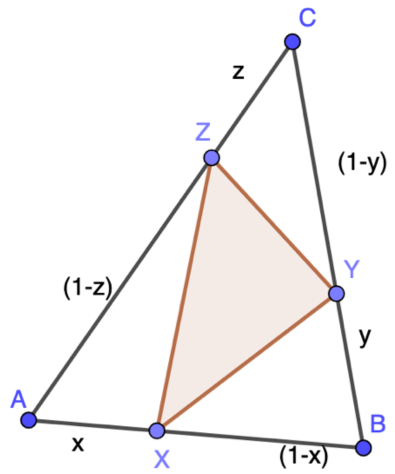
Rudi Matematici, Le Scienze problema di Settembre 2020

Giocando con le tartine (prima parte)

Dopo un'estate al mare è l'ora di riprendersi le energie lasciate in passeggiate, pedalate e nuotate distanziate. Doc ha preparato delle tartine di forma triangolare. Rudy vuole prendere un pezzetto di ciascuna, sceglie a questo scopo un punto X sul lato AB, mentre Doc sceglie un punto Y sul lato BC ed infine Rudy sceglie un punto Z sul lato CA. Treccia infine ritaglia il pezzo XYZ. Rudy vuole massimizzare la porzione, mentre Doc vuole che Rudy ne abbia meno possibile.



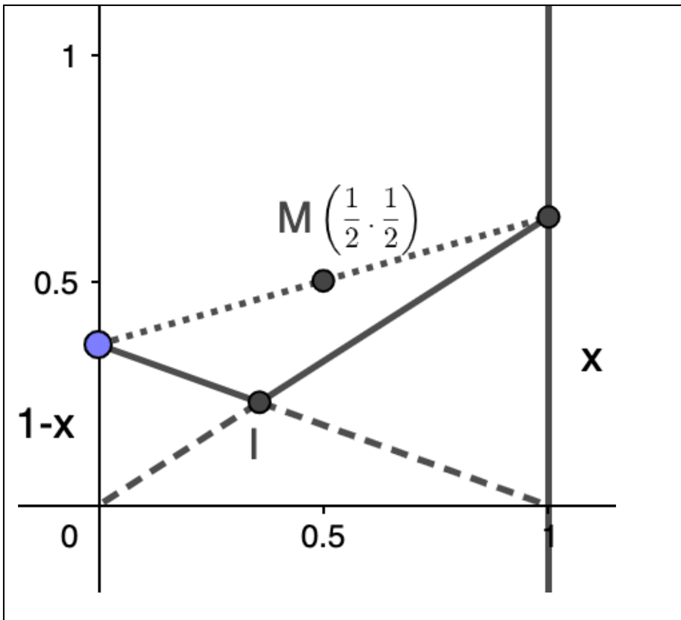
Soluzione prima parte

. Per impostare il problema osserviamo che dati i punti X,Y,Z e dette $x = \frac{AX}{AB}$, $y = \frac{BY}{BC}$, $z = \frac{CZ}{CA}$. A questo punto l'area del triangolo XYZ sarà una frazione dell'area di ABC determinata dai numeri x,y,z:

$$\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}} = 1 - x(1-z) - y(1-x) - z(1-y) = (1-x)(1-y)(1-z) - xyz$$

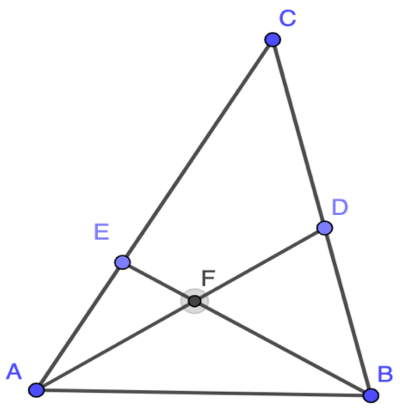
Come si vede facilmente dalla figura, dati X,Y la scelta ottima per Rudy consiste nel porre il punto Z alla massima distanza dalla base XY. Se XY non è parallelo ad AB allora Z sarà giocoforza in un estremo. Il valore dell'area nei due estremi, per Z in C e per Z in A vale rispettivamente

$(1-x)(1-y)$ e xy. Quindi Rudy otterrà $\max\left(xy,(1-x)(1-y)\right)$. Lo scopo di Doc è quindi porre il punto Y in modo che questo valore sia minimo. Studiamo allora, assumendo x assegnato, il valore di questa espressione al variare di y fra 0 ed 1. Per comprendere il problema aiuta una figura:



Lungo l'asse delle ascisse abbiamo il valore di y, lungo l'asse delle ordinate sono riportati i valori di $(1-x)(1-y)$, (tratto discendente), e di xy, (tratto ascendente). Il grafico della funzione che seleziona il massimo fra questi due valori è dato dalla linea continua che ha estremo inferiore nel punto I.

