

Niente è come sembra

(Problema di Aprile 2011)

Problema:

Rudy ha consegnato ad Alice 100 monete da 1 centesimo (per la ragguardevole somma di 1 €).

Successivamente lancerà in aria per 10 volte una moneta ed Alice potrà scommettere ogni volta una cifra variabile da 0 al totale che ha in quel momento sull'esito di ogni singolo lancio.

Piotr fa da consulente finanziario, infatti può vedere l'esito del lancio e riferirlo ad Alice.

Alice sa che Piotr in una occasione le mentirà e perciò deve studiare la migliore strategia di gioco.

Risposta:

Alice deve puntare una frazione del totale corrispondente alla seguente serie di frazioni:

$\frac{9}{11}, \frac{8}{10}, \frac{7}{9}, \frac{6}{8}, \frac{5}{7}, \frac{4}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{4}, \frac{1}{3}, \frac{0}{2}$ finché non si verifica la perdita, dopodiché punterà ogni volta l'intero capitale.

Così facendo si assicurerà una vincita di circa 93,09 €.

Spiegazione:

Poiché Piotr mente una sola volta, quando ha mentito non mentirà più e perciò da quel momento in poi si può puntare sempre l'intera posta.

Consideriamo la situazione alla 9° puntata ammettendo che Piotr non abbia mai mentito.

Alice punta una certa frazione x del capitale e possono verificarsi 2 casi:

- vince e allora sa che perderà alla scommessa successiva (punterà 0 cent) per cui il capitale sarà aumentato di $(1+x)$ volte
- perde, il capitale si riduce a $(1-x)$ volte ma sa che la volta successiva può puntare l'intero capitale per cui alla fine si troverà con il capitale che è $(2-2x)$ volte quello originale.

Poiché Alice non vuole affidarsi al caso né vuole effettuare calcoli probabilistici, considerando che la funzione $1+x$ è crescente mentre $2-2x$ è decrescente al variare di x nell'intervallo $[0,1]$, sceglierà il valore x per cui il vantaggio è lo stesso nei due casi.

$1+x = 2-2x$ per cui $x=1/3$ e alla fine si troverà con $(1+1/3)=4/3$ di quanto posseduto prima della nona scommessa.

Si può ripetere il ragionamento ammettendo che Piotr non abbia mai mentito per le 7 puntate precedenti. Alice punta una frazione y di quanto in suo possesso:

- vince, il capitale diventa $(1+y)$ volte di quanto posseduto, sa che puntando in modo opportuno alla fine avrà $4/3(1+y)$ di quanto posseduto in precedenza
- perde, il capitale si riduce a $(1-y)$ volte ma sa che nelle due scommesse successive potrà quadruplicare il capitale che alla fine sarà $4(1-y)$ volte.

Nuovamente si cercherà il valore di y che rende uguali i due importi

$$\frac{4}{3}(1+y) = 4(1-y)$$

$$3 - 3y = 1 + y \quad \text{per cui } y = 2/4.$$

Iterando all'indietro il ragionamento fino alla prima scommessa si trovano i valori precedentemente mostrati.

In generale si può trovare una formula ricorsiva per le frazioni prendendo in esame due serie di scommesse per le quali la perdita si verifica in un caso all' i -esima scommessa mentre nell'altro alla $(i+1)$ -esima.

Dovrà valere:

$$(1 - x_i) \cdot 2^k = (1 + x_i)(1 - x_{i+1}) \cdot 2^{k-1} \quad \text{da cui } 2 - 2x_i = 1 - x_{i+1} + x_i - x_i x_{i+1}$$

$x_i = \frac{1 + x_{i+1}}{3 - x_{i+1}}$ e $x_n = 0$ dove n è il numero delle scommesse (nel caso in esame 10).

Ma come dicevamo all'inizio "niente è come sembra" perché se è vero che la strategia di Alice permette di prevedere un totale finale di 93,0909...€, è anche vero che essa non può puntare frazioni di centesimo per cui resterà un certo grado di aleatorietà ed il capitale effettivo (ammesso che Alice arrotondi sempre la cifra da puntare al più vicino intero) può variare da 92,16 a 93,28 € a seconda di quando Piotr mentirà, così come è mostrato nel foglio di calcolo allegato.

QUADRO DELLE SCOMMESSE CON PUNTATA E CAPITALE DOPO OGNI SCOMMESSA

Frazione di Capitale da Puntare		10																			
		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
		9/11		8/10		7/9		6/8		5/7		4/6		3/5		2/4		1/3		0	
		0,81818		0,80000		0,77778		0,75000		0,71429		0,66667		0,60000		0,50000		0,33333		0,00000	
Cap	Punt	Cap	Punt	Cap	Punt	Cap	Punt	Cap	Punt	Cap	Punt	Cap	Punt	Cap	Punt	Cap	Punt	Cap	Punt	Cap	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	0	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996	2332	9328	4664	9328	
100	82	182	146	328	255	583	437	1020	729	1749	1166	2915	1749	4664	2332	6996</					

TEORICO	100	81,8	18,2	18,2	36,4	36,4	72,7	72,7	145,5	145,5	290,9	290,9	581,8	581,8	1163,6	1163,6	2327,3	2327,3	4654,5	4654,5	9309,1
	100	81,8	181,8	145	327,3	254,5	581,8	436,4	1018,2	727,3	290,9	290,9	581,8	581,8	1163,6	1163,6	2327,3	2327,3	4654,5	4654,5	9309,1

In rosso le puntate in cui Piotr mente e Alice perde.