

Beati gli ultimi, se riescono ad esserlo

Rudi Matematici -Gennaio 2012

Soluzione di Carlo Ferjancic

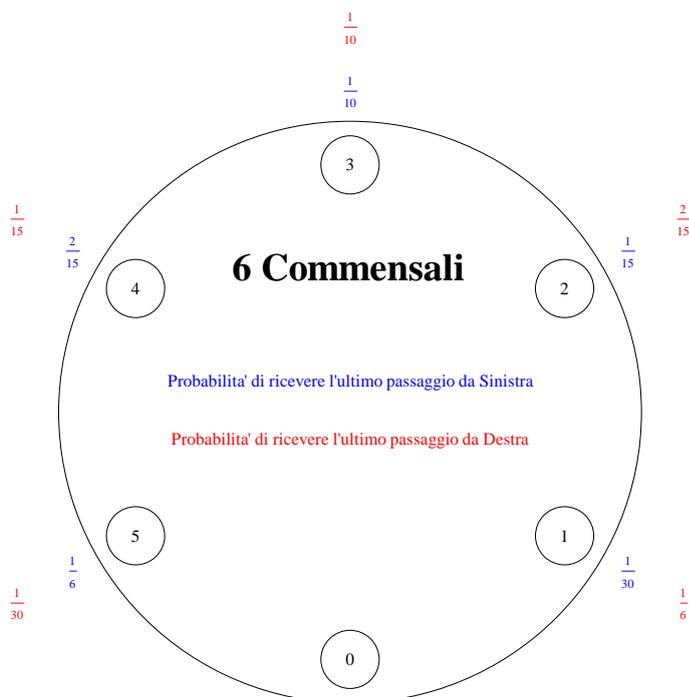
■ Risposta

In un tavolo circolare con N commensali Rudy consegna la zuppiera con la carbonara a una persona qualunque. Questa persona si servira' e passera' la zuppiera alla sua sinistra o alla sua destra, a caso.

Tutti i commensali che non si sono ancora serviti hanno la stessa probabilita' di essere serviti per ultimi e questa probabilita' e' pari a $\frac{1}{N-1}$.

La probabilita' di essere servito per ultimo e' la somma della probabilita' di ricevere la zuppiera da Destra e della probabilita' di ricevere la zuppiera da Sinistra, ovvero $PSU = PSDU + PSUS$. Vediamo come PSDU e PSUS siano crescenti proporzionalmente alla distanza dal primo commensale che si e' servito e perche' il posto piu' favorevole alla ricezione della zuppiera da destra (o sinistra) sia quello alla destra (o sinistra) del primo commensale.

Una cena dei Rudi con 6 Commensali:



■ Definizioni

Posti: La numerazione dei posti a tavola. Parte da "0" e termina con "N-1" in senso antiorario. Convenzione arbitraria per lo sviluppo degli esempi. Lo "0" e' assegnato al commensale che per primo riceve la zuppiera con la carbonara.

Posti relativi: in senso antiorario, la numerazione parte da "0" e termina con "N-1" ; in senso orario, la numerazione parte da "0" e termina con "- (N-1)".

Sequenza: Successione di valori $\{-1,1\}$ equivalenti al lancio di una moneta non truccata da parte del possessore della zuppiera.

Se ”-1” la zuppiera viene passata al commensale alla sinistra ; se ”1” la zuppiera viene passata al commensale alla destra; se la zuppiera capita al l’ultimo commensale che non si e’ servito, la sequenza termina.

Percorso: Elenco dei posti (indicati come posti relativi) toccati dalla zuppiera nell’esecuzione della sequenza.

■ Simulazioni

Ho considerato cinque cene con 4, 5, 6, 7 e 8 commensali. Per ogni cena ho effettuato 2000000 simulazioni di distribuzione di carbonara.

Nella tabella sono riportati i posti in posizione relativa (Destra o Sinistra) rispetto al primo commensale servito e, per ogni posto, il numero di volte in cui quel posto e’ stato servito per ultimo.

Posti\ Comm	4	5	6	7	8
-7	0	0	0	0	250 707
-6	0	0	0	286 461	214 901
-5	0	0	333 825	238 185	178 717
-4	0	399 854	266 579	190 450	142 862
-3	499 807	299 984	200 325	142 913	106 997
-2	333 496	199 538	132 865	95 405	71 573
-1	166 763	100 136	66 962	47 907	35 269
0	0	0	0	0	0
1	166 800	100 100	66 745	47 981	35 339
2	332 799	199 945	133 168	95 217	71 733
3	500 335	300 233	200 338	142 505	106 578
4	0	400 210	266 874	190 024	143 115
5	0	0	332 319	237 187	178 109
6	0	0	0	285 765	214 638
7	0	0	0	0	249 462

In questa tabella i dati precedenti sono convertiti in probabilita’.

Posti\ Comm	4	5	6	7	8
-7	0.	0.	0.	0.	0.125
-6	0.	0.	0.	0.143	0.107
-5	0.	0.	0.167	0.119	0.0894
-4	0.	0.2	0.133	0.0952	0.0714
-3	0.25	0.15	0.1	0.0715	0.0535
-2	0.167	0.0998	0.0664	0.0477	0.0358
-1	0.0834	0.0501	0.0335	0.024	0.0176
0	0.	0.	0.	0.	0.
1	0.0834	0.05	0.0334	0.024	0.0177
2	0.166	0.1	0.0666	0.0476	0.0359
3	0.25	0.15	0.1	0.0713	0.0533
4	0.	0.2	0.133	0.095	0.0716
5	0.	0.	0.166	0.119	0.0891
6	0.	0.	0.	0.143	0.107
7	0.	0.	0.	0.	0.125