Per ottenere il valore di y che rende minima la funzione basta quindi risolvere l'equazione: $x\,y = (1-x)(1-y)$ da cui risulta: $y = (1-x)$ ed il valore del minimo è: $x(1-x)$. Questo valore poteva essere ottenuto anche applicando un caso particolare di una relazione generale che avevamo trovato nel problema di Luglio. $\frac{1}{y_I} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$.



Nella figura a sinistra se consideriamo le altezze dei punti E, D, F, C rispetto alla base AB abbiamo la seguente relazione generale:

$$\frac{1}{h_E} + \frac{1}{h_D} = \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_F}$$

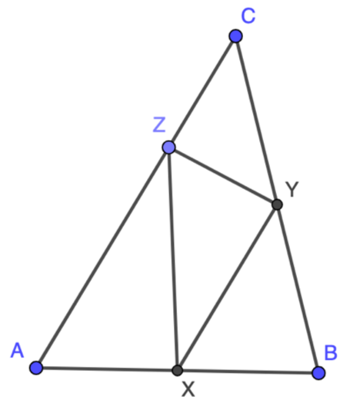
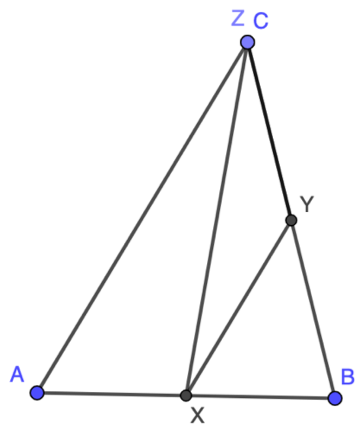
Il caso particolare di nostro interesse si ottiene considerando che per C all'infinito il primo termine del secondo membro si annulla.

[Credit: questo risultato è stato trovato da un eccellente lettore di Rudi Matematici, che mi fece scoprire la rivista Rudi Mathematici del Trio nel lontano 2007 (si parlava di monetazione genovese): oggi quel lettore di cui mi pregio di essere stato compagno di corso nell'altro millennio è il prof. Vincenzo Rubino, che per mezzo di manipolazioni algebriche ha evidenziato questa relazione, io l'ho ridimostrato come conseguenza del teorema di Menelao, vale la pena di osservare che il quoziente fra le due medie armoniche è un invariante proiettivo].

Infine a Rudy non rimane che massimizzare il valore di $x(1-x)$ scegliendo X esattamente come punto medio di AB e quindi $x=\frac{1}{2}$. A quel punto Doc sceglierà Y nel punto medio di BC e Rudy avrà l'imbarazzo della scelta potendo scegliere uno qualsiasi dei punti lungo il segmento CA, estremi inclusi ed ottenendo sempre una porzione della tartina pari ad un quarto del totale.

Giocando con le tartine (seconda parte)

Dopo la libera scelta di Rudy che si sarà mangiato il pezzetto tagliato da Treccia la palla passa a Doc e Treccia che dovranno dividere fra loro le porzioni rimaste. Ma Rudy detta la seguente regola (qui c'è una mia scelta ermeneutica) Alice sceglie una delle microtartine rimaste e tracciato un punto chiede a Doc di tracciare una retta per quel punto potendo prendere la parte della tartina che rimane da una delle due parti (a sua scelta) in cui la retta tracciata ha diviso il piano. Abbiamo essenzialmente due casi.

	Caso 1: Rudy sceglie un punto interno del segmenti CA, rimangono allora tre pezzi che possono essere equivalenti oppure tali che l'area del pezzo BXY sia comprese fra le aree dei due pezzi restanti, nella figura abbiamo esattamente questa situazione. Se Alice vuole massimizzare la propria parte di tartina sceglierà un punto T interno alla microtartina più piccola, certa che Doc cercherà di ottenere la porzione più grande. Se Alice vuole seguire Rudy nella sua dieta sceglierà un punto esterno alla porzione più grande accontentandosi della più piccola delle tre porzioni. Il caso matematicamente più interessante è il primo. Alice deve infatti scegliere un punto interno ad un triangolo in modo che a Rudy spetti la minima parte della tartina. Una volta che Doc ha fatto la sua scelta tocca a Treccia scegliere i pezzo più grande fra quelli rimasti, Doc sceglierà poi il pezzo intermedio che sarà con certezza BXY, mentre a Treccia rimane la porzione più piccola della microtartina affettata da Doc.
	Caso 2: Rudy sceglie un punto estremo del segmento CA, in figura sceglie Z in C. Allora rimangono due pezzi e Treccia, se vuole massimizzare la propria parte andrà a scegliere un punto interno alla fetta BXY lasciando a Doc. Qualunque sia la scelta di Doc Alice avrà metà della tartina iniziale mentre Doc avrà il quarto restante BXY.

