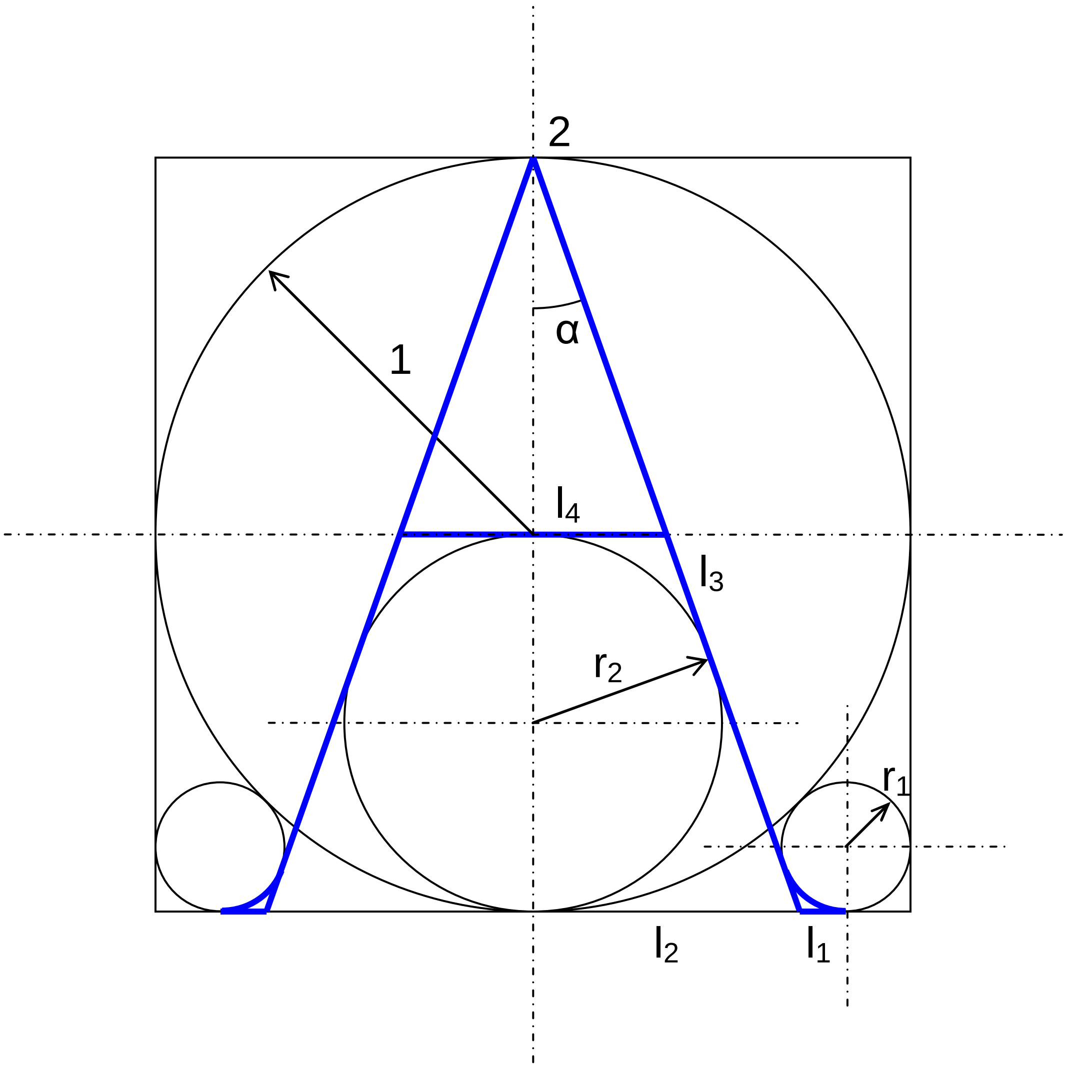
Soluzione al quesito de “Le Scienze” N°530

Autore: Marco Bassani

Prima di tutto per semplificare la notazione si stabilisce che il raggio della circonferenza inscritta nel quadrato sia unitario e quindi il quadrato principale di lato 2.
Le varie componenti che dobbiamo stabilire sono riportate nella seguente figura.