Senza necessita’ di ricorrere alle funzioni generatrici di probabilita’, dalla tabella precedente si deduce che:

$$p(k) = \frac{1}{N(N-1)} k \quad \text{con } k = \text{distanza dal primo commensale.}$$

La tabella di probabilita' teoriche e' la seguente:

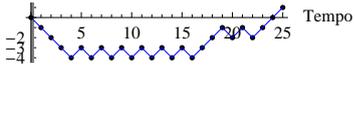
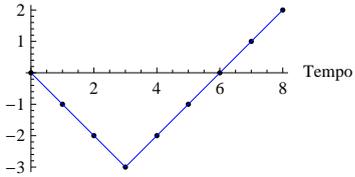
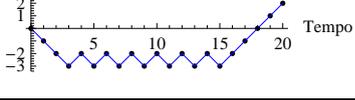
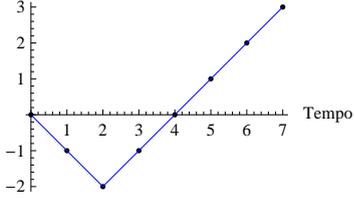
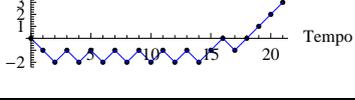
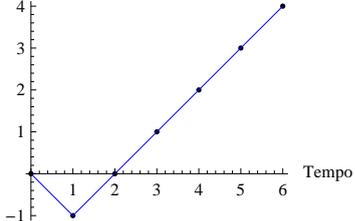
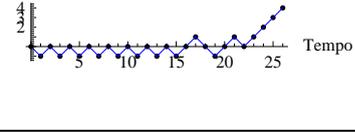
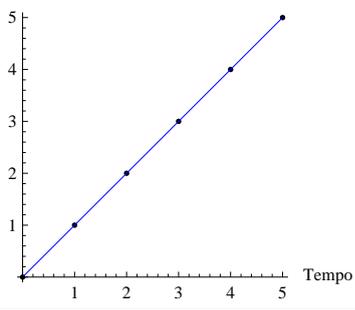
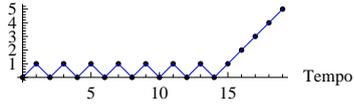
Posti\ Comm	4	5	6	7	8
-7	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
-6	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$
-5	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{5}{56}$
-4	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14}$
-3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{56}$
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$
0	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{56}$
4	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14}$
5	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{5}{56}$
6	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$
7	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$

■ Esempi di sequenze e percorsi per 6 Commensali

Per ognuno dei posti (1,2,3,4,5) sono riportati:

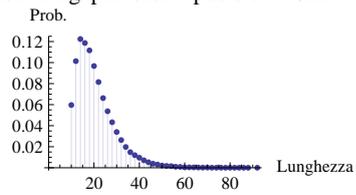
- Sequenza piu' breve
- Sequenza mediamente lunga
- Percorso con posizioni relative rispetto al primo commensale
- Grafo del percorso

Sequenza	Percorso	Grafo
$\{-1, -1, -1,$ $-1, 1, 1, 1, 1, 1\}$	$\{0, -1, -2, -3,$ $-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$	

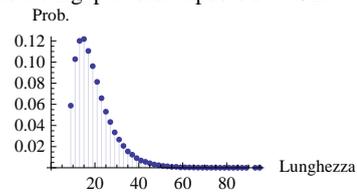
$\{-1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1\}$	$\{0, -1, -2, -3, -4, -3, -4, -3, -4, -3, -4, -3, -4, -3, -2, -1, -2, -1, -2, -1, 0, 1\}$	<p>Posti</p>  <p>Tempo</p>
$\{-1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$	$\{0, -1, -2, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$	<p>Posti</p>  <p>Tempo</p>
$\{-1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$	$\{0, -1, -2, -3, -2, -3, -2, -3, -2, -3, -2, -3, -2, -3, -2, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$	<p>Posti</p>  <p>Tempo</p>
$\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$	$\{0, -1, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	<p>Posti</p>  <p>Tempo</p>
$\{-1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$	$\{0, -1, -2, -1, -2, -1, -2, -1, -2, -1, -2, -1, -2, -1, -2, -1, 0, -1, 0, 1, 2, 3\}$	<p>Posti</p>  <p>Tempo</p>
$\{-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$	$\{0, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$	<p>Posti</p>  <p>Tempo</p>
$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1\}$	$\{0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 4\}$	<p>Posti</p>  <p>Tempo</p>
$\{1, 1, 1, 1, 1\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	<p>Posti</p>  <p>Tempo</p>
$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$	$\{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	<p>Posti</p>  <p>Tempo</p>

Distribuzione delle lunghezze dei percorsi

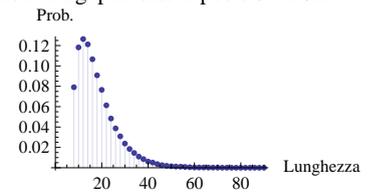
Distr. lung. percorsi al posto 1 da Sin



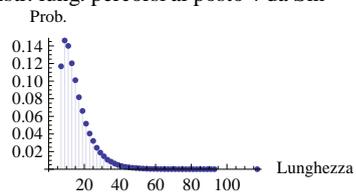
Distr. lung. percorsi al posto 2 da Sin



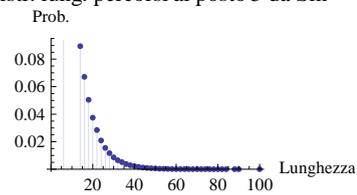
Distr. lung. percorsi al posto 3 da Sin



Distr. lung. percorsi al posto 4 da Sin



Distr. lung. percorsi al posto 5 da Sin



■ Saluti

Buon lavoro a tutti voi,

Carlo Ferjancic