Arcieri senza frecce

(Problema di Aprile 2023)

Il Problema: Rudi propone la seguente gara: un giocatore sceglie un certo numero di punti sul bersaglio mentre l'altro giocatore "scoccherà" quante frecce vuole per centrare i punti.
Ad ogni tiro il primo giocatore comunicherà la minima distanza tra la freccia ed il punto-bersaglio più vicino. Una volta centrato un punto esso scompare dal gioco come se non fosse mai esistito.
Bisogna determinare la strategia migliore per usare il minor numero di frecce possibili.

Soluzione: Con la seguente strategia, saranno sufficienti (nella maggior parte dei casi) 3 frecce per ogni punto. Nel caso peggiore saranno necessarie 3 frecce per un punto, 6 per due punti e $4(n-2)$ frecce per $n \geq 3$.

Strategia: La prima freccia viene scoccata su un punto qualsiasi del bordo del bersaglio. Una volta che viene comunicata la distanza si traccerà un cerchio con centro nel punto in cui arriva la freccia e raggio la distanza (vedi figura 1). Se si è fortunati si potrebbe anche colpire uno dei punti (da qui la scelta di scoccare la freccia sul bordo) anche se, per le fasi successive, si sarebbe potuto scoccare anche da un punto qualsiasi esterno al bersaglio.

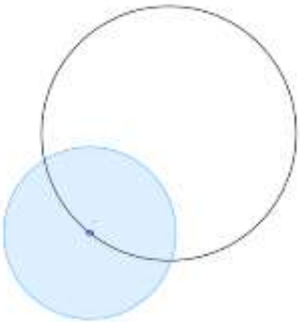

Figura 1

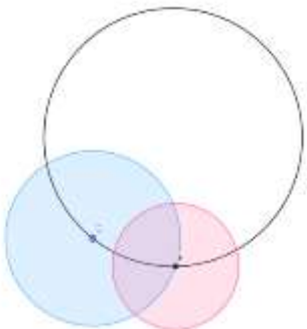

Figura 2

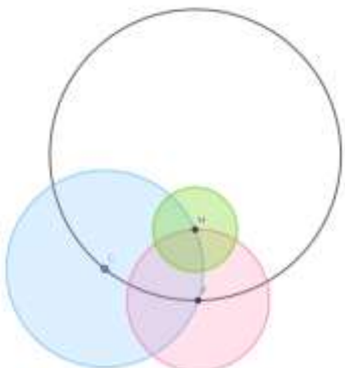

Figura 3

Si osserva immediatamente che in tutta l'area colorata non può trovarsi alcun punto mentre c'è sicuramente almeno un punto sull'arco della circonferenza interno al bersaglio.
La seconda freccia viene scoccata su una delle due intersezioni tra circonferenza e bordo del bersaglio (vedi figura 2)
Nuovamente si traccia una circonferenza in base alla distanza comunicata.
Anche in questo caso tutta l'area in colore non può contenere punti bersaglio mentre, ci sarà almeno un punto sul tratto di circonferenza interna al bersaglio.
Nel caso semplice (un solo punto-bersaglio) l'intersezione delle due circonferenze lo individua univocamente, infatti poiché esiste un solo punto-bersaglio ed ogni curva lo deve contenere, esso si troverà necessariamente all'intersezione delle due circonferenze.
Nel caso più generale di *n* punti, si scoccherà comunque la freccia all'intersezione delle due circonferenze ma non c'è più la certezza che uno dei punti-bersaglio si trovi nell'intersezione individuata.
Se uno dei punti-bersaglio si trova all'intersezione dei due archi non c'è motivo di insistere nella stessa "frontiera" costituita dall'inviluppo dei due archi (perché ora ciascun arco può contenere 0 o più punti) e di fatto i tentativi successivi sono come quelli da fare quando i punti iniziali sono $n-1$.
Perciò, chiamato $S(n)$ il numero di frecce sufficienti a centrare tutti i bersagli, sarà $S(n) = S(n-1) + 3$ e $3n$ è un limite inferiore al numero di frecce sufficienti a centrare tutti i punti-bersaglio con questa strategia.
Se nel punto di intersezione non si trova un punto-bersaglio, si possono verificare diversi casi.
Prendo in esame un primo caso (vedi figura 3). La *frontiera* sarà costituita dai 3 archi che costituiscono l'inviluppo dei cerchi e che, ciascuno, conterrà almeno un punto-bersaglio mentre si intersecheranno due a due. E' da notare che il numero degli archi è uguale al numero di frecce scoccate. Continuando

