Come assicurarsi l’elezione

(Problema di Dicembre 2020)

Il Problema

Rudy vuole essere eletto come consigliere del Circolo degli scacchi e per questo motivo ha contattato e convinto ad eleggerlo il numero di persone strettamente necessario alla sua elezione.
Il circolo ha N iscritti e tutti possono essere eletti alla carica di consigliere; tutti gli iscritti votano ed esprimono m preferenze. Le k persone che avranno ricevuto più preferenze saranno elette.
Bisogna determinare il numero x di persone contattate.

Soluzione

Bisogna far sì che, le x persone che votano per Rudy, lui compreso, oltre a mettere la sua preferenza, distribuiscano uniformemente le altre $x(m-1)$ preferenze sugli $N-1$ soci rimanenti in modo che il numero di preferenze per uno stesso socio sia il più basso possibile.
Siano q_1 ed r_1 quoziente e resto di $x(m-1)/(N-1)$, Rudy riceverà x voti mentre $N-1-r_1$ persone riceveranno q_1 voti e r_1 persone ne riceveranno q_1+1.
Per quanto riguarda le preferenze degli $N-x$ soci rimanenti, nel caso peggiore nessuna preferenza andrà a Rudy e le preferenze stesse potrebbero essere concentrate su k soci.
In questo modo le $m(N-x)$ preferenze andranno tutte a k soci (non necessariamente distinti da quelli conteggiati in precedenza).
Siano q_2 ed r_2 quoziente e resto di $m(N-x)/k$, allora a $k-r_2$ soci andranno q_2 voti mentre a r_2 soci andranno q_2+1 voti.
Quindi, sempre nel caso peggiore, se $r_1+r_2 \geq k$ ci saranno k candidati con almeno q_1+q_2+1 voti mentre, se $r_1+r_2 < k$ il numero di voti sarà almeno q_1+q_2.
Per determinare il numero x determino prima il valore $y=\frac{y(m-1)}{N-1}+\frac{m(N-y)}{k}$ poi considero gli interi più vicini che soddisfano le condizioni viste in precedenza.
Risolvendo ottengo $y=\frac{mN(N-1)}{k(N-m)+m(N-1)}$

Esempio:
$N = 20$ $k = 5$ $m = 3$
y = 8,03
Verifico le condizioni per y = 8 $\quad q_1=\left\lfloor\frac{8\cdot 2}{19}\right\rfloor=0; r_1=16;\ q_2=\left\lfloor\frac{3\cdot 12}{5}\right\rfloor=7;\ r_2=1.$
Si ha $r_1+r_2>k$ perciò dato che 8 = 7 + 1 il numero di votanti sicuri per Rudy non è sufficiente (vedi tabella 1)
Ponendo y = 9 $\quad q_1=\left\lfloor\frac{9\cdot 2}{19}\right\rfloor=0; r_1=18;\ q_2=\left\lfloor\frac{3\cdot 11}{5}\right\rfloor=6;\ r_2=3.$
Anche in questo caso si ha $r_1+r_2>k$ ma 9 > 6 + 1 e la condizione è verificata (vedi tabella 2)
Rudy dovrà perciò contattare 8 soci.

Tabella 1

Rudy	x	x	x	x	x	x	x	x	
A	x	x	x	x	x	x	x	x	x
B	x	x	x	x	x	x	x	x	
C	x	x	x	x	x	x	x	x	
D	x	x	x	x	x	x	x	x	
E	x	x	x	x	x	x	x	x	
F	x								
G	x								
H	x								
I	x								
L	x								
M	x								
N	x								
O	x								
P	x								
Q	x								
R	x								
S									
T									
U									

Tabella 2

Rudy	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A	x	x	x	x	x	x	x	x	
B	x	x	x	x	x	x	x	x	
C	x	x	x	x	x	x	x		
D	x	x	x	x	x	x	x		
E	x	x	x	x	x	x	x		
F	x								
G	x								
H	x								
I	x								
L	x								
M	x								
N	x								
O	x								
P	x								
Q	x								
R									
S									
T									
U									