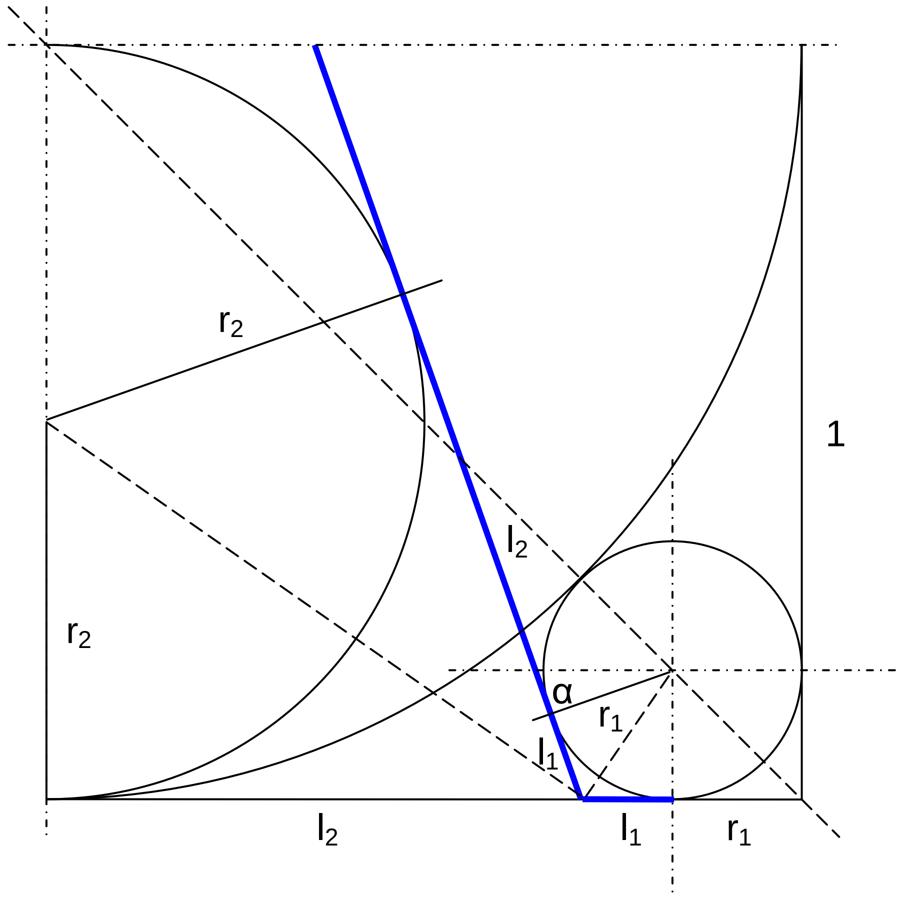


Per meglio analizzare i passaggi che ci porteranno a calcolare i vari termini, ci si concentra sul sotto-quadrato di lato unitario in basso a destra della figura precedente (vedi prossima figura).
Se andiamo ad analizzare i termini che compongono la diagonale del sotto-quadrato si ha che:

$$1 + r_1 + r_1\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Da cui si ricava

$$r_1 = 3 - 2\sqrt{2}$$



Ora esprimiamo l_1 e l_2 come:

$$l_1 = r_1 \tan\left(\frac{\pi/2-\alpha}{2}\right) = r_1 \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$l_2 = 2\tan\alpha$$

Prendendo ora in considerazione il lato basso del quadrato si ha che:

$$l_2 + l_1 + r_1 = 1$$

E quindi sostituendo le equazioni precedenti si ha che

$$r_1 \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} + 2\tan\alpha + r_1 - 1 = 0$$

Moltiplicando per *cos* α e raggruppando i termini sia ha

$$(r_1 - 1)\cos\alpha + (2 - r_1)\sin\alpha + r_1 = 0$$

Applicando le formule di duplicazione si ottiene

$$(2r_1 - 1)\cos^2\frac{\alpha}{2} + (4 - 2r_1)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 0$$

Se ora dividiamo per cos^2 α/2 otteniamo

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}+(4-2r_1)\tan\frac{\alpha}{2}+2r_1-1=0$$

Da cui risolvendo l'equazione di 2° grado e prendendone la radice a valore positivo si ha:

$$\alpha=2\arctan(3-2\sqrt{2})$$

A questo punto applicando ancora le formule di duplicazione alle espressione precedente di l_2 si ha:

$$l_2=2\tan\alpha=\frac{2\tan\alpha/2}{1-\tan^2\alpha/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ed

$$l_1=1-r_1-l_2=\frac{3}{2}\sqrt{2}-2$$

Inoltre essendo l_3 l'ipotenusa del triangolo rettangolo formato dal lato del quadrato principale e l_2 si ha che:

$$l_3=\sqrt{2^2+l_2{}^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Notando ora che il triangolo rettangolo costituito dal raggio r_2 ortogonale a l_3 è simile al triangolo costituito da l_2 , l_3 e il lato del quadrato principale possiamo scrivere che:

$$\frac{r_2}{l_3-l_2}=\frac{l_2}{2}$$

E ottenere quindi che:

$$r_2=\frac{1}{2}$$

Per lo stesso principio dei triangoli simili si ha infine che:

$$l_4=l_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$