a scoccare frecce nei punti di intersezione più a destra, il processo potrebbe andare avanti fino ad avere *m* archi con *m* frecce scoccate (vedi Figura 4).
Il processo non può però durare indefinitamente perché *m* archi che si intersecano due a due impegnano al minimo (m-1) punti e perciò, se si raggiunge il caso limite $m = n + 1$, sapremo che i punti-bersaglio si trovano tutti nelle intersezioni tra gli archi e basterà scoccare altre n frecce per colpirli tutti.
Sarà quindi $S(n) = 2n + 1$ (inferiore a $3n$ che resta perciò il caso peggiore).
Si può avere, prima di questo caso limite, che si centri un punto-bersaglio (oppure che si verifichi uno dei casi non ancora preso in esame).
Se allo scoccare dell'*m*-esima freccia si colpisce un punto bersaglio, bisogna non considerare più nella *frontiera* i due archi che insistono sullo stesso punto e quindi avremo nella frontiera m -3 archi (vedi Figura 5 in cui si evidenzia il punto colpito e la nuova *frontiera*).
La stessa situazione che avremmo avuto, nelle stesse condizioni, se i punti fossero stati $n – 1$ scoccando m- 3 frecce.
Così varrà ancora $S(n) = S(n\text{-}1) + 3$.
Un altro caso che si può verificare è che l'*m*-esima freccia dia luogo a un arco che va a "coprire" l'arco più a destra.
In questo caso siamo sicuri che un punto-bersaglio si troverà proprio all'estrema destra della frontiera dove c'è l'unico punto dell'($m – 1$)*-esimo* arco che può contenere il punto-bersaglio.
Possiamo quindi scoccare la freccia $(m + 1)$ e considerare la nuova frontiera costituita da $m – 2$ archi.
Nuovamente si ha che $S(n) = S(n\text{-}1) + 3$.
Un'altra possibilità si ha con la situazione mostrata in Figura 7.
In questo caso *l'm-esimo* arco copre l'arco $m – 2$.
Come in precedenza si ha la certezza che scagliando la
$(m + 1\,)$*-esima* freccia all'incrocio dei tre archi, si colpisce un punto-bersaglio.
Resterà però una frontiera spezzata in due, un arco singolo e un inviluppo di $m – 4$ archi.
La nuova frontiera sarà costituita da $m – 3$ archi avendo effettuato $m + 1$ tiri.
In questo caso sarà perciò $S(n) = S(n\text{-}1) + 4$.
Questo caso può verificarsi solo se $n \geq 3$.
Perciò $S(1) = 3$, $S(2) = 6$ e per $n \geq 3$ $S(n)=4(n\text{ -}2)+6$.

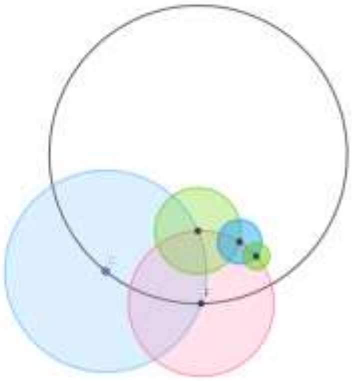
Figura 4

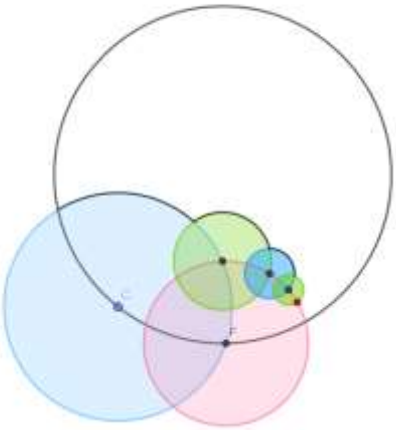
Figura 5

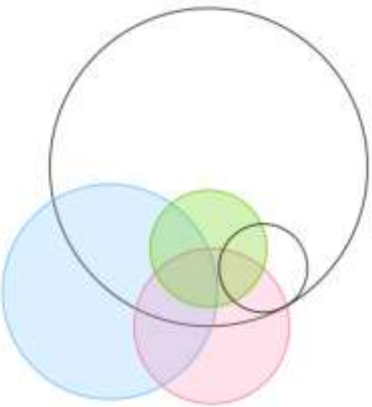
Figura 6

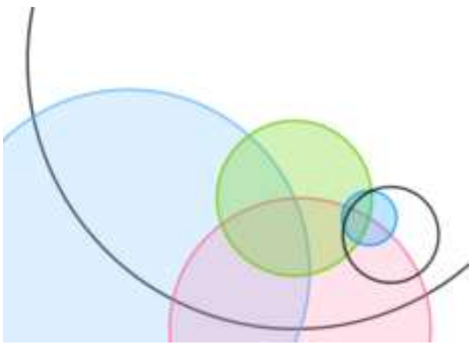
Figura 7