probabilita’ $\frac{1}{N!}$;
Perche’ {N} e’ meno probabile di {N-1,1} ? Perche’ vi sono piu’ contributi dalle permutazioni dei N-1 fili all’anello singolo. Nell’esempio, la configurazione {3,1} e’ prodotta dal percorso {}F[4],{1}F[3],{1}F[2] e dal percorso {}F[4],{}F[3],{1}F[2]. Si verifica che la probabilita’ di {N-1,1} e’ $\frac{1}{N-1}$ mentre la probabilita’ di {N} e’, come gia’ visto, $\frac{1}{N}$.

Risultati esatti con la formula ricorsiva

Le configurazioni sono elencate in ordine decrescente di probabilita’

N=3
$\left\{\left\{\{1,2\},\frac{1}{2}\right\},\left\{\{3\},\frac{1}{3}\right\},\left\{\{1,1,1\},\frac{1}{6}\right\}\right\}$

N=4
$\left\{\left\{\{1,3\},\frac{1}{3}\right\},\left\{\{4\},\frac{1}{4}\right\},\left\{\{1,1,2\},\frac{1}{4}\right\},\left\{\{2,2\},\frac{1}{8}\right\},\left\{\{1,1,1,1\},\frac{1}{24}\right\}\right\}$

N = 5
$\left\{\left\{\{1,4\},\frac{1}{4}\right\},\left\{\{5\},\frac{1}{5}\right\},\left\{\{1,1,3\},\frac{1}{6}\right\},\left\{\{2,3\},\frac{1}{6}\right\},\left\{\{1,2,2\},\frac{1}{8}\right\},\left\{\{1,1,1,2\},\frac{1}{12}\right\},\left\{\{1,1,1,1,1\},\frac{1}{120}\right\}\right\}$

. . .
. . .

N=10 $\left\{\left\{\{1,9\},\frac{1}{9}\right\},\left\{\{10\},\frac{1}{10}\right\},\left\{\{1,2,7\},\frac{1}{14}\right\},\left\{\{2,8\},\frac{1}{16}\right\},\left\{\{1,1,8\},\frac{1}{16}\right\},\left\{\{1,3,6\},\frac{1}{18}\right\},\left\{\{1,4,5\},\frac{1}{20}\right\},\left\{\{3,7\},\frac{1}{21}\right\},\left\{\{1,2,3,4\},\frac{1}{24}\right\},\left\{\{4,6\},\frac{1}{24}\right\},\left\{\{1,1,2,6\},\frac{1}{24}\right\},\left\{\{2,3,5\},\frac{1}{30}\right\},\left\{\{1,1,3,5\},\frac{1}{30}\right\},\left\{\{1,2,2,5\},\frac{1}{40}\right\},\left\{\{1,1,1,7\},\frac{1}{42}\right\},\left\{\{2,2,6\},\frac{1}{48}\right\},\left\{\{5,5\},\frac{1}{49}\right\},\left\{\{1,1,1,2,5\},\frac{1}{58}\right\},\left\{\{2,4,4\},\frac{1}{63}\right\},\left\{\{1,1,4,4\},\frac{1}{64}\right\},\left\{\{1,1,2,2,4\},\frac{1}{64}\right\},$ seguono altri 21 termini;

Limiti della formula ricorsiva

Per un numero di fili superiore a 10 il mio PC entra in crisi per tempi di elaborazione e quantita’ di memoria.
Ma poiche’ ci interessano solo le configurazioni piu’ frequenti, le prime due le possiamo calcolare facilmente anche nel caso del gomitolo di Gaetanagnesi:
per un gomitolo di circa 15 cm di diametro e lana standard, dopo il taglio con mannaia i fili devono essere svariate centinaia.

Saluti

Buon lavoro a tutti voi,

Carlo Ferjancic