Teorema. *Sia $\phi(n)$ il numero di interi in $[1,n]$ coprimi con n. Allora per ogni $\epsilon>0$ si ha*

$$\sum_{n\leq x}\phi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O_\epsilon(x^{3/2+\epsilon})$$

per $x\to\infty$.

Dimostrazione. Introduciamo la funzione ausiliaria $\Phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$\Phi(s):=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\phi(n)}{n^s}. \tag{1}$$

La serie converge per $s>2$, visto che sicuramente $0\leq\phi(n)\leq n$. La funzione ϕ è moltiplicativa, ovvero $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$ quando m ed n sono coprimi. Di conseguenza Φ può anche essere espressa come prodotto di Eulero:

$$\Phi(s)=\prod_p\Big(1+\frac{\phi(p)}{p^s}+\frac{\phi(p^2)}{p^{2s}}+\frac{\phi(p^3)}{p^{3s}}+\cdots\Big), \tag{2}$$

dove p varia sull'insieme dei numeri primi (ed 1 *non* lo è).
È noto che $\phi(p^k)=p^{k-1}(p-1)$ quando $k\geq1$, quindi l'espressione precedente è

$$\Phi(s)=\prod_p\Big(1+\frac{p-1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^{k(s-1)}}\Big) \tag{3}$$

che facendo appello alla serie geometrica si rivela essere

$$\Phi(s)=\prod_p\Big(1+\frac{p-1}{p}\frac{1}{p^{s-1}-1}\Big). \tag{4}$$

Ora viene un "trucco": prendiamo $s>2$ fissato. Nella variabile $\frac{1}{p}$ l'espressione precedente si scrive come

$$1+\frac{p-1}{p}\frac{1}{p^{s-1}-1}=1+\frac{p}{p^s}+O\Big(\frac{1}{p^s}\Big)$$

dove il termine $O(1/p^s)$ nasconde oggetti la cui grandezza è minore di $1/p^s$. In particolare i primi due termini del prodotto di Eulero coincidono con quelli che appaiono in

$$\zeta(s-1):=\prod_p\Big(1+\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{1}{p^{2(s-1)}}+\frac{1}{p^{3(s-1)}}+\cdots\Big). \tag{5}$$

Eseguendo i prodotti si scopre che

$$\zeta(s-1)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^{s-1}} \tag{6}$$

che per quanto segue conviene scrivere come

$$\zeta(s-1)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{n^s}, \tag{7}$$

mentre usando ancora la serie geometrica si ottiene

$$\zeta(s-1)=\prod_p\Big(1-\frac{1}{p^{s-1}}\Big)^{-1}. \tag{8}$$

Ed ora il trucco: visto che i primi due termini della (4) coincidono con quelli della (8), introduciamo una nuova funzione, H, definita da

$$H(s):=\frac{\Phi(s)}{\zeta(s)}. \tag{9}$$

Questo perché a seguito delle (4), (8) anche H ha un prodotto di Eulero, precisamente

$$H(s):=\prod_p\Big(1+\frac{p-1}{p}\frac{1}{p^{s-1}-1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^{s-1}}\Big), \tag{10}$$

in cui però il fattore legato al primo p

$$\Big(1+\frac{p-1}{p}\frac{1}{p^{s-1}-1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^{s-1}}\Big)$$

di fatto è della forma (nella variabile $1/p$ con p divergente)

$$1+O\Big(\frac{1}{p^{2s-2}}\Big).$$

Si è partiti quindi con due funzioni $\Phi(s)$ e $\zeta(s)$ le cui espressioni convergono per $s > 2$, e le si è combinate in una nuova espressione, la H, che converge però in un dominio più ampio: $2s-2 > 1$, ovvero $s > 3/2$: questo è il "trucco". Da qui in poi l'argomento è (più o meno) in discesa.
Se seguissimo i prodotti su p nella (10) otterremmo una espressione della forma

$$H(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{h(n)}{n^s} \tag{11}$$

dove le quantità $h(n)$ hanno un'espressione estremamente complicata, ma che per fortuna non ha alcun ruolo nel calcolo: per concludere basta sapere che quei numeri esistono. Infatti, la relazione (9) può essere invertita, a dare

$$\Phi(s) = \zeta(s-1)H(s)$$

ovvero (tenuto conto di (7) ed (11))

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\phi(n)}{n^s} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n^s} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Eseguendo il prodotto a destra si deduce che

$$\phi(n) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ ab=n}} ah(b) \qquad \forall n. \tag{12}$$

Di conseguenza

$$\sum_{n\le x} \phi(n) = \sum_{n\le x} \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ ab=n}} ah(b) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ ab\le x}} ah(b) = \sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}} h(b) \sum_{\substack{a\in\mathbb{N}\\ a\le x/b}} a. \tag{13}$$

La somma interna è la somma di tutti gli interi da 1 a $\lfloor x/b\rfloor$ (qui appare la parte intera, visto che x/b in genere non sarà un numero intero), quindi,

$$\sum_{\substack{a\in\mathbb{N}\\ a\le x/b}} a = \frac{1}{2}\lfloor x/b\rfloor\Big(\lfloor x/b\rfloor+1\Big).$$