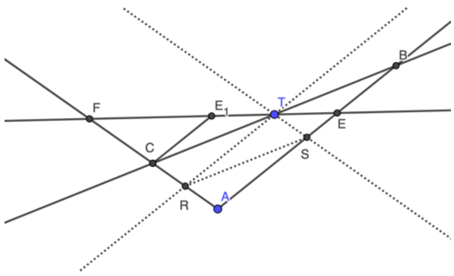
Riguardo alla scelta migliore del punto interno alla tartina più piccola nel caso 1 c'è molto da dire ma cercheremo di essere sintetici. L'intuizione mi suggerisce che Doc può minimizzare la parte spettante a Treccia tracciando una retta per T in modo da tagliare i bordi del rettangolo in due punti simmetrici rispetto a T (che rimane il punto medio) e lasciando dall'altra parte il vertice più vicino ai segmenti che verificano questa condizione. Treccia per contro può limitare il danno scegliendo il punto T in modo che i tre segmenti minimi tracciati da Doc siano equidistanti dai tre vertici. Cioè scegliendo T nel baricentro del triangolo ABC. Studiamo il risultato dietetico per Doc e Treccia al variare di z. Come già anticipato se $z = 0$ siamo nel secondo caso. A Treccia spetta metà dell'intera tartina e a Doc il restante quarto. Se invece z è diverso da zero ma minore di un mezzo a Treccia spetta la frazione: $\frac{1-z}{2} + \frac{4\,z}{9} = \frac{9-z}{18}$ se infine z supera un mezzo i ruoli di $z\ e\ 1 - z$ si scambiano. Rudy ha quindi le possibilità estreme di imporre a Doc la sua stessa dieta, lasciando ad Alice la possibilità di mangiare mezza tartina di ognuna, oppure di favorire un minimo Doc, permettendogli di avere $\frac{5}{18}$ ed imporre a Treccia una frazione di tartina pari ai $\frac{17}{36}$ del totale.

Riguardo all'intuizione anzidetta ecco una dimostrazione.

Teorema: dato un punto T interno ad un angolo $C\hat{A}B$ di vertice A detti B e C i punti di intersezione di una retta t passante per T con i lati dell'angolo, risulta che l'area del triangolo ABC è minima, al variare di t se e solo se T è il punto medio di AB.

Dimostrazione quick and dirty. Il rapporto fra le aree è un invariante affine quindi basta ricondursi al caso di un angolo retto con T lungo la bisettrice.

Per una dimostrazione di stile più euclideo conviene riferirsi alla figura seguente:



Nella figura è evidenziata la costruzione della linea per T che rende minima l'area di CAB (si è costruito il parallelogramma TSAR e si è tracciata la retta t parallela al segmento RS. Per mostrare che effettivamente l'area di CAB è minima consideriamo una diversa retta: TE che interseca i lati dell'angolo nei punti E (interno al triangolo ABC ed F esterno al triangolo. L'area del triangolo AEF può essere ottenuta da quella del triangolo ABC togliendo da questo l'area del triangolo TBE ed aggiungendo l'area del triangolo TFC, nella figura è evidenziato anche il punto E_1 simmetrico del punto E rispetto al punto T. Osserviamo che il triangolo TEB è congruente a TCE_1 per il primo criterio di congruenza, quindi CE_1 è parallela ad AB così il punto E_1 è interno al segmento TF perciò l'area del triangolo aggiunto è maggiore dell'area del triangolo sottratto.

Rimane da dimostrare che al variare del punto T il baricentro realizza la condizione di rendere massimo il triangolo residuo che può essere minimizzato da Doc. La dimostrazione di questo è abbastanza semplice. Se T non è il baricentro del triangolo questo punto viene a trovarsi in almeno uno dei triangoli minimi equivalenti individuati dal baricentro, allora a Doc basta fare un taglio per T parallelo alla base di questo triangolo minimo per consegnare ad Alice una porzione più piccola del triangolo minimo individuato dal baricentro.