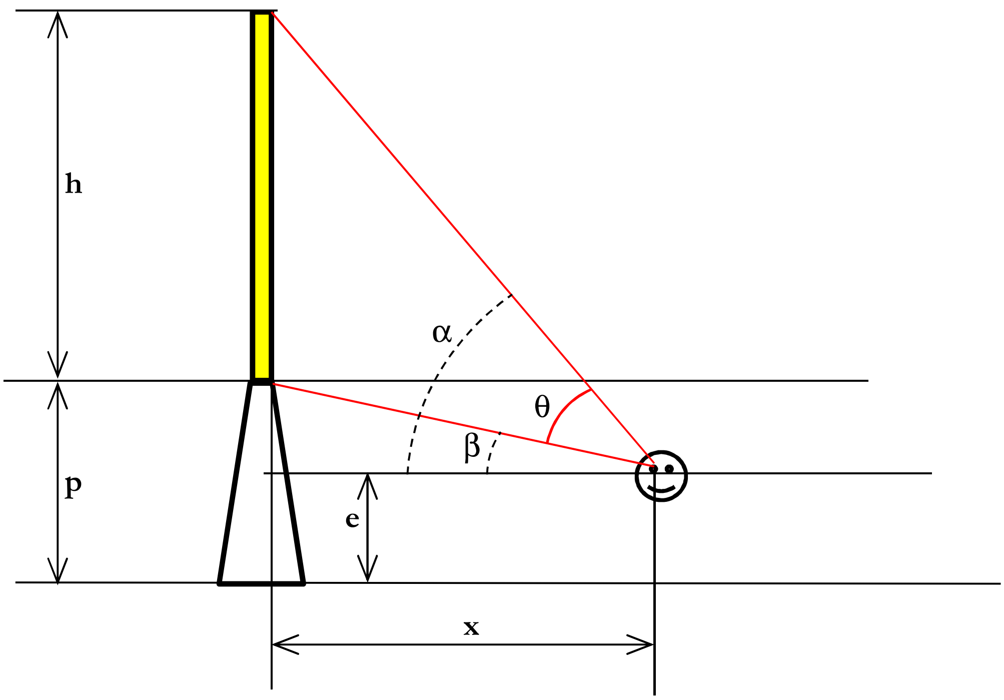
LE SCIENZE Problema di gennaio 2020

Hedi Lamarr in sedicesimo

Data una statua alta h, posta su di un piedistallo alto p, un osservatore i cui occhi sono alti e rispetto al suolo, qual è la distanza alla quale l'osservatore vede la statua con la massima altezza ?

Soluzione di Angelo P.

Sia x la distanza orizzontale dell'occhio dell'osservatore dalla statua.



Consideriamo il caso in cui e < p che è il più interessante. Partendo da lontano e avvicinandosi alla statua, la sua altezza apparente sarà via via più grande e l'angolo visuale θ aumenterà, fino ad un certo punto, oltre il quale θ comincia a diminuire perché l'osservatore si viene a trovare troppo "sotto" la statua. Dobbiamo quindi trovare la distanza x dove θ raggiunge il massimo.

Angolo visuale $\theta = \alpha - \beta$.

$tg(\alpha) = \dfrac{h+p-e}{x}$ da cui $\alpha = \mathrm{Arc\,tan}\left(\dfrac{h+p-e}{x}\right)$

$tg(\beta) = \dfrac{p-e}{x}$ da cui $\beta = \mathrm{Arc\,tan}\left(\dfrac{p-e}{x}\right)$

Per trovare il massimo della funzione θ, si calcola la sua derivata rispetto ad x e la si eguaglia a zero.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}(\alpha-\beta) = \frac{d}{dx}\left[\mathrm{Arc\,tan}\left(\frac{h+p-e}{x}\right) - \mathrm{Arc\,tan}\left(\frac{p-e}{x}\right)\right]$$

Ricordando che la derivata dell'Arctan(z) = $1/(1 + z^2)$ si ottiene

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{h+p+e}{x^2\left(\dfrac{(h+p-e)^2}{x^2}+1\right)} + \frac{p+e}{x^2\left(\dfrac{(p-e)^2}{x^2}+1\right)}$$

semplificando si ha

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{h(hp - eh + p^2 - 2ep - x^2 + e^2)}{\left[(e-p)^2 + x^2\right]\left[(h+p-e)^2 + x^2\right]}$$

Eguagliandola a 0, si ha con $h \neq 0$:

$hp - eh + p^2 - 2ep - x^2 + e^2 = 0$

da cui si ottiene la distanza alla quale si osserva la statua con la massima altezza apparente:

$$x = \sqrt{hp - eh + p^2 - 2ep + e^2}\ .$$

Per esempio se h = 20 m, p = 5 m, e = 1 m :

x = 9,8 m, mentre l'angolo visuale risulta di 0,796 rad, corrispondenti a 45,6°.

La formula che dà x, per e = p fornisce valore 0; se e > p il radicando è negativo.

Tuttavia, come è intuitivo, se l'occhio dell'osservatore è più alto del piedistallo, e > p, allora la massima altezza apparente si ha quando x = 0, cioè "a contatto" con la statua.