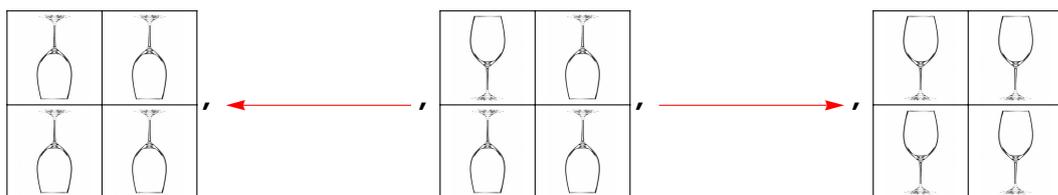


Le Scienze - Novembre 2010

Prima della fine, un brindisi

Obiettivo:

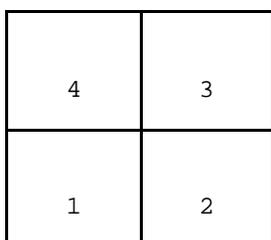
- **Avere tutti i calici girati nello stesso modo nel minor numero di mosse possibili**



Convenzioni e definizioni

- **Rappresentazione del vassoio**

Il vassoio con le posizioni dei bicchieri e' rappresentato in questo modo:



Una configurazione generica dei bicchieri e' rappresentata simbolicamente da quattro simboli dove "0" indica il bicchiere dritto (blu) e "1" il bicchiere rovesciato (rosso).

Esempio:

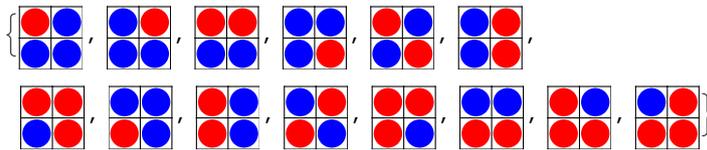
$$\{ \{1, 0, 1, 0\}, \begin{array}{|c|c|} \hline \color{blue}\bullet & \color{red}\bullet \\ \hline \color{red}\bullet & \color{blue}\bullet \\ \hline \end{array} \}$$

Le possibili configurazioni iniziali dei bicchieri sono quattro :

$$\left\{ \left\{ \{0, 0, 0, 1\}, \begin{array}{|c|c|} \hline \color{red}\bullet & \color{blue}\bullet \\ \hline \color{blue}\bullet & \color{blue}\bullet \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \{0, 0, 1, 1\}, \begin{array}{|c|c|} \hline \color{red}\bullet & \color{red}\bullet \\ \hline \color{blue}\bullet & \color{blue}\bullet \\ \hline \end{array} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \{0, 1, 0, 1\}, \begin{array}{|c|c|} \hline \color{red}\bullet & \color{blue}\bullet \\ \hline \color{blue}\bullet & \color{red}\bullet \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \{0, 0, 0, 1\}, \begin{array}{|c|c|} \hline \color{red}\bullet & \color{blue}\bullet \\ \hline \color{blue}\bullet & \color{blue}\bullet \\ \hline \end{array} \right\} \right\}$$

Le possibili configurazioni dopo una rotazione sono 14 :

$$\{ \{0, 0, 0, 1\}, \{0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 1, 1\}, \{0, 1, 0, 0\}, \\ \{0, 1, 0, 1\}, \{0, 1, 1, 0\}, \{0, 1, 1, 1\}, \{1, 0, 0, 0\}, \{1, 0, 0, 1\}, \\ \{1, 0, 1, 0\}, \{1, 0, 1, 1\}, \{1, 1, 0, 0\}, \{1, 1, 0, 1\}, \{1, 1, 1, 0\} \}$$



■ Azioni

Dopo ogni rotazione del vassoio Piotr puo' toccare due bicchieri e deve compiere un'azione che puo' essere: a - raddrizzare uno o due bicchieri; b - rovesciare uno o due bicchieri.

■ Strategia

Una successione Rotazione => Azione=> Rotazione => . . . Azione => Obiettivo costituisce una strategia. Vengono considerate due strategie che si differenziano in base all' obiettivo prefissato:

Strategia "Piotr" - tutti i calici girati nel minor numero di mosse possibili.

Strategia "Blind Bartender's Problem" - Tutti i calici girati con al massimo cinque azioni.

■ Metodo Usato

Per poter valutare correttamente le due strategie, ho implementato per ognuna un algoritmo che ne consenta la simulazione e fornisca il numero di azioni effettuate prima di conseguire l'obiettivo.

Strategia Piotr

■ Azioni consentite

1. - Scegliere due bicchieri in **diagonale** (il n. 1 e il n. 3) : se sono nella stessa posizione, capovolgerli, altrimenti capovolgere solo il n. 1
2. - Scegliere due bicchieri **affiancati** (il n. 1 e il n. 2) : se sono nella stessa posizione, capovolgerli, altrimenti capovolgere solo il n. 1

■ Strategie possibili

Nell'ambito delle azioni consentite possono essere definite diverse strategie.

Ho considerato l'insieme delle strategie possibili rappresentato dalle 4 permutazioni delle due azioni :

{1,1}, {1,2}, {2,1}, {2,2}

Una generica strategia comporta l'applicazione ciclica della sequenza .

Ad esempio {2,1} esegue: **Rot. 1 => Azione 2 => Rot. 2 => Azione 1 => Rot. 3 => Azione 2 => ... Rot. 7 => Obiettivo** e fornisce il valore **7** .