Eliminando la parte intera questa espressione diventa

$$\sum_{\substack{a\in\mathbb{N}\\ a\le x/b}} a = \frac{x^2}{2b^2}+O\Big(\frac{x}{b}\Big),$$

che sostituita nella (13) dà

$$\sum_{n\le x} \phi(n) = \sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}} h(b)\Big(\frac{1}{2}\frac{x^2}{b^2}+O\Big(\frac{x}{b}\Big)\Big) = \frac{x^2}{2}\sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}} \frac{h(b)}{b^2}+O\Big(x\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ b\le x}} \frac{|h(b)|}{b}\Big), \tag{14}$$

in cui nel termine di resto (l'O-grande) si è dovuto tener conto del fatto che non conosciamo il segno di h, e quindi per essere sicuri di non commettere errori abbiamo dovuto stimare la loro somma con la somma dei loro valori assoluti.

Osserviamo che $H(2)$ esiste (la serie che definisce H converge per $s > 3/2$, quindi converge in $s = 2$), di conseguenza

$$H(2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{h(n)}{n^2} = \sum_{n\le x} \frac{h(n)}{n^2}+\sum_{n>x} \frac{h(n)}{n^2}$$

e la (14) diventa

$$\sum_{n\le x}\phi(n)=\frac{x^2}{2}H(2)-\frac{x^2}{2}\sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}}\frac{h(b)}{b^2}+O\Big(x\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ b\le x}}\frac{|h(b)|}{b}\Big), \tag{15}$$

ed ora dobbiamo dimostrare che i due termini aggiuntivi di fatto sono "piccoli" rispetto al termine principale. Sappiamo che la serie che definisce H converge per $s>3/2$, ma se si torna al passaggio in cui si è verificata tale convergenza si scopre che in realtà essa è di tipo *assoluto*, ovvero che anche la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{|h(n)|}{n^s}$$

converge in $s>3/2$. Quindi in particolare (per ogni ϵ positivo e minore di $1/2$)

$$\begin{aligned}\Big|\frac{x^2}{2}\sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}}\frac{h(b)}{b^2}\Big| &\le \frac{x^2}{2}\sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}}\frac{|h(b)|}{b^2}\\ &= \frac{x^2}{2}\sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}}\frac{|h(b)|}{b^{3/2+\epsilon}}\frac{1}{b^{1/2-\epsilon}}\\ &\le \frac{x^2}{2}\frac{1}{x^{1/2-\epsilon}}\sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}}\frac{|h(b)|}{b^{3/2+\epsilon}}\\ &\le \frac{x^{3/2+\epsilon}}{2}\sum_{b\in\mathbb{N}}\frac{|h(b)|}{b^{3/2+\epsilon}} \end{aligned}\tag{16}$$

dove si è usata la condizione $b>x$ per dedurre che $\frac{1}{b^{1/2-\epsilon}}\le\frac{1}{x^{1/2-\epsilon}}$, e la convergenza assoluta della serie in $s=3/2+\epsilon$ per stimare il numero

$$\sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}}\frac{|h(b)|}{b^{3/2+\epsilon}}$$

con la quantità

$$\sum_{b\in\mathbb{N}}\frac{|h(b)|}{b^{3/2+\epsilon}}$$

indipendente da x. Un conto analogo mostra che

$$\begin{aligned} x\sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}}\frac{|h(b)|}{b} &\le x\sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}}\frac{|h(b)|}{b^{3/2+\epsilon}}\cdot b^{1/2+\epsilon}\\ &\le x\cdot x^{1/2+\epsilon}\sum_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ b\le x}}\frac{|h(b)|}{b^{3/2+\epsilon}}\\ &\le x^{3/2+\epsilon}\sum_{b\in\mathbb{N}}\frac{|h(b)|}{b^{3/2+\epsilon}} \end{aligned}\tag{17}$$

(si è usato la condizione $b\le x$ per scrivere $b^{1/2+\epsilon}\le x^{1/2+\epsilon}$). Dalla (15), (16) e (17) segue che

$$\sum_{n\le x}\phi(n)=\frac{x^2}{2}H(2)+O_\epsilon\Big(x^{3/2+\epsilon}\Big). \tag{18}$$

D'altra parte dalla (10) otteniamo

$$H(2)=\prod_p\Big(1+\frac{p-1}{p}\frac{1}{p-1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=\prod_p\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)$$

ma questo è $1/\zeta(2)$ (basta prendere $s = 3$ nella (8)), ed $\zeta(2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ (dalla (6) con $s = 3$), ed è noto che questo numero è $\frac{\pi^2}{6}$ (uno dei tanti incredibili risultati di Eulero), quindi finalmente la tesi è dimostrata in ogni sua parte. $\square$

Il teorema dà immediatamente

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \sum_{n\leq x} \phi(n) = \frac{3}{\pi^2}.$$

Per somme parziali dal teorema è facile dedurre che

$$\sum_{n\leq x} \frac{\phi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2} x + O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon})$$

da cui volendo segue

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} \frac{\phi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Non si può concludere però senza rendere giusto omaggio a Riemann facendo notare che la funzione ausiliaria ζ introdotta nella dimostrazione precedente è appunto la famosa *zeta* che porta il suo nome.