

QUADRILATERO MAX – COSTRUZIONE (addendum – problema di Gennaio)

Il quadrilatero di lati a, b, c, d , di area massima fissati i valori dei lati (MAX per gli amici), si può costruire senza passare attraverso calcoli di angoli e circonferenza circoscritta.

Si è dimostrato, nel precedente documento, che MAX ha gli angoli opposti supplementari ed è inscritto in una circonferenza. Pertanto la sua area è ricavabile dalla formula (p = semiperimetro) :

$$S = \text{sqrt} [(p-a)*(p-b)*(p-c)*p-d] \quad (1)$$

Si è anche visto che, detti : $AB=a$; $BC=b$; $CD=c$; $DA=d$ i quattro lati, e detto A l'angolo compreso tra DA e AB , l'area si può esprimere così :

$$S = \frac{1}{2} (ad + bc) \text{sen}A \quad (2)$$

Traccio ora la diagonale BD , e dal vertice C opposto ad A traccio la parallela a BD . Quindi MAX è diviso dalla diagonale in due triangoli, ABD e BDC : tutti gli infiniti triangoli aventi per “base” BD e per “altezza” la distanza tra BD e la parallela per C sono equivalenti a BDC . Ne prendo uno, e cioè BDF , dove F è il punto in cui la parallela anzidetta incontra il prolungamento di AD .

E' evidente (facilmente dimostrabile) che MAX è equivalente al triangolo ABF .

L'area di ABF è data da : $S = \frac{1}{2} * a \text{sen}A * AF$ (3)

per cui, uguagliando (2) e (3), si ricava che : $AF = (ad + bc) / a$ (4)

da cui : $DF = AF - d = bc/a$ (5)

Perciò, si procede così :

1. si disegna dapprima $AD = d$, prolungandolo dalla parte di D
2. si calcola AF con la (4) e si segna il punto F sul prolungamento dalla parte di D
3. calcolato il valore di S con la (1), dalla (3) si determina l'altezza del triangolo equivalente ABF , disegnando la retta a_2 parallela a AD
4. con centro in A e raggio a , si interseca a_2 in B
5. si traccia BD , diagonale di MAX, e da F si traccia la parallela t a BD
6. con centro in B e raggio b , si interseca t in C
7. per verifica, la distanza CD deve essere uguale a c .

I quattro punti $ABCD$ sono i vertici di MAX.

Nel disegno allegato si è posto : $d = 4$; $a = 2$; $b = 1$; $c = 3$.