■ Simulazione

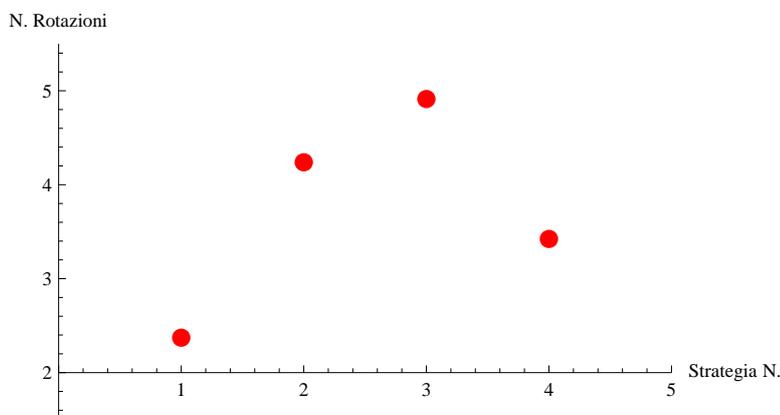
Ogni configurazione iniziale dei bicchieri viene sottoposta all'algoritmo per 50000 volte, e questo viene fatto per tutte le strategie;

I dati raccolti saranno quindi: $4 \times 50000 = 200000$ per ogni strategia.

Per ogni strategia viene ricavato il valor medio e deviazione standard del numero di giri necessario.

La strategia con il miglior punteggio viene scelta per rappresentare la Strategia di Piotr.

I punteggi (valori medi) di ogni strategia sono rappresentati nel seguente grafico.



Le strategie possibili riportano i seguenti valori medi:

{1,1,1,1}, 2.37388, {{1,2,1,2}, 4.23848}, {{2,1,2,1}, 4.91188}, {{2,2,2,2}, 3.4228}

La migliore strategia di Piotr e' quindi quella di scegliere sempre due bicchieri in diagonale; se entrambi sono nella stessa posizione, rovesciarli, altrimenti rovesciarne solo uno.

Semplice, elegante ed efficace.

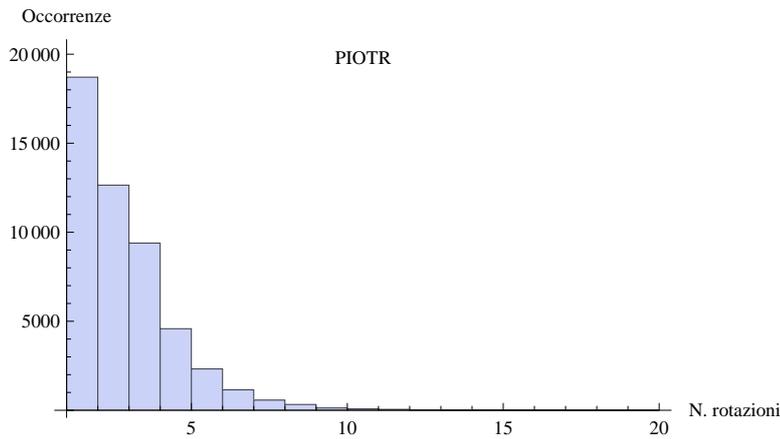
In media conseguirà l'obiettivo prima della terza rotazione.

■ Risultati della simulazione della miglior strategia di Piotr.

Per 50 000 simulazioni ho ottenuto il risultato condensato nella seguente tabella, in cui nella casella superiore e' indicato il numero di rotazioni dopo il quale i quattro bicchieri erano nella stessa posizione e, nella casella inferiore, le occorrenze.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
18 711	12 647	9392	4581	2323	1148	571	327	129	77	52	16	7	10	3	3	1	1	1

Con un istogramma:



Valor medio = **2.37388**

Deviazione Standard = **1.58729**

Strategia “Blind Bartender’s Problem”

■ Descrizione della strategia

Sul WEB, Wikipedia riporta il Four Glasses Puzzle, pubblicato da Martin Gardner su Scientific American del 1979.

Si può trovare: la descrizione del puzzle, la sua soluzione che garantisce un numero massimo di rotazioni pari a 5 e la sua generalizzazione.

■ Implementazione dell’algoritmo

Ho implementato l’algoritmo che, in cinque passi al massimo, restituisce il numero di rotazioni necessario.

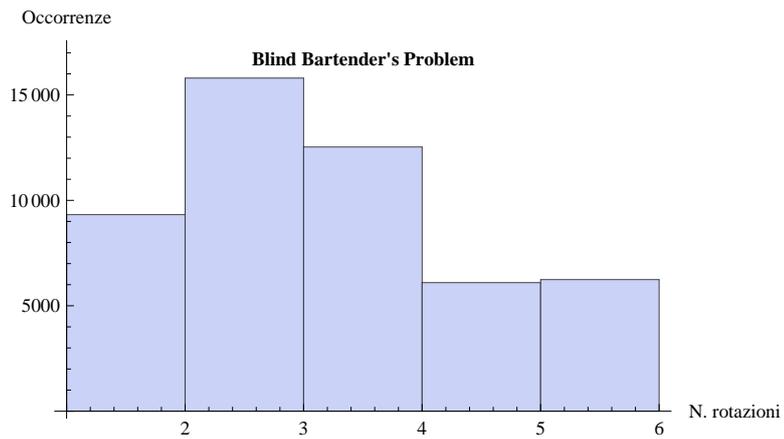
■ Simulazione e risultati

Le configurazioni iniziali dei bicchieri vengono sottoposte all’algoritmo per 50000 volte.

I risultati sono sintetizzati nella seguente tabella:

1	2	3	4	5
9323	15 801	12 534	6099	6243

Con l’istogramma:



Valor medio = **2.68276**

Deviazione Standard = **1.25804**

Strategia “**Blind Bartender’s Problem**”

Conclusione

Sono sicuro che in una ipotetica sfida con il barista, Piotr vincerebbe alla grande !

Cordiali saluti a tutti voi,

Carlo Ferjancic